Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Atallah

C. Zuily

Équation de Monge-Ampère relative à une métrique riemannienne

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. nº 3, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A3_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

EQUATION DE MONGE-AMPERE RELATIVE A UNE METRIQUE RIEMANNIENNE

A. ATALLAH et C. ZUILY

Exposé n° III

18 octobre 1994

I Introduction

Dans ce travail on s'intéresse au problème de Dirichlet associé à une équation de Monge-Ampère relativement à une métrique Riemannienne régulière quelconque. Le but est de prouver un résultat analogue à celui obtenu par Caffarelli-Nirenberg-Spruck [C.N.S] dans le cas de la métrique Euclidienne. Plus précisément soit g une métrique Riemannienne de classe C^∞ sur un ouvert borné régulier Ω de $\mathbf{R}^n, n \geq 2$. Soient ∇u et $\nabla^2 u$ la dérivée covariante et le Hessien de u relativement à la connexion de Levi-Civita de la métrique g. On dira qu'une fonction u est strictement convexe si la matrice $(\nabla^2 u)$ est définie positive. On supposera que Ω est strictement convexe dans le sens suivant :

(I.1) il existe $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$, strictement convexe dans $\bar{\Omega}$ et telle que $h = 0$ sur $\partial\Omega$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème I.1.— *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n, n \geq 2$, strictement convexe et de classe C^∞. Soient $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f > 0$ dans $\bar{\Omega}$ et $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$, le problème*

$$(I.2) \qquad \begin{cases} \det \nabla^2 u(x) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

possède une solution strictement convexe unique $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

L'intérêt d'étudier ce type d'équations provient du fait que plusieurs problèmes en géométrie différentielle (comme les problèmes de Weyl ou de Minkowski, voir aussi [G.S]) conduisent à des équations de ce type. Le cas de la métrique plate dans $\mathbf{R}^n$ a été longuement étudié durant de nombreuses années et le théorème (I.1) a été prouvé dans ce cas par Caffarelli-Nirenberg-Spruck [CNS].

En dimension deux, pour une métrique quelconque, ce résultat a été prouvé par Corona [C] qui supposait en outre l'existence d'une sur solution, par Hong [H] dans le cas $\varphi = 0$ et par Atallah [A] dans le cas général. Récemment Guan-Spruck [GS] ont étudié une telle équation pour des métriques sur la sphère. Finalement signalons les résultats récents obtenus par Atallah [A] dans le cas où $f = f(x, u, \nabla u)$ en supposant l'existence de sur et sous solutions.

La preuve utilise, comme d'habitude, la méthode de continuité qui consiste à établir des estimations uniformes pour les normes $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ de solutions régulières de (I.2) (voir [CNS] ou [G.T]). D'après les travaux d'Evans [E] et Krylov [K] de telles estimations peuvent êtres déduites des estimations uniformes C^2.

Les estimations intérieures et les estimations des dérivées secondes tangentielles et mixtes sur le bord sont détaillées dans [A] et nous les rappelons ici brièvement. La partie la plus importante de ce travail est consacrée à l'estimation de la dérivée seconde normale sur le bord, qui nécessite la construction d'une sur solution locale pour le problème (I.2). Cette construction qui est faite dans un système de coordonnées approprié, est inspiré de [CNS] mais demande dans ce cas une preuve plus technique.

Dans un système de coordonnées locales on a $(\nabla^2 u) = (\nabla_{ij} u)$, où $\nabla_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k}$, où $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial}{\partial x_k}$ sont les dérivées usuelles et les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel associés à g.

II Preuve du théorème I.1

Une constante C sera dite contrôlée si elle ne dépend que de n, Ω, g, f et φ. Une fonction sera dite contrôlée si elle est bornée par une telle constante.

1. Estimations C^0 et C^1 :

Tout d'abord d'après (I.1) si λ est une constante positive assez grande, la fonction

$$\varphi = \lambda h + \varphi \tag{II.1}$$

est une sous solution du problème (I.2). D'après le principe du maximum et la convexité de u on a :

$$\psi \le u \le \max_{\partial\Omega} \varphi \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega} . \tag{II.2}$$

D'autre part il est facile de voir que $|\nabla u|^2 = \Sigma g^{ij} \nabla_i u \nabla_j u$ atteint son maximum sur le bord. Comme les dérivées tangentielles de u sur le bord sont contrôlées, les estimations C^1 sur le bord découleront de celle de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur le bord ; ici ν est la normale intérieure du bord.

Le principe du maximum de Hopf et (II.2) impliquent

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \le \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega . \tag{II.3}$$

Pour la majoration on suit la méthode de [C]. Une géodésique γ normale à $\partial\Omega$ en un point p intersecte, d'après la stricte convexité de Ω, le bord en un autre point q. Soit w la fonction linéaire sur γ égale à φ en p et q et $\dot{w}$ son gradient qui est continu. Comme u est strictement convexe sur γ, le principe du maximum implique que $u \le w$ sur $\gamma \cap \Omega$ et $\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) \le \dot{w}(0) \le \inf_{\partial\Omega} \dot{w}$.

