Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

Y. Brenier

Équations de moment et conditions d'entropie pour des modèles cinétiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 22, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A22_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

EQUATIONS DE MOMENT ET CONDITIONS D'ENTROPIE POUR DES MODELES CINETIQUES

Y. BRENIER

Exposé n° XXII

11 Avril 1995

EQUATIONS DE MOMENTS ET CONDITIONS D'ENTROPIE POUR DES MODELES CINETIQUES

*Yann Brenier**

1. Introduction

Dans cet exposé, on étudie plusieurs modèles cinétiques, avec variable spatiale $x \in R^d$ et variable cinétique scalaire $v \in R$, d'inconnues $f(t,x,v) \geq 0$, obtenues à partir d'opérateurs de transport linéaires, typiquement

$$\partial_t + a(v).\nabla_x, \tag{1}$$

ou plus généralement de transport-diffusion de la forme

$$\partial_t + a(v).\nabla_x - r(v)\Delta, \quad r(v) \geq 0, \tag{2}$$

et de termes de relaxation forçant les densités $f(.,.,v)$ à ne prendre que deux valeurs 0 et $\beta > 0$ sur au plus K intervalles disjoints de R, les paramètres β et K étant fixés. On considérera aussi le cas où les densités sont forcées à être la somme d'au plus K masses de Dirac, ce qui correspond au cas limite $\beta = +\infty$. Comme application de ces modèles, on obtiendra des systèmes de K lois de conservation non linéaires permettant de reconstruire les solutions multivoques de lois de conservation scalaires

$$\partial_t u + \nabla_x(A(u)) = 0, \tag{3}$$

tant qu'elles ne développent pas plus de K branches *sans* recourir à l'espace des phases, ce qui ouvre une perspective pour la résolution de problèmes analogues en géophysique, imagerie et physique des plasmas [TS],[EFO],[Co]. Une autre application est la reformulation du système des gaz sans pression avec particules collantes [Ze],[SAF],[Si],[Bo],[BG] en termes de solutions entropiques de lois de conservation scalaires générales.

*Université Paris 6 and ENS, DMI, 45 rue d'ULM, 75230 Paris Cedex.

2. Densités à K branches

On dit d'une mesure positive $f(v)$ sur R qu'elle a K branches (de hauteur β) si elle vaut β fois la fonction caractéristique de la réunion d'au plus K intervalles bornés disjoints. On utilisera la même terminologie dans le cas $\beta = +\infty$ en supposant cette fois que f est combinaison linéaire positive d'au plus K masses de Dirac. Notons

$$m_k = \int_R v^k f(dv), \quad k = 0, ..., 2K-1 \tag{4}$$

les $2K$ premiers moments de f et appelons vecteur moment $m \in R^{2K}$ le vecteur de composantes m_k. On a alors la caractérisation remarquable

Theoreme 2..1 *Soit f une mesure à K branches de hauteur $\beta \in]0, +\infty]$, de vecteur moment $m \in R^{2K}$. Alors, pour toute fonction régulière θ sur R de dérivée d'ordre $2K$ partout > 0, pour toute mesure g sur R telle que $0 \leq g \leq \beta$, $\int |\theta(v)| g(dv) < +\infty$, et de vecteur moment m,*

$$\int \theta(v) g(dv) \geq \int \theta(v) f(dv),$$

avec égalité seulement si $f = g$ (en tant que mesure).

