S. ALINHAC

Mécanisme d'explosion des solutions classiques de systèmes hyperboliques unidimensionnels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 6, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A6_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

MECANISME D'EXPLOSION DES SOLUTIONS CLASSIQUES DE SYSTEMES HYPERBOLIQUES UNIDIMENSIONNELS

S. ALINHAC

Exposé n° VI

17 janvier 1995

Mécanisme d'explosion des solutions classiques de systèmes hyperboliques unidimensionnels

par S. Alinhac

Introduction

Nous considérons ici les solutions classiques de problèmes de Cauchy pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires en dimension d'espace $n = 1$. On pourra consulter Lax [9], Majda [11] ou Smoller [13] comme références générales sur ce sujet.

On sait que pour des données initiales régulières à support compact, il n'existe pas de solutions classiques pour tout temps pour de larges classes de systèmes non-linéaires.

Le cas où la dimension N du système vaut un (cas scalaire) est bien compris, grâce à la méthode des caractéristiques ; on dispose d'une formule explicite du temps de vie $\bar{T}$ de la solution, et l'on peut préciser le comportement de cette dernière pour $t < \bar{T}$ (ce que l'on appelle ici le "mécanisme de l'explosion").

Dans tous les autres cas, les résultats ou les conjectures reposent sur l'existence d'un découplage des différents modes de propagation. Dans le cas de systèmes 2×2 écrits à l'aide des invariants de Riemann, ce découplage est exact (voir Klainerman et Majda [7] et Majda [11]). Dans le cas de systèmes généraux à données petites, il n'est qu'asymptotique (voir John [6] et aussi Hörmander [5]). Quoiqu'il en soit, la croyance générale semble être que tout se passe à l'explosion "comme dans le cas scalaire" : explosion "sur un mode seulement" et sur certaines composantes.

Dans cet exposé, nous faisons le point sur les formulations précises qui peuvent être données de ces croyances et sur les résultats existants.

Pour tous détails, nous renvoyons le lecteur à [3] et [4].

1. Généralités et rappels sur l'explosion géométrique

1.1 Soit

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0 \tag{1.1}$$

un système quasi-linéaire, où $u \in \mathbf{R}^N$, A étant une matrice $N \times N$ réelle dépendant de façon C^∞ de u.

Nous notons

$$\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_N(u)$$

les valeurs propres de A supposées réelles, et $r_j(u)$ (resp. $\ell_j(u)$) les vecteurs propres à droite (resp. à gauche) de $A(u)$ $(j = 1, \dots, N)$. Nous appelons i-caractéristique une courbe intégrale du champ $L_i = \partial_t + \lambda_i(u)\partial_x$.

Lorsque $N = 2$, rappelons qu'on nomme invariants de Riemann des fonctions $w_1(u)$, $w_2(u)$ de différentielles indépendantes vérifiant

$$r_1(u)\nabla w_2(u) = 0, r_2(u)\nabla w_1(u) = 0.$$

Si l'application $u \mapsto w$ est un difféomorphisme, on peut réécrire le système (1.1) sous la forme (équivalente pour des u régulières)

$$(1.1)' \qquad \partial_t w + \Lambda(w)\partial_x w = 0,$$

où Λ est la matrice diagonale d'éléments λ_1, λ_2.

Lorsque $N \geq 3$, il n'est plus possible en général de diagonaliser (1.1), mais on peut introduire, près de l'origine dans l'espace des u, des coordonnées locales (qu'on note encore u) telles que l'axe des u_j soit une courbe intégrale du champ r_j.

1.2 Rappelons brièvement les notions d'"explosion géométrique", de "système éclaté" et de "solution éclatée" qui forment le cadre conceptuel nécessaire pour décrire le mécanisme d'explosion (voir[1] pour les détails et preuves).