2. Estimations C^2 sur le bord :

Soit p un point du bord que l'on peut supposer être l'origine. En utilisant la fonction h donnée par (I.1), le principe du maximum et un système de coordonnées normales près de l'origine on montre que dans un voisinage V de l'origine, le bord est donné dans ce système de coordonnées par :

$$(II.4) \qquad \partial\Omega \cap V = \{(x_1, \cdots, x_n) \ , \ x_n = \rho(x_1, \cdots, x_n)\}$$

où

$$(II.5) \qquad \rho(x') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} k_i x_i^2 + 0(|x'|^3) \ , \ k_i > 0 \ , x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}) \ .$$

Les k_i sont les courbures principales du bord à l'origine. On a aussi $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$, pour tous $i, j, k = 1, \cdots, n$.

• Estimation des dérivées tangentielles pures :

Le champ de vecteur $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial n}$ est tangent au bord si $\alpha = 1, \cdots, n-1$. On a alors puisque $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$; $\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} u(0) = \nabla_{\alpha\beta} u(0) = X_\alpha X_\beta \varphi(0) - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{\partial u}{\partial x_n}(0)$. On en déduit donc que $\nabla_{\alpha\beta} u(0)$ est contrôlé.

• Estimation des dérivées secondes mixtes :

En dérivant de manière covariante l'équation $\log\det \nabla_{ij} u = \log f = \Phi$ on obtient

$$(II.6) \qquad u^{ij}\nabla_{ijk} u = \nabla_k \Phi \ , \ k = 1, \cdots, n$$

où $u^{ij} = (\nabla_{ij} u)^{-1}$. Posons $L = u^{ij}\nabla_{ij}$ et $X = \sum_{k=1}^n b_k \nabla_k$ un champ de vecteur régulier. On a alors en utilisant (II.6) et les formules de Ricci

$$\begin{aligned} L(Xu) &= u^{ij}(\nabla_{ij} b_k)\nabla_k u + 2u^{ij}(\nabla_i b_k)\nabla_{kj} u + b_k \nabla_k \Phi \\ &\quad + u^{ij} b_k R^s_{jki} \nabla_s u \end{aligned}$$

où les R^s_{jki} sont les composantes du tenseur de courbure de Riemann et ne dépendent que de g. D'après les estimations C^1 déjà obtenues on pourra écrire : $L(Xu) = A_{ij}u^{ij} + A_0$ où A_0 et A_{ij} sont contrôlées donc $|L(X(u - \varphi))| \leq C_1 + C_2 \sum_{i=1}^n u^{ii}$, d'après la convexité de (u^{ij}). De plus comme $f > 0$ on a :

$$\sum_{i=1}^n u^{ii} \geq n(\det u^{ij})^{1/n} = n f^{-1/n} \geq C_3 > 0 \ ,$$

d'où

$$|L(X(u-\varphi))| \leq C_4 \sum_{i=1}^{n} u^{ii} \ .$$

D'après la stricte convexité de la fonction h donnée par (I.1) on obtient pour λ positif assez grand et X tangent au bord :

$$\lambda Lh - |L(X(u-\varphi))| \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

$$X(u-\varphi)_{|\partial\Omega} = h_{|\partial\Omega} = 0 \ ,$$

le principe du maximum de Hopf et $X = \partial_\alpha + \rho_\alpha \partial_n$ impliquent

$$|\nabla_{n\alpha} u(0)| \leq C \ , \ \alpha = 1, \cdots, n-1 \ .$$

- **Estimation des dérivées normales pures :**

Comme précédemment soit p un point du bord que l'on suppose être l'origine. On va travailler dans un système de coordonnées particulières dans un voisinage V de l'origine. Soit $\nu(p)$ la normale intérieure unitaire (relativement à g) au bord en $p \in V \cap \partial\Omega$. Considérons d'abord le cas $n \geq 3$. Soit $X_1, \cdots, X_{n-1}$ une base de l'espace tangent du bord à l'origine. Un point $p \in \partial\Omega$ sera décrit par ses coordonnées géodésiques c'est à dire $p = \exp_0 \sum_{i=1}^{n-1} x_i X_i$. Considérons $H : \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+ \to V$ définie par $H(x_1, \cdots, x_n) = \exp_p x_n \nu(p)$ où $p = \exp_0 \sum_{i=1}^{n-1} x_i X_i$.

