E. Grenier

Quelques limites singulières oscillantes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 21, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A21_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

QUELQUES LIMITES SINGULIERES OSCILLANTES

E. GRENIER

Exposé n° XXI

16 Mai 1995

Quelques limites singulières oscillantes

E. Grenier

Laboratoire d'Analyse Numérique, URA 189

Université Paris 6

L'objet de cet exposé est d'étudier quelques limites singulières oscillantes, et en particulier la limite quasineutre du système de Vlasov-Poisson en physique des plasmas. La caractéristique essentielle des limites envisagées est la présence d'oscillations importantes (d'ordre 1) et de très haute fréquence temporelle lorsque le petit paramètre tend vers 0.

1 Limite quasineutre des plasmas

On considère un nuage d'électrons décrit par une fonction de distribution $f(t, x, v)$, probabilité de trouver un électron au temps t et en x avec la vitesse v. Ces électrons se meuvent sur un fond uniforme d'ions fixes, sous l'effet du champ électrique E crée par eux-mêmes et ces ions. On néglige le champ magnétique et les collisions, ce qui rend la modélisation fort grossière, mais le système obtenu est le plus simple possible sur lequel on puisse étudier les oscillations temporelles du champ électrique à haute fréquence temporelle.

On a (équation de Vlasov)

$$\partial_t f + v.\nabla_x f + E.\nabla_v f = 0 \tag{1}$$

et (équation de Poisson)

$$\varepsilon \text{ div } E = \rho - 1 \qquad \text{avec} \qquad \text{rot } E = 0, \tag{2}$$

où $\rho(t, x) = \int f(t, x, v)dv$ est la densité des électrons en (t, x), et $\varepsilon > 0$. Ce système a une énergie $\mathcal{E}^\varepsilon$ préservée au cours du temps

$$\mathcal{E}^\varepsilon = \int f|v|^2 + \varepsilon \int |E|^2. \tag{3}$$

Si $f(t, x, v)$ est de la forme

$$f(t, x, v) = \rho(t, x)\delta_{v-v(t,x)} \tag{4}$$

où $\rho(t, x) \geq 0$, ce qui correspond au cas où tous les électrons qui sont au même point (t, x) ont la même vitesse $v(t, x)$, on obtient le système dit d'Euler-Poisson sans pression

$$\partial_t v + (v.\nabla v) = E \tag{5}$$

$$\partial_t \rho + \text{ div } (\rho v) = 0 \tag{6}$$

$$\varepsilon \text{ div } E = \rho - 1 \qquad \text{avec} \qquad \text{rot } E = 0. \tag{7}$$

Considérons tout d'abord la limite quasineutre ($\varepsilon \to 0$, avec $\varepsilon > 0$) du système d'Euler Poisson (5,6,7). Formellement, on obtient successivement

$$\rho = 1, \tag{8}$$

$$\text{div } u = 0, \tag{9}$$

$$\partial_t v + (v.\nabla v) = E, \tag{10}$$

or E est un gradient, donc $E = \nabla p$ pour une certaine fonction $p(t,x)$. Le système limite (8,9,10) est le système des équations d'Euler de la mécanique des fluides incompressibles.

Formellement, la limite quasineutre du système de Vlasov-Poisson se traite de la même façon. Le système limite est alors

$$\partial_t f + v.\nabla_x f + E.\nabla_v f = 0 \tag{11}$$

où $E(t,x)$ (qui est un gradient) est tel que

$$\int f dv = 1 \qquad \text{pour tout} \qquad t, x, \tag{12}$$

qui est la formulation cinétique des équations d'Euler incompressibles ([1]).

2 Oscillations du champ électrique

Cette analyse sommaire cache toutefois le phénomène essentiel qui est la présence d'oscillations temporelles de très grande amplitude (de l'ordre de $1/\sqrt{\varepsilon}$, ce qui est possible même si l'énergie $\mathcal{E}^\varepsilon$ est uniformément bornée) et de très haute fréquence temporelle ($1/\sqrt{\varepsilon}$) du champ électrique E^ε, connues physiquement sous le nom d'oscillations de plasma. Commençons par les étudier sur le système d'Euler Poisson.