Le système éclaté de (1.1) pour la valeur propre λ_i est

$$(1.2) \qquad \partial_T\phi = \lambda_i(v), {}^t\ell_i(v)\partial_T v = 0,$$

$${}^t\ell_k(v)[\partial_X\phi\partial_T v + (\lambda_k - \lambda_i)(v)\partial_X v] = 0, k \neq i.$$

Ce système correspond formellement à (1.1) par le changement de variables

$$(1.3) \qquad (x,t) = \Phi(X,T) = (\phi(X,T),T), u(\phi(X,T),T) = v(X,T).$$

Supposons connue une solution régulière v, ϕ de (1.2) près d'un point $M_0 = (X_0, T_0)$, vérifiant

$$(1.4) \qquad \phi(X_0,T_0) = x_0, \partial_X\phi(X_0,T_0) = 0, \partial_X v(X_0,T_0) \neq 0.$$

Soit alors D un domaine ouvert $(m_0 = (x_0,T_0) \in \bar{D})$ tel qu'on puisse trouver une "branche d'inverse" ψ de Φ définie et continue sur $\bar{D}$ et vérifiant, pour $(x,t) \in D$,

$$\Phi(\psi(x,t)) = (x,t), \partial_X\phi(\psi(x,t)) \neq 0.$$

La fonction u définie sur D par

$$u(x,t) = v(\psi(x,t))$$

est une solution de (1.1), dont le gradient devient infini ("explose") au point m_0. Une telle solution de (1.1) est dite solution éclatée du système. Son mécanisme d'explosion est appelé explosion géométrique ; il peut être totalement décrit par la connaissance de ϕ, v.

Les cas les plus simples sont le pli et le cusp.

Si

$$\partial_X^2 \phi(M_0) \neq 0,$$

la singularité de Φ en M_0 est un pli, et les solutions éclatées u correspondantes, définies d'un coté d'une courbe lisse passant par m_0, sont dites solutions de type pli.

Si

$$\partial_X^2 \phi(M_0) = 0, \partial_X^3 \phi(M_0) \neq 0,$$

la singularité de Φ est un cusp, et les solutions correspondantes, définies à l'intérieur ou à l'extérieur du cusp, sont dites solutions de type cusp.

Bien entendu, dans le cas de la dimension $n = 1$ qui nous intéresse ici, le changement (1.3) vérifiant (1.2) est tout simplement celui qui redresse les i-caractéristiques. L'extension de la théorie à $n \geq 2$ est moins évident.

Ce que l'on se propose de faire dans les sections suivantes est d'identifier des solutions de systèmes de la forme (1.1), près de leurs points d'explosion, comme des solutions éclatées.

2. Cas des systèmes 2×2

Considérons ici un système (1.1) pour $N = 2$, et supposons qu'on puisse l'écrire sous la forme (1.1)'.

Pour une donnée initiale $u_0 \in C^\infty$, il est évident qu'il existe un temps T_0 tel que pour $t \geq T_0$, les composantes w_1 et w_2, si elles existent encore, sont régies chacune par des équations scalaires. Dans ce cas le mécanisme de l'explosion est bien celui d'une équation scalaire. Cet argument très simple permet de prouver qu'aucune solution classique ne peut exister pour tout temps si l'on suppose au moins l'un des modes "non linéairement dégénéré", c'est à dire par exemple $\partial_{w_1}\lambda_1(w_1, w_2)$ non identiquement nul (voir [6] ou Klainerman et Majda [7]).

La situation qui nous intéresse ici est celle où l'exposion se produit **avant le découplage** des composantes.

Soit $m_0 = (0,0)$ et u une solution de classe C^∞ de (1.1) définie et bornée dans un rectangle

$$\{(x,t), |x| < M, -T_0 \leq t < 0, M > 0\} \tag{2.1}$$

On suppose qu'au voisinage des valeurs prises par u dans ce rectangle on peut utiliser les invariants de Riemann $w = w(u)$ pour écrire le système sous la forme (1.1)'.

Le système éclaté de $(1.1)'$ pour la valeur propre λ_1 est

$$\partial_T \phi = \lambda_1(v), \partial_T v_1 = 0, (\lambda_2 - \lambda_1)(v)\partial_X v_2 + \partial_X \phi \partial_T v_2 = 0. \tag{2.2}$$

Remarquons que les caractéristiques issues de points proches de m_0 possèdent un point limite lorsque $t \to 0_-$. Nous faisons maintenant l'hypothèse **géométrique** suivante :

H₁.