H est un difféomorphisme local d'un voisinage $W_0 \times [0, \varepsilon[$ de l'origine dans $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+$, dans un voisinage V de l'origine dans $\bar{\Omega}$. Dans ce système de coordonnées $\partial\Omega \cap V = \{(x_1, \cdots, x_n), x_n = 0\}$. Si $n = 2$ supposons le bord donné par une courbe $\alpha(t)$ paramétrée par l'abscisse curviligne t, on considère alors $H(t, x_2) = \exp_{\alpha(t)} x_2 \nu(\alpha(t))$. Dans ces coordonnées la métrique g et les symboles de Christoffel vérifient :

$$(II.6) \qquad \begin{cases} g = dx_n^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} dx_i dx_j \\ \Gamma_{ij}^k(0) = 0 \ , \ 1 \leq i,j,k \leq n-1 \ , \ \Gamma_{ij}^n(0) = k_i \delta_{ij}, 1 \leq i,j \leq n-1, \\ \Gamma_{in}^k(0) = -k_i \delta_{ik} \ , \ 1 \leq i,k \leq n-1 \ , \ \Gamma_{in}^n(0) = 0, 1 \leq i \leq n-1, \\ \Gamma_{nn}^k(x) = 0 \ , \ 1 \leq k \leq n, x \in V \ . \end{cases}$$

Dans ces coordonnées on a $\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(0) = \nabla_{nn} u(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(0)$. Remarquons que notre équation reste invariante par ce changement de coordonnées, donc d'après les estimations précédentes pour majorer $\nabla_{nn} u(0)$ il suffit de minorer uniformément $\det(\nabla_{ij} u(0))_{1 \leq i,j \leq n-1}$. On va montrer pour cela l'estimation :

$$(II.7) \qquad \nabla_{11} u(0) \geq C_0 > 0$$

D'après (II.6) on a :

$$\nabla_{11}u(0) = u_{11}(0) - k_1 u_n(0) = \varphi_{11}(0) - k_1 u_n(0)$$

Comme on n'a pas de contrôle précis sur $\varphi_{11}(0)$, on va remplacer u par $u+w$ où w sera choisie telle que $\nabla_{11}v(0) = \nabla_{11}u(0) = -k_1 v_n(0)$ et on travaillera avec v.

Lemme II.1.— *Il existe une fonction w convexe et régulière définie dans un voisinage de l'origine et vérifiant :*

$$(II.8) \quad \begin{cases} w(0) = -\varphi(0)\ ,\ w_i(0) = -\varphi_i(0)\ ,\ i = 1,\cdots,n-1\ ,\ w_{11}(0) = -\varphi_{11}(0) \\ \nabla_{11}w(0) = 0\ ,\ \nabla_{ij}w(0) = \delta_{ij}, 2 \le i,j \le n, \nabla_{1j}w(0) = 0, 2 \le j \le n\ . \end{cases}$$

Indication pour la preuve : Elle se base sur la résolution dans un petit voisinage de l'origine d'un problème de Cauchy analytique. ∎

D'après ce lemme on a :

$$\nabla_{11}u(0) = \nabla_{11}v(0) = v_{11}(0) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{11}^{k}(0)v_k(0) = v_{11}(0) - k_1 v_n(0) = -k_1 v_n(0)$$

Pour montrer (II.7), il nous suffit donc de montrer l'estimation uniforme :

$$(II.9) \qquad v_n(0) \le -\varepsilon_0 < 0\ .$$

Pour montrer (II.9) on va construire une sur solution locale appropriée pour (I.2).

Lemme II.2.— *Pour $\delta > 0$ assez petit, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une fonction régulière ρ définie dans $V = \{(x_1,\cdots,x_n), 0 \le x_n < \delta\ , x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k_i}{4}x_i^2 < \delta\}$ tels que*

$$i) \qquad \rho(0) = 0\ , \frac{\partial \rho}{\partial x_n}(0) = -\varepsilon_0$$

$$ii) \qquad \det \nabla_{ij}\rho < \det \nabla_{ij}v \quad \textit{dans} \quad V, v \le \rho \quad \textit{sur} \quad \partial V\ .$$

Montrons d'abord comment ce lemme implique (II.9). Pour cela on utilise cette forme plus faible du principe du maximum.

Lemme II.3.— *Soient dans ouvert borné V, une fonction convexe v (i.e. $(\nabla_{ij}v) \ge 0$) et une fonction régulière ρ telles que :*

$$\begin{cases} \det \nabla_{ij}v(x) > \det \nabla_{ij}\rho(x) \quad \textit{dans} \quad V \\ v \le \rho \quad \textit{sur} \quad \partial V\ , \end{cases}$$

alors $v \le \rho$ dans V.

Preuve : Remarquons que ρ n'est pas supposée convexe. Ce lemme se démontre par l'absurde. ∎

Supposons que l'on ait démontré le lemme (II.2), on a alors d'après le lemme II.3, $v(0,x_n) \leq \rho(0,x_n)$ pour $x_n > 0$ et comme $v(0,0) = \rho(0,0) = 0$ on en déduit que $\frac{\partial v}{\partial x_n}(0) \leq \frac{\partial \rho}{\partial x_n}(0) = -\varepsilon_0$, ce qui démontre (II.9).