Esquisse de la preuve

On introduit $I(m)$ comme l'infimum de $\int \theta g$ pour toutes les mesures g à valeurs dans $[0, \beta]$ de vecteur moment m. Par dualité, on obtient que

$$I(m) = \sup_{\lambda \in R^{2K}} \inf_{0 \leq g \leq \beta} [\int (\theta - \sum_{k=0}^{2K-1} \lambda_k v^k) g(v) dv + \sum_{k=0}^{2K-1} \lambda_k v^k m_k]$$

et g est optimal si et seulement s'il existe $\lambda \in R^{2K}$ tel que

$$g(v) = \beta H(\sum_{k=0}^{2K-1} \lambda_k v^k - \theta(v)), \tag{5}$$

où H est la fonction d'Heaviside, dans le cas $\beta < +\infty$, et

$$g(v) = \delta(\sum_{k=0}^{2K-1} \lambda_k v^k - \theta(v)), \tag{6}$$

dans le cas $\beta = +\infty$ (ce qui suppose que la fonction en argument de δ est négative ou nulle sur la droite réelle). Comme la dérivée d'ordre $2K$ de θ est strictement positive, par hypothèse, la fonction

$$v \to \sum_{k=0}^{2K-1} \lambda_k v^k - \theta(v)$$

ne peut avoir plus de $2K$ zéros (cas $\beta < +\infty$) ni plus de K maxima de valeurs 0 (cas $\beta = +\infty$). Ainsi, on voit que g n'est optimale que si c'est une mesure à K branches de hauteur β. Ceci assure, en retour, qu'une telle mesure est aussi optimale pour n'importe quelle autre fonction θ de dérivée d'ordre $2K$ partout strictement positive. (On pourra en effet toujours trouver d'autres coefficients λ_k permettant de réecrire, pour ce nouveau choix de θ, g sous la forme (5) si $\beta < +\infty$ ou (6) si $\beta = +\infty$.)

Remarque

L'étude précédente montre en fait qu'on peut associer, de façon unique, à n'importe quel vecteur moment $m \in R^{2K}$, attaignable (c'est-à-dire tel qu'on puisse écrire

$$m_k = \int v^k f(dv)$$

pour une mesure f sur R à valeurs dans $[0, \beta]$), une unique mesure $g(v)$ à K branches de hauteur β, notée $M_{K,\beta}(m, v)$ ou, en abrégé, $M(m, v)$, caractérisée par

$$\int v^k M(m, dv) = m_k, \quad k = 0, ..., 2K-1,$$

$$\int \theta(v) M(m, dv) \leq \int \theta(v) f(dv)$$

pour toute mesure f à valeurs dans $[0, \beta]$ de vecteur moment m et toute fonction θ de dérivée d'ordre $2K$ partout strictement positive. On a ainsi une notion de "maxwellienne" associée à un vecteur moment comme en théorie cinétique des gaz. On remarque aussi que si m est associée à une mesure f dont le support est inclus dans un intervalle borné $[-R, +R]$, il en sera de même du support de $M(m, .)$. (Il suffit de considérer une suite de fonctions θ tendant vers $+\infty$ hors de $[-R, +R]$.)

3. Modéles cinétiques avec relaxation sur les densités à K branches

On peut (en suivant l'exemple des modèles "BGK" de la cinétique des gaz) construire un modèle cinétique à partir de l'opérateur (2) avec relaxation sur les densités à K branches, en considérant l'équation non linéaire

$$\partial_t f + a(v).\nabla_x f - r(v)\Delta f = \frac{1}{\eta}(M_{K,\beta}(m(f)) - f), \tag{7}$$

où $\eta > 0$ est le "temps de relaxation". On suppose ici que $a(v) \in R^d$ et $r(v) \geq 0$ sont des fonctions mesurables localement bornées de $v \in R$. On s'intéresse maintenant à l'existence d'une "limite hydrodynamique" $\eta \to 0$, lorsque la donnée initiale f^0 est "bien préparée", c'est-à-dire, qu'en chaque x, $f^0(x,v)$ est une mesure à K branches et ne dépend pas de η. On suppose en outre que le support en v de f^0 est contenue dans un intervalle borné fixe $[-R,+R]$. Dans le cas $\beta < +\infty$, on montre (en s'inspirant des méthodes de [LPT],[LPT2])