(i) Il existe des 1-caractéristiques Γ^1_α et Γ^1_β issues de points $\alpha = (a, -T_0), \beta = (b, -T_0)$ $(a < b)$ qui aboutissent en des points $\alpha' = (a', 0), \beta' = (b', 0), a' < 0 < b'$, et telles que la 2-caractéristique Γ^2_α issue de α recoupe Γ^1_β en un point α'' d'ordonnée négative.

(ii) Il existe une 2-caractéristique issue d'un point γ d'ordonnée négative de Γ^1_α, aboutissant à un point $\gamma'' = (c'', 0), c'' < 0$.

(iii) Il existe une 1-caractéristique issue de $\gamma' = (c, -T_0)$, aboutissant à γ''.

Nous notons ω (resp. ω_1) le quadrilatère (ouvert le long de $t = 0$) délimité par $t = 0, \Gamma^1_\alpha, \Gamma^1_\beta$ et $t = -T_0$ (resp. Γ^2_α).

D'autre part, nous faisons l'hypothèse **analytique** suivante :

H₂. *Dans ω, $|{}^t\ell_2(u)\partial_x u| \leq C$.*

Notre résultat est le suivant.

Théorème 2.1. *Soient $u \in C^\infty$ une solution de (1.1) satisfaisant aux hypothèses (H_1) et (H_2) et (ϕ, v) la solution correspondante de (2.2) définie dans*

$$\Omega = \{(X, T), a \leq X \leq b, -T_0 \leq T < 0\}.$$

Alors, (ϕ, v) se prolongent en une solution $(\tilde{\phi}, \tilde{v})$ de (2.2) dans un ouvert $\tilde{\Omega}$ qui contient Ω et le segment $\{(X, T), c < X < b, T = 0\}$.

Autrement dit, la solution u considérée est, au voisinage de m_0, une solution éclatée au sens de [1].

Les hypothèses du Théorème 2.1 appellent les remarques suivantes :

(i) L'hypothèse géométrique H_1 n'est pas très contraignante et autorise des configurations de 1-caractéristiques assez singulières, comme par exemple un secteur de courbes concourantes en m_0.

(ii) Comme pour une solution éclatée u on a $|{}^t\ell_2(u)\partial_x u|$ bornée (cf.[1]), l'hypothèse H_2 est nécessaire (H_2 équivaut à $|\partial_x w_2| \leq C$).

Pour une description de u juste après $t = 0$, voir Lebaud [10]. Lorsque des termes de source sont présents, voir Natalini [12].

Afin de justifier l'hypothèse H_2 du théorème, considérons le cas particulier du système

$$\partial_t w_1 + w_1 \partial_x w_1 = 0, \partial_t w_2 + \lambda_2(w_1, w_2)\partial_x w_2 = 0. \tag{2.3}$$

Supposons par exemple que la valeur $w_1^0(x) = w_1(x, -T_0)$ satisfasse

$$w_1^0(0) = 0, \partial_x w_1^0(0) = -T_0^{-1},$$

le point 0 étant un minimum de la dérivée de w_1^0.

a. La première équation est autonome et bien connue, et sa solution w_1 explose (plus précisément $|\partial_x w_1|$ devient infini) au temps 0 à l'origine (notamment).

b. Le long d'une 2-caractéristique, on a

$$L_2(\partial_x w_2) + \partial_2\lambda_2(w_1, w_2)(\partial_x w_2)^2 = -\partial_1\lambda_2(w_1, w_2)\partial_x w_1 \partial_x w_2. \tag{2.4}$$

Comme

$$L_2 w_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)\partial_x w_1,$$

l'intégrale $\int^0 |\partial_x w_1| ds$ le long d'une 2-caractéristique est convergente et la présence du terme en $\partial_x w_1$ dans (2.4) n'entraine pas l'explosion de $\partial_x w_2$.

Cet exemple très simple semble indiquer que l'explosion des deux composantes n'a aucune raison de se produire simultanément au même temps $\bar{T}$ et au même point.

Pour prouver le théorème 2.1, on commence par écrire le système éclaté (2.2) ; v_1 est dorénavant considérée comme une fonction connue, et il s'agit de prolonger ϕ et v_2, près de M_0, au-delà de $\{T < 0\}$. Bien entendu, la surface $\{T = 0\}$ est caractéristique en M_0 pour (2.2).