Preuve du lemme II.2 : En posant $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ on a d'après (II.8) (conditions sur w)

$$(II.10) \quad v(x',0) = \varphi(x') + w(x',0) = \sum_{j=2}^{n-1} a_j x_1 x_j + 0(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^4) + \frac{bk_1}{3} x_1^3 + 0(\sum_{j=2}^{n-1} x_j^2)$$

où les constantes a_j et b sont fixées et ne dépendent que des données et les 0 sont contrôlés. On pose pour $\varepsilon_0 = \delta^{3/2}$ et $x = (x', x_n) \in V$:

$(II.11)$

$$\rho(x',x_n) = -\varepsilon_0 x_n + \sum_{j=2}^{n-1} a_j x_1 x_j + B \sum_{j=2}^{n-1} x_j^2 + \frac{\delta}{2K}(bx_1 + \frac{K}{\delta}(x_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{4} x_j^2))^2 + b\frac{k_1}{12} x_1^3 \ .$$

où B et K sont de grandes constantes que l'on choisira ultérieurement. Il est facile de voir que pour $\delta < 1$, B et K assez grands en fonction des données, $\rho \geq v$ sur ∂V. K est alors définitivement fixé. La suite de la preuve sera consacrée à prouver pour B assez grand et δ assez petit

$$(II.12) \qquad \det \nabla_{ij} \rho \leq C\delta^{1/2} \quad \text{dans} \quad V \ .$$

Comme f est strictement positive dans $\bar{\Omega}$, on aura alors en prenant encore une fois δ assez petit, $\det \nabla_{ij}\rho \leq C\delta^{1/2} < \min_{\bar{\Omega}} f \leq \det \nabla_{ij} u \leq \det \nabla_{ij} v$, car w est convexe.

Preuve de (II.12) :

Posons $\lambda = \frac{\delta}{K}$ (λ est petit) et $\theta = \lambda\rho$. On a alors

$(II.13)$

$$\theta = -\varepsilon_0 \lambda x_n + \lambda \sum_{j=2}^{n-1} a_j x_1 x_j + \lambda B \sum_{j=2}^{n-1} x_j^2 + \frac{1}{2}(\lambda b x_1 + x_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{4} x_j^2)^2 + \frac{1}{12} b k_1 x_1^3 \ .$$

et

$$(II.12) \Leftrightarrow \det \nabla_{ij}\theta \leq C\lambda^n \delta^{1/2} \ .$$

On commence par introduire quelques notations. On notera $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\lambda}, \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{d\lambda^2}$. Si $I = (i_1 j_1, \cdots, i_k j_k)$ est un multiindice de longueur $|I| = k$, on pose $\nabla_I \theta = \nabla_{i_1 j_1}\theta \cdots \nabla_{i_k j_k}\theta$. On pose aussi $F(u_{ij}) = \det u_{ij}$ et $\frac{\partial^{|I|} F}{\partial u_I} = \frac{\partial}{\partial u_{i_1 j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial u_{i_k j_k}} F$. Comme F est la fonction déterminant, $\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}$ est indépendant de $u_{i\ell}$ et $u_{\ell j}$ pour $\ell = 1, \cdots, n$. D'après la formule de Taylor on a :

$$(II.14) \qquad \det \nabla_{ij}\theta = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(\frac{d}{d\lambda})^k [F(\nabla_{ij}\theta(\lambda))]_{|\lambda=0} \lambda^k + \lambda^{n+1} G(x,\lambda) \ .$$

On va donc choisir δ et B tels que le premier terme du second membre de (II.14) soit majoré par $C\lambda^n \delta^{1/2}$.

Lemme II.4.—

$$(\frac{d}{d\lambda})^k[F(\nabla_{ij}\theta)(\lambda)]_{|\lambda=0} = \sum_{|I|=k} \frac{\partial^k F}{\partial u_I}(\nabla_{ij}\theta(0))\nabla_I\dot\theta(0) + \frac{k(k-1)}{2}\nabla_{11}\ddot\theta(0)$$

$$\sum_{|I|=k-2}\frac{\partial^{k-1}F}{\partial u_{11}\partial u_I}(\nabla_{ij}\theta(0))\nabla_I\dot\theta(0) + \sum_{\substack{q=q_1+q_2\\ q_1+2q_2=k\\ q_2\geq 1}} \frac{k!}{q_1!q_2!}\sum_{\substack{|I_j|=q_j\\ I_2\neq(11)}} \frac{\partial^q F}{\partial u_{I_1}\partial u_{I_2}}\nabla_{ij}\theta(0)\frac{\nabla_{I_2}\ddot\theta(0)}{2^{q_2}} .$$