Theoreme 3..1 *Si l'opérateur (2) n'est pas dégénéré au sens de (11) (voir plus bas), les solutions $f_\eta(t,x,v)$ de l'équation (7) admettant $f^0(x,v)$ pour donnée initiale ont une valeur d'adhérence (pour la convergence $L^\infty(R_+ \times R^d \times R)$ faible-*) $f(t,x,v)$ qui est solution de*

$$\partial_t f + a(v).\nabla_x f - r(v)\Delta f + (\partial_v)^{2K}\mu = 0 \tag{8}$$

où $\mu(t,x,v) \geq 0$ est une mesure de Radon, multiplicateur de la contrainte imposée pour presque tout (t,x)

$$f(t,x,.) = M_{K,\beta}(.,m(f(t,x,.))). \tag{9}$$

De plus, les moments

$$m_k(t,x) = \int v^k f(t,x,v)dv, \quad k = 0,...,2K-1$$

sont solutions du système

$$\partial_t m_k + \nabla_x.(A_k(m)) - \Delta R_k(m) = 0, \tag{10}$$

où

$$A_k(m) = \int a(v)v^k M_{K,\beta}(m,v)dv, \quad R_k(m) = \int r(v)v^k M_{K,\beta}(m,v)dv.$$

Une démonstration détaillée est donnée dans [BC], dans le cas particulier $d = 1$, $a(v) = v$ et $r(v) = 0$. La condition de non dégénérescence sur (2) est la condition microlocale permettant d'appliquer les lemmes de moyenne de [LPT],[LPT2], c'est-à-dire pour chaque $(\tau, \xi) \in S^d$, l'ensemble

$$\{v \in R, \ \ i(\tau + a(v).\xi) + r(v)|\xi|^2 = 0\} \tag{11}$$

est de mesure de Lebesgue nulle.

Remarques

La question de l'unicité des solutions de (8),(9) est ouverte.
La question de l'existence est largement ouverte dans le cas $\beta = +\infty$ (voir le prochain paragraphe) car on ne peut plus utiliser les lemmes de moyenne faute d'estimation L^∞ sur les solutions f_η.
Comme application de ce théorème, citons la possibilité de récupérer la solution multivoque de (3) tant qu'elle ne développe pas trop de branches en résolvant le système de moments (10) -dans le cas $r(v) = 0$-. Il suffit, pour le calcul numérique, de discrétiser des lois de conservation non-linéaires en (t, x) plutôt que de travailler dans l'espace des phases. Voir [BC] pour plus de détails.

4. Gaz sans pression et lois de conservation scalaires générales

Une façon de formuler le modèle de gaz sans pression avec particules collantes (voir [Bo] et [BG] pour une présentation détaillée) est d'introduire (comme dans [BC]) le modèle cinétique (8), (9), dans le cas $d = 1$, $a(v) = v$, $r(v) = 0$, pour le choix de paramètre $K = 1$, $\beta = +\infty$, c'est-à-dire

$$\partial_t f + v.\partial_x f + (\partial_v)^2 \mu = 0 \tag{12}$$

avec $\mu(t, x, v) \geq 0$ et contrainte

$$f(t,x,.) = M_{1,+\infty}(.,m(f(t,x,.))), \tag{13}$$

c'est-à-dire

$$f(t,x,v) = \rho(t,x)\delta(v - a(t,x)), \tag{14}$$

où ρ est une mesure de Radon positive et a est une fonction mesurable bornée définie ρ presque partout. On retrouve, pour les moments d'ordre 0 et 1 les équations des gaz sans pression

$$\partial_t\rho + \partial_x(\rho a) = 0, \tag{15}$$

$$\partial_t(\rho a) + \partial_x(\rho a^2) = 0. \tag{16}$$

Comme précédemment indiqué, les techniques usuelles (lemmes de moyenne) d'équations cinétiques ne s'appliquent pas ici pour obtenir un résultat d'existence globale. De plus, ρ peut se concentrer au cours du temps, comme l'a mis en évidence Bouchut [Bo]. On peut néanmoins relier ce modèle à la loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(A(u)) = 0, \tag{17}$$