En introduisant $k = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\partial_X\phi$, on peut réécrire (2.2) comme le système **quasi-linéaire**

$$\partial_X v_2 + k\partial_T v_2 = 0, (\lambda_2 - \lambda_1)\partial_T k + \partial_2\lambda_2 k \partial_T v_2 - \partial_1\lambda_1\partial_X v_1 = 0. \tag{2.5}$$

On éclate de nouveau (2.5) en posant

$$X = X', T = \zeta(X', T'), \tag{2.6}$$

où ζ est choisie de façon à redresser les courbes intégrales de $\partial_X + k\partial_T$ en les droites $T' = \textit{constante}$. La fonction $h(X', T') = v_2(X', \zeta(X', T'))$ transformée de v_2 satisfait $\partial_{X'} h = 0$, et est donc connue. La fonction ζ vérifie l'équation **linéaire**

$$\partial^2_{X'T'}\zeta + \frac{\partial_2\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\partial_{T'} h \partial_{X'}\zeta - \frac{\partial_1\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\partial_X v_1 \partial_{T'}\zeta = 0.$$

Il est alors facile de prolonger ζ et de montrer qu'en fait (2.6) est un vrai changement de variables près de M_0 (c'est à dire $\partial_{T'}\zeta \neq 0$).

Pour terminer cette section, formulons la conjecture suivante :

Pour tout donnée générique u_0, la solution explose au temps $\bar{T}$ en un unique point m_0, et coincide près de m_0 pour $\{t < \bar{T}\}$ avec une solution éclatée de type cusp.

3. Cas de données initiales petites

C'est celui où l'on résoud (1.1) avec une donnée initiale

$$u(x,0) = u_0(x) = \epsilon u_0^{(1)}(x) + \epsilon^2 u_0^{(2)} + \dots,$$

u_0 étant C^∞ et supportée dans $[-M, +M]$.

Ce cas a été étudié par John [6] et Hörmander [5].

Nous supposons dans toute la suite, pour ce cas, que les valeurs propres λ_j sont vraiment non linéaires à l'origine, c'est à dire ici

$$\partial_j \lambda_j(0) \neq 0.$$

Définissons les nombres M_j par

$$M_j^{-1} = \max -\partial_j \lambda_j(0)(u_0^{(1)})'_j, \tag{3.1}$$

où $(z)_j$ désigne la j^{ieme} coordonnée du vecteur z.

Le résultat de John est que le temps de vie T_ϵ de u vérifie

$$\epsilon T_\epsilon = \inf M_j + O(\epsilon). \tag{3.2}$$

De plus, on sait que le gradient d'une seule composante explose ; voir [5] pour une description qualitative de la solution à l'explosion.

Soient $\gamma_\pm$ les 2-caractéristiques issues des points $(\pm M, 0)$; il est bien connu (cf. par exemple Smoller [10]) que, à gauche de γ_- (resp. à droite de γ_+), la solution u est une onde simple, c'est à dire ici vérifie $u_2 = u_3 = 0$ (resp. $u_1 = u_2 = 0$). La composante u_1 (resp. u_3) est solution de l'équation scalaire

$$\partial_t u_1 + \lambda_1(u_1, 0, 0)\partial_x u_1 = 0. \tag{3.3}$$

(resp.

$$\partial_t u_3 + \lambda_3(0, 0, u_3)\partial_x u_3 = 0). \tag{3.4}$$

Pour un T fini bien choisi, la trace $u(x,T)$, qui est une série en ϵ (dont les termes successifs sont faciles à calculer numériquement), permet de calculer exactement le temps de vie de u_1 (resp. u_3) et d'en préciser le comportement à l'explosion ; il s'agit en effet de discuter l'équation scalaire (3.3) (resp. (3.4)), qui est bien connue (cf. par exemple [10] ou [9]).