Indication pour la preuve : On utilise la formule de Faa-Di Bruno

$$(\frac{d}{d\lambda})^k[F(\nabla_{ij}\theta(\lambda))] = \sum_{\substack{q=q_1+\cdots+q_k\\ q_1+2q_2+\cdots+kq_k=k}} \frac{k!}{q_1!\cdots q_k!}$$

$$\sum_{|I_j|=q_j}\frac{\partial^q F}{\partial u_{I_1}\cdots\partial u_{I_k}}(\nabla_{ij}\theta)\frac{\nabla_{I_1}\dot\theta}{1!^{q_1}}\frac{\nabla_{I_2}\ddot\theta}{2!^{q_2}}\cdots\frac{\nabla_{I_k}\dot\theta^{(k)}}{k!^{q_k}} . \blacksquare$$

D'après (II.13) on a

$$(II.15)\qquad \begin{cases} \theta(0) = \frac{1}{2}(x_n + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{4}x_j^2)^2 \\ \dot\theta(0) = -\varepsilon_0 x_n + \sum_{j=2}^{n-1} a_j x_1 x_j + B\sum_{j=2}^{n-1} x_j^2 + b x_1(x_n + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{4}x_j^2) \\ + \frac{1}{12}bk_1x_1^3 . \\ \ddot\theta(0) = b^2x_1^2 . \end{cases}$$

En utilisant la propriété (II.6) sur les symboles de Christoffel un calcul simple permet de voir que :

$$(II.16)\qquad \begin{cases} \nabla_{ij}\theta(0) = \frac{k_ik_j}{4}x_ix_j - \frac{k_i}{2}\delta_{ij}\Gamma + \sigma_{ij} \ , \ 1\leq i,j\leq n-1 \\ \nabla_{in}\theta(0) = \frac{k_i}{2}x_i + \sigma_{in} \ , \ 1\leq i\leq n-1 \\ \nabla_{nn}\theta(0) = 1 \end{cases}$$

où $\Gamma = x_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{4}x_i^2$, $\sigma_{ij} = 0(\Gamma^{3/2})$. où $\Gamma = x_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{4}x_i^2$, $\sigma_{ij} = 0(\Gamma^{3/2})$.

On a alors :

Lemme II.5.— *Pour $|I| \leq n-2$, on a*

$$\frac{\partial^{|I|}F}{\partial u_I}(\nabla_{ij}\theta(0)) = C_I\Gamma^{n-|I|-1} + 0(\Gamma^{n-|I|-1+1/2})$$

où C_I est une constante réelle. De plus si $|I| = n-2$ on a $C_I < 0$.

Preuve : Le résultat s'obtient aisément en remplaçant $(\nabla_{ij}\theta)(0)$ par la matrice (d_{ij}) définie par :

$$d_{ij} = -\frac{k_i}{2}\delta_{ij}\Gamma + \sigma_{ij}\ ,\ 1 \leq i,j \leq n-1, d_{in} = d_{nj} = 0, 1 \leq i,j \leq n-1 \quad \text{et} \quad d_{nn} = 1\ .$$

où (d_{ij}) s'obtient à partir de $(\nabla_{ij}\theta)(0)$ en ajoutant aux $(n-1)$ premières lignes et $(n-1)$ premières colonnes une combinaison linéaire de la dernière. ∎

Ensuite en utilisant (II.15) on obtient pour $\dot\theta(0)$:

$$(II.17) \quad \begin{cases} \nabla_{11}\dot\theta(0) = bk_1x_1 + \gamma_{11}\ ,\ \nabla_{1j}\dot\theta(0) = a_j + \frac{1}{2}bk_jx_j + \gamma_{1j}\ ,\ 1 \leq j \leq n-1 \\ \nabla_{1n}\dot\theta(0) = b + B0(\Gamma^{1/2})\ ,\ \nabla_{in}\dot\theta(0) = B0(\Gamma^{1/2}), 2 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

où $\gamma_{ij} = B0(\Gamma) + 0(\delta^{3/2})$.

Maintenant on utilise (II.14), (II.17) et les lemmes (II.4) et (II.5) pour calculer $\det \nabla_{ij}\theta$. On note

$$A_k = \lambda^k \left[\sum_{|I|=k} \frac{\partial^k F}{\partial u_I}(\nabla_{ij}\theta(0))\nabla_I\dot\theta(0) + k(k-1)(b^2+0(\Gamma))\right.$$

$$\left.\sum_{|I|=k-2} \frac{\partial^{k-1}F}{\partial u_I \partial u_{11}}(\nabla_{ij}\theta(0)) \times \nabla_I\dot\theta(0)\right]$$

car $\nabla_{11}\ddot\theta = 2b^2 + 0(\Gamma)$

Cas 1 : $k \leq n-3$. En prenant $\Gamma \leq 1$ et $B \geq 1$ on obtient d'après (II.17) $|\nabla_{ij}\dot\theta(0)| \leq C_0B$, donc d'après le lemme II.5

$$(II.18) \qquad |A_k| \leq C_k\lambda^kB^k\Gamma^{n-k-1}\ ,\ 0 \leq k \leq n-3\ .$$