Il faut réécrire ce système pour faire apparaitre le comportement oscillant de E^ε. L'équation clé est

$$\varepsilon \partial_{tt}^2 E^\varepsilon + E^\varepsilon = \phi^\varepsilon(t,x) \tag{13}$$

où

$$\phi^\varepsilon(t,x) = \nabla \Delta^{-1} \partial_i \Big[\partial_j (\rho^\varepsilon v_i^\varepsilon v_j^\varepsilon) + \varepsilon E_i^\varepsilon \text{ div } (E^\varepsilon) \Big], \tag{14}$$

(avec la convention habituelle de sommation des indices répétés). Le terme complexe $\phi^\varepsilon(t,x)$ peut être vu comme une source pour l'oscillateur $\varepsilon \partial_{tt}^2 E^\varepsilon + E^\varepsilon$, ce qui conduit à rechercher E^ε sous la forme

$$E^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(\frac{it}{\sqrt{\varepsilon}}) E_+(t,x) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp(-\frac{it}{\sqrt{\varepsilon}}) E_-(t,x) + E_r^\varepsilon(t,x) \tag{15}$$

où E_r^ε est uniformément borné quand $\varepsilon \to 0$, et où E_+ et E_- sont des gradients.

Un électron qui subit un tel champ de force voit alors sa vitesse osciller avec une amplitude de l'ordre de 1 et une fréquence $1/\sqrt{\varepsilon}$, ce qui nous invite à introduire $w^\varepsilon(t,x)$ défini par

$$w^\varepsilon(t,x) = v^\varepsilon(t,x) + i \exp(\frac{it}{\sqrt{\varepsilon}}) E_+(t,x) - i \exp(\frac{-it}{\sqrt{\varepsilon}}) E_-(t,x). \tag{16}$$

On constate alors que $\partial_t w^\varepsilon$ est formellement borné quand $\varepsilon \to 0$, et on peut donc supposer que

$$w^\varepsilon \text{ converge fortement, vers } w \tag{17}$$

dans une topologie raisonnable (typiquement $L_t^\infty(H_x^s)$ avec s assez grand).

En remplaçant v^ε par (16) dans (5,6) et en utilisant (17) on trouve que ρ^ε converge fortement vers 1, que div $w = 0$, et après calculs, que

$$\partial_t w + (w.\nabla w) \tag{18}$$

est un gradient, ce qui est bien le système limite attendu (équations d'Euler de la mécanique des fluides incompressibles).

Il reste ensuite à écrire une équation sur E_+ et sur E_-, ce qui s'obtient en remplaçant (15) dans (13) et en égalant les composantes en $\exp(\pm\frac{it}{\sqrt{\varepsilon}})$. On trouve

$$\text{div } \Big(\partial_t E_\pm + (w.\nabla)E_\pm\Big) = 0, \tag{19}$$

qui est un équation de transport par le flot limite w, avec la contrainte de rester un gradient.

Reprenons maintenant le développement formel. Soient $\rho_0^\varepsilon(x)$ et $v_0^\varepsilon(x)$, une famille de données initiales (avec $\rho_0^\varepsilon(x) - 1$ de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$ de façon à avoir $E^\varepsilon(0,x) = O(1/\sqrt{\varepsilon})$ et $\mathcal{E}^\varepsilon$ bornée). On cherche à calculer une approximation de $\rho^\varepsilon(t,x)$ et de $v^\varepsilon(t,x)$.