C'est pourquoi nous supposons ici que l'explosion se produit sur le mode central, c'est à dire

$$M_2 < \inf(M_1, M_3).$$

Par commodité, nous supposons aussi

$$\lambda_2(0) = 0,$$

et introduisons la variable de "temps lent"

$$\tau = \epsilon t.$$

La fonction $\tilde{u}(x,\tau) = u(x, \tau\epsilon^{-1})$ est solution du système

$$\epsilon\partial_\tau \tilde{u} + A(\tilde{u})\partial_x \tilde{u} = 0, \tag{3.6}$$

dont l'éclaté pour la valeur propre λ_2 est

$$\epsilon\partial_T \phi = \lambda_2(\tilde{v}), {}^t\ell_2(\tilde{v})\partial_T \tilde{v} = 0, \tag{3.7}$$

$${}^t\ell_i(\tilde{v})[\epsilon\partial_X \phi\partial_T + (\lambda_i - \lambda_2)(\tilde{v})\partial_X]\tilde{v} = 0, i = 1, 3.$$

Fixons dorénavant

$$0 < \tau_0 < M_2 < \tau_1,$$

et notons $\alpha(\epsilon), \beta(\epsilon)$ les points d'intersection de γ_+ et γ_- avec la droite $\{\tau = \tau_0\}$.

Notre premier résultat montre que u est bien une solution éclatée.

Théorème 2. *Soit $p \in \mathbf{N}, p \geq 1$.*

(a) Pour $\epsilon > 0$ assez petit, il existe une solution $\tilde{v}, \phi$ du système éclaté (3.7) dans le rectangle

$$R = \{(X,T), \alpha \leq X \leq \beta, \tau_0 \leq T \leq \tau_1\},$$

qui est de la forme

$$\tilde{v} = \epsilon D_\epsilon w, D_\epsilon = diag(\epsilon^p, 1, \epsilon^p),$$

w étant une fonction régulière de $(X,T,\epsilon) \in R \times [0, \epsilon_0]$.

(b) Soit

$$\tau(\epsilon) = \max\{\tau, \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1, (X,T) \in R \cap \{0 \leq T < \tau\} \Rightarrow \partial_X \phi(X,T) \neq 0\}.$$

Soit $\tilde{u}$ la solution de (3.6) définie pour $\tau < \tau(\epsilon)$ par

$$\tilde{u}(\phi(X,T),T) = \tilde{v}(X,T),$$

et $U(x,t) = \tilde{u}(x,\epsilon t)$. Alors, pour $\tau_0 \leq \epsilon t < \tau(\epsilon)$, entre γ_- et γ_+, $U = u$.

Ce théorème est du type du Théorème 2.1, l'existence globale de la solution du système éclaté étant rendue possible par la présence du paramètre ϵ.

Sa preuve repose sur une connaissance assez précise de la solution u près de $\{\tau = \tau_0\}$, qui est obtenue par les techniques habituelles de l'"optique géométrique non linéaire". Les résultats utiles, bien que pour l'essentiel contenus dans Hörmander [5], sont prouvés dans [6]. On montre en particulier que, entre γ_- et γ_+ et pour $\tau \geq \tau_0$, la solution u est approchée par la fonction $(0, \epsilon w_2(x,\tau), 0)$, où w_2 satisfait

(3.8) $$\partial_\tau w_2 + \tilde{\lambda}_2(w_2)\partial_x w_2 = 0, \tilde{\lambda}_2(w) = \epsilon^{-1}\lambda_2(0,\epsilon w, 0),$$

avec la valeur initiale formelle

(3.9). $$w_2(x,0) = \Sigma_{p\geq 1}\epsilon^{p-1}v_{20}^{(p)}(x)$$

Les fonctions $v_{20}^{(p)}$ sont appelées **"profils libres"**, et $v_{20}^{(1)} = (u_0^{(1)})_2$.

Comme l'équation (3.8) sur w_2 est scalaire (c'est là le bénéfice asymptotique du découplage), on peut calculer explicitement le temps de vie de sa solution . Plus précisément, faisons l'hypothèse "générique" suivante :

(ND) La fonction $\partial_2\lambda_2(0)(u_0^{(1)})_2'$ possède un unique minimum non dégénéré (i.e., à dérivée seconde non nulle).

Le théorème des fonctions implicites nous permet alors de "suivre avec ϵ" l 'unique minimum de $\partial_x w_2(x,0)$, et de calculer un temps de vie formel $\tau_f(\epsilon)$ par la formule habituelle

$$-\frac{1}{\tau_f} = \inf \partial_x[\tilde{\lambda}_2(w_2)].$$

On a en particulier $\tau_f(0) = M_2$.