Cas 2 : $k = n-2$ **:** Regardons d'abord le premier terme. Le terme le plus important est celui pour lequel $I = (22, 33, \cdots, n-1n-1)$ on a alors

$$\nabla_I\dot\theta(0) = \prod_{j=2}^{n-1}(2B + 0(\Gamma^{1/2}) + \gamma_{jj}) = (2B)^{n-2} + C(B))(\Gamma^{1/2}) + C(B)\delta^{3/2}$$

et $\frac{\partial^{n-2}F}{\partial u_I} = -\frac{k_1}{2}\Gamma + 0(\Gamma^{3/2})$. Les autres sont majorés par $CB^{n-3}\Gamma$. Le deuxième terme de A_{n-2} est borné par $CB^{n-4}\Gamma^2\lambda^{n-2}$. On a alors

$$(II.19)\quad A_{n-2} = -\frac{k_1}{2}(n-2)!\lambda^{n-2}\Gamma(2B)^{n-2}(1+0(\frac{1}{B})+C(B)0(\Gamma^{1/2})+C(B)\delta^{3/2})$$

$$= -C_n\lambda^{n-2}\Gamma(2B)^{n-2}(1+0(\frac{1}{B})+C(B)0(\Gamma^{1/2})+C(B)\delta^{3/2})\ .$$

Cas 3 : $k = n-1$ **:** On a :

$$\sum_{|I|=n-1}\frac{\partial^{n-1}F}{\partial u_I}(\nabla_{ij}\theta(0))\nabla_I\dot\theta(0) = (n-1)!\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(\nabla_{ij}\dot\theta(0))\nabla_{ij}\theta(0)\ .$$

Pour $i,j = 1,\cdots,n-1$ on a $|\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(\nabla_{ij}\dot\theta(0)\nabla_{ij}\theta(0)| \le C(B)\Gamma$

Il ne nous reste plus qu'à calculer :

$$(1) = 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial u_{in}}(\nabla_{ij}\dot\theta(0))\nabla_{in}\theta(0) + \frac{\partial F}{\partial u_{nn}}(\nabla_{ij}\dot\theta(0))\nabla_{nn}\theta(0)\ .$$

pour $i = 1$ on a $\frac{2\partial F}{\partial u_{1n}}(\nabla_{ij}\dot\theta(0))\nabla_{1n}\theta(0) = -bk_1x_1(2B)^{n-2} + C(B)0(\Gamma)$.

pour $i = 2,\cdots,n-1\,\frac{2\partial F}{\partial u_{in}}(\nabla_{ij}\dot\theta(0))\nabla_{in}\theta(0) = (2B)^{n-3}bk_ja_jx_j + C(B)0(\Gamma)$

Finalement $\nabla_{nn}\theta(0) = 1$ et $\frac{\partial F}{\partial u_{nn}}(\nabla_{ij}\dot\theta(0)) = bk_1x_1(2B)^{n-2}$
$-\sum_{j=2}^{n-1}(a_j+\frac{1}{2}bk_jx_j)^2(2B)^{n-3} + C(B)0(\Gamma)$.

On obtient donc

$$(1) = -(2B)^{n-3}\sum_{j=2}^{n-1}(a_j^2+\frac{1}{4}b^2k_j^2x_j^2) + C(B)0(\Gamma)\ .$$

Le deuxième terme de A_{n-1} est d'après le Lemme (II.5) borné par $CB^{n-3}\Gamma^{n-(n-2)-1}$ $= CB^{n-3}\Gamma$. D'où

$$(II.20)\qquad A_{n-1} = -(n-1)!\lambda^{n-1}.(2B)^{n-3}\sum_{j=2}^{n-1}(a_j^2+\frac{1}{4}b^2k_j^2x_j^2) + C(B)0(\Gamma)\ .$$

Cas 4 : $k = n$ **:**

On a

$$A_n = \lambda^n[\underbrace{n!\det\nabla_{ij}\dot\theta(0)}_{(1)} + \underbrace{n(n-1)(b^2+0(\Gamma))\sum_{|I|=n-2}\frac{\partial^{n-1}F}{\partial u_I\partial u_{11}}(\nabla_{ij}\theta(0))\nabla_I\dot\theta(0)]}_{2}$$