On résoud tout d'abord le système limite

$$\partial_t w + (w.\nabla w) = \nabla p \qquad \text{et} \qquad \text{div } w = 0, \tag{20}$$

avec pour donnée initiale la limite (quitte à extraire une sous suite) de la projection de v_0^ε sur les champs à divergence nulle

$$w(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} v_0^\varepsilon - \nabla \Delta^{-1} \text{ div } v_0^\varepsilon. \tag{21}$$

On résoud ensuite «l'équation des correcteurs»

$$\text{div } \Big(\partial_t E_\pm + (w.\nabla)E_\pm\Big) = 0, \tag{22}$$

avec pour données initiales

$$\text{div } E_\pm(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \text{ div } \Big(\frac{\sqrt{\varepsilon}E^\varepsilon(0) \pm \rho_0^\varepsilon v_0^\varepsilon}{2}\Big). \tag{23}$$

On a ensuite

$$v^\varepsilon(t,x) = w(t,x) - i\exp(\frac{it}{\sqrt{\varepsilon}})E_+(t,x) + i\exp(\frac{-it}{\sqrt{\varepsilon}})E_-(t,x) + o(1), \tag{24}$$

et $\rho^\varepsilon(t,x) = 1 + o(\sqrt{\varepsilon})$.

Remarques

- La solution v^ε est donc la somme d'une fonction w qui est solution du problème limite et aussi limite faible de v^ε, et de termes très oscillants d'amplitude $O(1)$ dans le cas général (à des termes d'ordre $o(1)$ près). Ces termes oscillants évoluent dans le temps en étant transportés par la limite w. En particulier ils restent non négligeables quand t augmente et ne donnent pas lieu à un phénomène de «couche-limite» temporelle.

- Lorsque $\sqrt{\varepsilon}E^\varepsilon(0,x)$ et div $\rho_0^\varepsilon v_0^\varepsilon$ tendent vers 0, les correcteurs $E_\pm$ sont nuls, et v^ε converge fortement vers w, solution limite. Les données initiales sont alors dites «bien-préparées».

- Le cas du système de Vlasov-Poisson se traite de la même façon en introduisant la fonction de distribution g^ε définie par

  $$f^\varepsilon(t,x,v) = g^\varepsilon\Big(t,x,v + iE_+(t,x)\exp(\frac{it}{\sqrt{\varepsilon}}) - iE_-(t,x)\exp(-\frac{it}{\sqrt{\varepsilon}})\Big), \tag{25}$$

  qui converge vers une fonction de distribution g, solution du problème limite (11,12). Les correcteurs $E_\pm$ vérifient une équation de transport par le flot limite, avec la contrainte de rester des gradients

  $$\text{div }\Big(\partial_t E_\pm + \Big(\big(\int g v dv\big).\nabla\Big)E_\pm\Big) = 0. \tag{26}$$

- Ce type d'«Ansatz» où on décompose la solution du problème avec petit paramètre en la limite faible et des fonctions décrivant les oscillations temporelles à haute fréquence se retrouve dans de nombreuses limites singulières, comme la limite incompressible des fluides compressibles (étudiée dans le cas de données initiales «bien-préparées» dans [6]), l'asymptotique des fluides tournants ([4]), la limite gyrocinétique des plasmas ([5] et paragraphe 5.2), et l'étude faite dans ce paragraphe peut s'adapter à ces différentes situations.

  Dans certains cas toutefois ([4]), il n'est pas possible de découpler l'équation sur la limite faible et celle sur les oscillations (sauf dans le cas de données initiales «bien-préparées»), comme c'est le cas dans l'asymptotique des fluides tournants.

3 Etude en dimension 1

La première étape pour justifier l'Ansatz présenté dans le paragraphe précédent est l'obtention de bornes indépendantes du petit paramètre ε sur les solutions. Ceci nécessite de reprendre les démonstrations d'existence, puisque les preuves usuelles conduisent à des majorations qui explosent lorsque $\varepsilon \to 0$, et que la conservation de l'énergie ne s'avère pas suffisante pour passer à la limite.

On va étudier la limite quasineutre du système de Vlasov-Poisson en temps petit, en dimension 1 et pour des données initiales f^ε particulières, de type «waterbags», ce qui conduit déjà à des estimations non immédiates.

Plus précisement, on considère des fonctions de distribution f de la forme

$$f(t,x,v) = \sum_{i=1}^{N} c_i H(v - v_i(t,x)) \tag{27}$$

où les c_i sont des constantes fixées, de somme totale nulle, où les $v_i(t,x)$ sont des fonctions régulières en x, et où H est la fonction de Heaviside. La fonction f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et ses lignes de niveau sont des graphes de fonctions régulières.