Dans le cas générique où l'hypothèse (ND) est vérifiée, on peut encore préciser le théorème de la façon suivante.

Théorème 3. *Supposons vraie l'hypothèse (ND). Alors*

(a) La fonction $\tau(\epsilon)$ est C^∞ près de $\epsilon = 0$, et asymptotique à la série formelle $\tau_f(\epsilon)$ obtenue par l'optique géométrique.

(b) Le temps de vie T_ϵ de u vaut

$$T_\epsilon = \epsilon^{-1}\tau(\epsilon).$$

La solution u explose en un unique point $P(\epsilon)$ d'ordonnée T_ϵ et est une solution éclatée de type cusp près de $P(\epsilon)$.

Donnons quelques indications sur la preuve du théorème. Elle comporte les deux étapes suivantes :

(i) Un calcul d'existence et d'approximation de la solution,

(ii) Une représentation de la solution comme solution éclatée.

La phase (i) est celle à laquelle nous avons fait allusion plus haut : méthode de l'optique géométrique non linéaire et approximation par $(0, \epsilon w_2(x, \tau), 0)$.

La phase (ii) consiste, après avoir normalisé les variables en accord avec les résultats de (i), à résoudre le système éclaté dans un domaine **s'étendant au-delà du temps d'explosion présumé** (le domaine R du théorème).

Il est important de noter que la méthode d'approximation- représentation employée ici pour prouver les Théorèmes 2 et 3 est **indépendante** des estimations $L^1 - L^\infty$ de John. Comme ce sont justement ces estimations que l'on n'obtient pas en dimension d'espace supérieure à 1, il nous a paru significatif de montrer que les résultats de John pouvaient être obtenus sans ces estimations. Toutefois, il est honnête de dire que l'application de la présente méthode à des situations en dimension d'espace supérieure à 1 se heurte à d'autres difficultés (voir [2]).

Pour conclure, nous croyons vraie la conjecture faite dans [1] qui décrit l'explosion générique comme celle d'une solution éclatée de type cusp.

Bibliographie

[1] Alinhac S. *"Explosion géométrique pour des systèmes quasilinéaires"*, Séminaire d'EDP, Ecole Polytechnique, Paris, (1993), et article à paraitre dans Amer. J. Math. (1995).

[2] Alinhac S. *"Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasilinéaires en dimension deux II"*, Duke Math. J. 73 (3), (1994), 543-560.

[3] Alinhac S. *"Temps de vie précisé et explosion géométrique pour des systèmes hyperboliques quasi-linéaires en dimension un d'espace"*, preprint Orsay (1994) et article à paraitre aux Annales de Pise.

[4] Alinhac S. *"Blowup for nonlinear hyperbolic equations"*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, (1995).

[5] Hörmander L., *"Nonlinear hyperbolic differential equations"*, Lectures, University of Lund, (1986-1987).

[6] John F., *"Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation"*, Comm. Pure Appl. Math. 27, (1974), 377-405.

[7] Klainerman S. et Majda A., *"Formation of singularities for wave equations including the nonlinear vibrating string"*, Comm. Pure Appl. Math. 33, (1980), 241-263.

[8] Lax P. D., *"Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations"*, J. Math. Physics 5(5), (1964), 611-613.

[9] Lax P. D., *"Hyperbolic systems of conservation laws II"*, Comm. Pure Appl. Math. 10, (1957), 537-566.

[10] Lebaud M. P., *"Description de la formation d'un choc dans le p-système"*, à paraitre au J. Math. Pure Appl., (1993).

[11] Majda A. *"Compressible fluid flow and systems of conservation laws"*, Springer Appl. Math. Sc. 53, (1984).

[12] Natalini R. *"Unbounded solutions for conservation laws with sources"*, Nonlinear Anal., Th. Meth. Appl. 21 (5), (1993), 349-362.

[13] Smoller J., *"Shock waves and reaction diffusion equations"*, Grundlehr. 258, Springer Verlag, New York, (1983).

S. Alinhac, Département de Mathématiques,
Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.
salinhac@matups.matups.fr