en choisissant bien la donnée initiale u^0 et le "flux" A, en fonction des données initiales ρ^0, qu'on suppose à support compact et de masse finie égale à 1 pour fixer les idées, et a^0 qu'on suppose continue bornée pour simplifier. Il suffit pour cela que

$$\rho^0(x) = \frac{d}{dx}u^0(x),$$

ce qui suppose u^0 monotone croissante valant 0 au voisinage de $-\infty$ et 1 au voisinage de $+\infty$, et

$$\rho^0(x)a^0(x) = \frac{d}{dx}(A(u^0(x))),$$

On montre

Theoreme 4..1 *Soit $u(t,x)$ une solution entropique régulière par morceaux de (17). Alors la mesure f définie par (14) où ρ et a sont définies par*

$$\rho(t,x) = \partial_x u(t,x), \quad \rho(t,x)a(t,x) = \partial_x(A(u(t,x))),$$

est solution de (12). En particulier, les lois de conservation (15), (16) sont satisfaites.

La démonstration qui suit est purement calculatoire et ne s'applique pas, telle quelle, aux solutions entropiques générales.

Esquisse de la preuve

On se place sur un rectangle ouvert Ω de l'espace-temps où l'on suppose que la solution entropique a la structure suivante

$$u(t,x) = u^g(t,x)H(c(t)-x) + u^d(t,x)H(x-c(t)),$$

où u^g et u^d sont deux solutions classiques (locales sur Ω) de (17). On note en abrégé $u^g(t)$ et $u^d(t)$ les valeurs $u^g(t,c(t))$ et $u^d(t,c(t))$ pour alléger les formules. On a $u^g(t) \leq u^d(t)$, car $u(t,x)$ est une fonction monotone croissante de x à chaque instant t (puisque la donnée initiale l'est). La courbe $t \to c(t)$ est supposée différentiable, satisfait à la relation de Rankine-Hugoniot

$$c'(t) = \frac{A(u^d) - A(u^g)}{u^d - u^g}$$

et à la condition d'entropie de Lax

$$A'(u^g) \geq c'(t) \geq A'(u^d).$$

La mesure f est donc définie par (14), avec

$$\rho(t,x) = u^g_x(t,x)H(c(t)-x) + u^d_x(t,x)H(x-c(t)) + (u^d(t) - u^g(t))\delta(x-c(t))$$

$$\rho a = A'(u^g)u^g_x H(c-x) + A'(u^d)u^d_x H(x-c) + (A(u^d) - A(u^g))\delta(x-c)$$

(où les indices t et x remplacent les dérivées partielles ∂_t et ∂_x). Pour obtenir (12),(14), il suffit d'établir, au sens des distributions que

$$T_t + S_x \leq 0,$$

où

$$T = \rho\theta(a), \quad S = \rho\psi(a),$$

avec $\psi(v) = v\theta(v)$, lorsque θ est convexe, avec égalité si θ est affine. (C'est cela qui traduit la positivité de la mesure μ dans (12).) Le calcul de S_x est aisé. Remarquons d'abord que :

$$S = u_x^g\psi(A'(u^g))H(c-x) + u_x^d\psi(A'(u^d)) + \psi(c')(u^d - u^g)\delta(x-c),$$

car, en $x = c$,

$$a = \frac{A(u^d) - A(u^g)}{u^d - u^g} = c'.$$

On a donc

$$S_x = (u_x^g\psi(A'(u^g)))_x H(x-c) + (u_x^d\psi(A'(u^d)))_x H(c-x)$$

$$+(u_x^d\psi(A'(u^d)) - u_x^g\psi(A'(u^g)))\delta(x-c) + \psi(c')(u^d - u^g)\delta'(x-c).$$