Considérons le terme (1). Si on développe $\det \nabla_{ij}\dot{\theta}(0)$ par rapport à la 1ère colonne tous les déterminants sont bornés par $C(B)\Gamma^{1/2}$ sauf le premier que l'on développe par rapport à la dernière colonne, on obtient alors :

$$(1) = n!(-1)^{n+1}b.(-1)^n b(2B)^{n-2} + C(B)0(\Gamma^{1/2}) = -n!b^2(2B)^{n-2} + C(B)0(\Gamma^{1/2})$$

Le terme principal dans (2) s'obtient pour $I = (22, 33, \cdots, n-1n-1)$, il est égal

$$n(n-1)(b^2 + 0(\Gamma))\nabla_{22}\dot{\theta}(0)\cdots\nabla_{n-1n-1}\dot{\theta}(0)(n-2)! = n!(2B)^{n-2}b^2 + C(B)0(\Gamma^{1/2}) \ ,$$

tous les autres sont $0(\Gamma^{1/2})$. On obtient alors :

$$(II.21) \qquad A_n = C(B)0(\Gamma^{1/2})\lambda^n \ .$$

En faisant la somme on obtient d'après (II.18), (II.19), (II.20) et (II.21)

$$\det \nabla_{ij}\theta \leq \underbrace{-C'_n\lambda^{n-2}B^{n-2}\Gamma(1+0(\frac{1}{B}) + C(B)0(\Gamma^{1/2}) + C(B)\delta^{3/2})}_{(1)}$$

$$+\sum_{k=0}^{n-3}\lambda^k \underbrace{C_kB^k\Gamma^{n-k-1}}_{(2)} \underbrace{-\lambda^{n-1}(2B)^{n-3}\sum_{j=2}^{n-1}(a_j^2 + \frac{1}{4}b^2k_j^2x_j^2)}_{(3)}$$

$$+\underbrace{C(B)\lambda^{n-1}\Gamma}_{(4)} + \underbrace{C(B)\lambda^n\Gamma^{1/2}}_{(5)} + \underbrace{C(B)\lambda^{n+1}}_{(6)}$$

Comme $\Gamma \leq \delta$ et $\lambda = \frac{\delta}{K}$, les termes (5) et (6) sont bornés par $C(B)\lambda^n\delta^{1/2}$. Le terme (3) est négatif.

En choisissant d'abord B assez grand puis δ assez petit on a :

$$\det \nabla_{ij}\theta(\lambda) \leq -\frac{3}{10}C'_n\lambda^{n-2}B^{n-2}\Gamma + C(B)\lambda^n\delta^{1/2} \leq C(B)\lambda^n\delta^{1/2} \leq C(B)\lambda^n\delta^{1/2} \ .$$

Ce qui termine la preuve du lemme (II.2).

III Estimation des dérivées secondes à l'intérieur :

Notons Δ l'opérateur de Laplace Beltrami associé à la métrique g, $\Delta = g^{k\ell}\nabla_{k\ell}$. On considère

$$(II.22) \qquad w = \log \Delta u + \lambda h \ ,$$

où λ est une constante positive à choisir et h est donnée par (I.1). Soit p un point où w atteint son maximum. Si $p \in \partial\Omega$, d'après le paragraphe précédent, on aura une estimation uniforme dans $\bar{\Omega}$ sur toutes les dérivées secondes. On supposera donc que $p \in \Omega$ et on considerera dans un voisinage de p un système de coordonnées normales. Rappelons que l'on a alors :

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} \ , \ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) = 0 \ , \ \Gamma_{ij}^k(p) = 0 \ , \ 1 \leq i, j, k \leq n \ .$$

Donc en p, les dérivées covariantes seront les dérivées usuelles. On peut aussi supposer que $(\nabla_{ij}u)(p)$ est diagonale. Posons $L = u^{ij}\nabla_{ij}$. Il est facile de voir qu'en p on a :

$$(II.23) \qquad \Delta u L w = \underbrace{L\Delta u}_{(1)} - \underbrace{\frac{u^{ii}(\Delta u)_i^2}{\Delta u}}_{(2)} + \underbrace{\lambda \Delta u L h}_{(3)}$$

Tout d'abord d'après (I.1)

$$(II.24) \qquad (3) \geq C_0 \lambda \Delta u \sum_{i=1}^n u^{ii} \ .$$

Pour calculer le terme (1) on dérive deux fois l'équation $\log\det \nabla_{ij}u = \Phi$ et on obtient alors :

$$u^{ij}\nabla_{k\ell ij}u = \nabla_{k\ell}\phi - \nabla_\ell(u^{ij})\nabla_{ijk}u + u^{ij}(\nabla_{k\ell ij}u - \nabla_{ijk\ell}u).$$

En multipliant par $g^{k\ell}$ et en sommant on obtient en p :

$$(II.25) \qquad L\Delta u = \underbrace{\Delta\phi}_{(a)} \underbrace{-g^{kk}\nabla_k(u^{ij})\nabla_{ijk}}_{(b)} u + u^{ii} \underbrace{g^{kk}(\nabla_{kkii}u - \nabla_{iikk}u)}_{(c)} \ .$$