3.1 Système limite

La première étape est de chercher à résoudre le système limite (11,12) avec de telles fonctions f. Ce système se réécrit

$$\partial_t v_i + v_i \partial_x v_i + \partial_x \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j v_j^3}{3} = 0, \tag{28}$$

avec les contraintes (vérifiées sur les données initiales)

$$\sum_{i=1}^{N} c_i v_i + 1 = 0 \tag{29}$$

qui provient de $\int f dv = 1$ et

$$\sum_{i=1}^{N} c_i v_i^2 = 0 \tag{30}$$

qui provient de $\partial_t \int f dv = 0$.

Supposons que les c_i sont tous strictement positifs pour $1 \leq i < N' < N$, puis tous strictement négatifs pour $N' \leq i \leq N$.

Proposition 3.1 *Le système (28) est hyperbolique et possède une solution régulière en temps petit si $v_i < v_j$ dès que $i < j$.*

Dans certains cas, il peut être elliptique et donc mal posé comme problème d'évolution dans les espaces de Sobolev, et l'Ansatz exposé est faux. Ceci est physiquement lié à l'instabilité des «deux-jets» : pour le système de Vlasov-Poisson, les lignes de niveau v_i^ε de f^ε peuvent cesser d'être des graphes de fonctions en des temps de l'ordre $\sqrt{\varepsilon}$, et s'«enroulent» sur des longueurs de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$ (longueur de Debye), pour créer une situation très chaotique.

3.2 Estimations d'énergie

On cherche des solutions $f^\varepsilon(t,x,v)$ de la forme (27) à (1,2) et on veut estimer $\|v_i^\varepsilon\|_{H^s}$ pour s assez grand, indépendamment de ε. Les v_i^ε vérifient le système suivant

$$\partial_t v_j^\varepsilon + v_j^\varepsilon \partial_x v_j^\varepsilon = -\partial_x^{-1} \frac{\sum_{k=1}^N c_k v_k^\varepsilon + 1}{\varepsilon} \tag{31}$$

où ∂_x^{-1} est l'opérateur de symbole $(i\xi)^{-1}$. Pour obtenir des estimations uniformes en ε, il n'est pas suffisant de symétriser uniquement le terme d'ordre 1, $v_j \partial_j v_j$. Il faut équilibrer le terme de transport de symbole $iv_j\xi$ et celui de force, de symbole en $(i\varepsilon\xi)^{-1}$.

Pour $\xi \gg 1/\sqrt{\varepsilon}$, le terme de transport est prépondérant et le système se comporte comme le transport libre. Pour $\xi \ll 1/\sqrt{\varepsilon}$, c'est la pénalisation $\partial_x^{-1}(\sum c_k v_k^\varepsilon + 1)/\varepsilon$ qui est essentielle et qui contraint le système à converger vers (28).

Il est donc nécessaire d'avoir recours à une méthode d'énergie pseudodifférentielle et de symétriser le symbole total $A(\tilde{v}_k)$ (linéarisé autour de l'état constant $(\tilde{v}_k)_{1\leq k\leq N}$)

$$A(\tilde{v}_k)[(v_i)_{1\leq i\leq N}] = (i\tilde{v}_j\xi v_j + \frac{1}{i\xi\varepsilon}(\sum c_k v_k + 1))_{1\leq j\leq N}. \tag{32}$$

Deux difficultés apparaissent :

- deux valeurs propres de $A(\tilde{v}_k)$ tendent vers l'infini comme $\pm 1/\sqrt{\varepsilon}$ quand $\varepsilon \to 0$ (comme dans la limite incompressible des fluides compressibles),
- la base des vecteurs propres (de norme 1) de $A(\tilde{v}_k)$ devient singulière quand $\varepsilon \to 0$. Tous les vecteurs propres (de coordonnées $(v_1, ..., v_N)$) vérifient en effet à la limite $\varepsilon \to 0$ les contraintes linéarisées

$$\sum c_i v_i = 0 \qquad \text{and} \qquad \sum c_i \tilde{v}_i v_i = 0, \tag{33}$$

ce qui oblige à désingulariser le système $N \times N$ (31) en introduisant $G^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} E^\varepsilon$ comme fonction supplémentaire, pour obtenir un système surdéterminé $(N+1) \times (N+1)$. Ce problème ne se retrouve pas dans les limites incompressibles ou gyrocinétiques.