Le calcul de T_t est plus lourd. On a :

$$T = u_x^g\theta(A'(u^g))H(c-x) + u_x^d\theta(A'(u^d))H(x-c) + \theta(c')(u^d - u^g)\delta(x-c).$$

Donc :

$$T_t = (u_x^g\theta(A'(u^g)))_t H(x-c) + (u_x^d\theta(A'(u^d)))_t H(c-x) - (u_x^d\theta(A'(u^d)) - u_x^g\theta(A'(u^g)))c'\delta(x-c)$$

$$+\frac{d}{dt}(\theta(c')(u^d - u^g))\delta(x-c) - c'\theta(c')(u^d - u^g)\delta'(x-c).$$

Comme $u^g(t) = u^g(t, c(t))$, on a

$$u^{g\prime}(t) = u_t^g(t,c) + c'u_x^g(t,c) = u_x^g(t,c)(c' - A'(u^g(t)))$$

(puisque $u^g(t,x)$ est solution classique de (17)) et, de même,

$$u^{d\prime} = (c' - A'(u^d))u_x^d.$$

Ensuite, on trouve que :

$$(u^d - u^g)c'' = (u^d - u^g)\frac{d}{dt}\left[\frac{A(u^d) - A(u^g)}{u^d - u^g}\right] = (c' - A'(u^g))^2 u_x^g - (c' - A'(u^d))^2 u_x^d,$$

puis

$$\frac{d}{dt}[\theta(c')(u^d - u^g)] = \theta'(c')[(c' - A'(u^g))^2 u_x^g - (c' - A'(u^d))^2 u_x^d]$$

$$+\theta(c')[-(c'-A'(u^g))u_x^g+(c'-A'(u^d))u_x^d].$$

En utilisant de nouveau que $u^g(t,x)$ et $u^d(t,x)$ sont solutions classiques de (17) on trouve

$$T_t+S_x=\delta(x-c)(u_x^g[\theta'(c')(c'-A'(u^g))^2+(\theta(A'(u^g))-\theta(c'))(c'-A'(u^g))]$$
$$+u_x^d[-\theta'(c')(c'-A'(u^d))^2-(\theta(A'(u^d))-\theta(c'))(c'-A'(u^d))]).$$

Or, ce terme est bien nul lorsque θ est affine et négatif ou nul lorsque θ est convexe, puisque on a, par la condition d'entropie

$$A'(u^g)\geq c'\geq A'(u^d).$$

References

[BC] Y.Brenier, L.Corrias, *en préparation et CAM report, UCLA, 1994.*

[BG] Y.Brenier, E. Grenier, *On the model of pressureless gases with sticky particles, CAM report, UCLA, 1994.*

[Bo] F.Bouchut, *Advances in Kinetic Theory and Computing, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences vol. 22, World Scientific, 1994.*

[Co] S.Cordier, *thèse, Ecole Polytechnique 1994.*

[EFO] B.Engquist, E.Fatemi, S.Osher, *Numerical solution of the high frequency asymptotic expansion for hyperbolic equations, proc. ACES conference, Applied computational electromagnetisms, ACES (1994) 32-44.*

[LPT] P.-L.Lions, B.Perthame, E.Tadmor, *J. of the AMS 7 (1994) 169-191.*

[LPT2] P.-L.Lions, B.Perthame, E.Tadmor, *Comm. Math. Phys. 163 (1994) 415-431.*

[SAF] Zh.S. She, E. Aurell, U. Frisch, *Comm. Math. Phys. 148 (1992) 623-641.*

[Si] Ya. Sinai, *Comm. Math. Phys. 148 (1992) 605-622.*

[TS] J.Van Trier and W.Symes, *Upwind finite difference calculations of travel times, Geophysics 56 (1991) 812-821.*

[Ze] Ya. B. Zeldovich, *Astro. Astrophys. 5 (1970) 84.*