D'après les formules de Ricci, $\nabla_{kkii}u - \nabla_{iikk}$ est une combinaison linéaire de ∇_{pq} et $\nabla_\ell u$ avec des coefficients qui ne dépendent que de g. On a donc

$$(II.26) \qquad |(a) + (c)| \leq C(1 + \Delta u \sum_{i=1}^n u^{ii} + \sum_{i=1}^n u^{ii}).$$

Calculons le terme (b). En p on a :

$$(b) = g^{kk}u^{ii}u^{jj}(\nabla_{ijk}u)^2 \ ,$$

car $\nabla_k(u^{ij}) = -u^{ir}u^{sj}\nabla_{rsk}u = -u^{ii}u^{jj}\nabla_{ijk}u.$

En utilisant l'inégalité

$$u^{ii}u^{jj}(\nabla_{ijk}u - \frac{1}{\Delta u}u_{ik}(\Delta u)_j)^2 \geq 0$$

et $u^{kk}u_{kk} = 1$ on obtient

$$(b) \geq 2g^{kk}u^{jj}\nabla_{kjk}u\frac{(\Delta u)j}{\Delta u} - u^{jj}\frac{(\Delta u)_j^2}{\Delta u}$$

D'après les formules de Ricci on a :

$$g^{kk}\nabla_{kjk}u = g^{kk}\nabla_{kkj}u + R = (\Delta u)_j + R$$

où R est une combinaison linéaire des u_ρ donc contrôlée. Il en résulte que

$$(II.27) \qquad (b) \geq u^{ij}\frac{(\Delta u)_j^2}{\Delta u} + 2Ru^{jj}\frac{(\Delta u)_j}{\Delta u}$$

(II.25) à (II.27) impliquent :

$$(II.28) \qquad L\Delta u \geq u^{jj}\frac{(\Delta u)_j^2}{\Delta u} + 2Ru^{jj}\frac{(\Delta u)_j}{\Delta u} - C_0 - C_1\Delta u\sum_{i=1}^{n} u^{ii}$$

Or p est un point maximum pour w, on a donc en p

$$(II.29) \qquad \nabla_j w = 0 = \frac{(\Delta u)_j}{\Delta u} + \lambda h_j = 0\ .$$

On obtient alors d'après (II.23), (II.24), (II.28) et (II.29) pour $\lambda \geq 1$:

$$\Delta u L w \geq -C - C\lambda\sum_{j=1}^{n} u^{jj} - C\Delta u\sum_{j=1}^{n} u^{jj} + C_0\lambda\Delta u\sum_{j=1}^{n} u^{jj}\ .$$

Or (u^{ij}) est strictement convexe donc :

$$\Delta u L w \geq -C\sum_{j=1}^{n} u^{jj} - C\lambda\sum_{j=1}^{n} u^{jj} + (C_0\lambda - C)\Delta u\sum_{j=1}^{n} u^{jj}\ .$$

On choisit alors λ assez grand tel que $C_0\lambda \geq 2C$ et on utilise le fait qu'en p, $Lw \leq 0$ pour conclure.

Comme on a montré des majorations uniformes pour la norme C^2 dans $\bar{\Omega}$ des solutions, il en résulte une minoration uniforme des valeurs propres, ce qui implique que le linéarisé de l'équation (I.2) est uniformément elliptique. On applique alors les résultats d'Evans [E] et Krylov [K] pour obtenir les estimations $C^{2,\alpha}$ dans $\bar{\Omega}$, ce qui achève la preuve du théorème I.1.

Références :

[A] Atallah : Problème de Dirichlet pour des équations de Monge-Ampère réelles relatives à des métriques Riemanniennes, à paraître.

[CNS] Caffarelli, Nirenberg, Spruck : The Dirichlet problem for non linear second order elliptic equations I, Comm. Pure Appl. Math. 37, (1984), 369-402.

[C] Corona : Monge-Ampère equations on convex regions of the plane, Comm. in PDE, 16, (1), (1991), 43-57.

[E] Evans : Classical solutions of fully non linear convex second order elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 25, (1982), 333-363.

[G-S] Guan-Spruck : Boundary value problems on S^n for surfaces of constant Gauss curvature, Annals of Math. 138, (1993), 601-624.

[G.T] Gilbarg-Trudinger : Elliptic partial différential equations of second order, Springer-Verlag 1983.

[K] Krylov : Boundedly non homogeneous elliptic and parabolic equations, Math. USSR Izvestia, Vol. 22 n°1, (1984), 67-97.

[H] Hong : Dirichlet problems for general Monge-Ampère equations, Math Zeits 209, (1992) 289-306.

Université Paris Sud
Département de Mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay cedex