On a

Théorème 3.2 *Soient* c_i *(*$1 \leq i \leq N$*) des constantes réelles telles que* $c_i > 0$ *pour* $i < N'$ *et* $c_i < 0$ *pour* $i \geq N'$*, avec*

$$\sum_{i=1}^{N} c_i = 0.$$

Soient $v_i^\varepsilon(0,x)$ *des familles de fonctions telles que* $v_i^\varepsilon(0,x) - v_i^0$ *soient bornées dans* $H^s(\mathbb{R})$*, pour certaines constantes* v_i^0*, uniformément en* ε*, avec* s *assez grand, et telles que* $v_1^\varepsilon < v_2^\varepsilon < \dots < v_N^\varepsilon$*. Soit*

$$m^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} c_i v_i^{\varepsilon 2}(0,x)\right)\left(\sum_{i=1}^{N} c_i v_i^\varepsilon(0,x)\right)^{-1}. \tag{34}$$

Supposons de plus que, uniformément en $x \in \mathbb{R}$*,*

$$v_{N'}^\varepsilon(0,x) < m^\varepsilon(0,x) < v_{N'+1}^\varepsilon(0,x) \tag{35}$$

et que

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} c_i v_i^\varepsilon(0) + 1 \right\|_{H^s} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \tag{36}$$

Alors il existe $T > 0$ *et des fonctions* $v_i^\varepsilon(t)$ *pour* $0 \leq t \leq T$*, avec données initiales* $v_i^\varepsilon(0)$*, telles que* $v_i^\varepsilon(t) - v_i^0$ *et* $\varepsilon^{-1/2}(\sum_{i=1}^{N} c_i v_i^\varepsilon(t) + 1)$ *soient uniformément bornées dans* $L^\infty([0,T], H^s(\mathbb{R}))$ *et telles que*

$$f^\varepsilon(t,x,v) = \sum_{i=1}^{N} c_i H(v - v_i^\varepsilon(t,x)) \tag{37}$$

soit solution du système de Vlasov Poisson avec petit paramètre ε*.*

L'hypothèse (35) est essentiellement technique. On donnera une idée de la preuve de ce théorème au paragraphe 4.

3.3 Passage à la limite

Théorème 3.3 *Soit*

$$f^\varepsilon(t,x,v) = \sum_{i=1}^{N} c_i H(v - v_i^\varepsilon(t,x)) \tag{38}$$

une famille de solutions du système de Vlasov-Poisson avec petit paramètre ε*. On suppose qu'il existe* $T > 0$*, des constantes* v_i^0 *et une constante* C*, indépendants de* ε *tels que*

$$\|v^\varepsilon - v_i^0\|_{L^\infty([0,T],H^s)} \leq C \tag{39}$$

et

$$\varepsilon^{-1/2}\|\sum_{i=1}^{N} c_i v_i^\varepsilon + 1\|_{L^\infty([0,T],H^s)} \leq C, \tag{40}$$

avec s assez grand. Alors il existe des fonctions $E_+(x)$ et $E_-(x)$, indépendantes de t, de classe H^s, telles que

$$v_i^\varepsilon + i(E_+(x)e^{it/\sqrt{\varepsilon}} - E_-(x)e^{-it/\sqrt{\varepsilon}}) \to v_i \tag{41}$$

et

$$\sqrt{\varepsilon}(E^\varepsilon - (E_+ e^{it/\sqrt{\varepsilon}} + E_-(x)e^{-it/\sqrt{\varepsilon}}) \to 0, \tag{42}$$

fortement dans $L^\infty(H^{s'})$ pour tout $s' < s-2$. De plus,

$$f(t,x,v) = \sum_{i=1}^{N} c_i H(v - v_i(t,x)) \tag{43}$$

est solution du système limite (11,12) sur $[0,T]$ et $E_\pm$ sont les limites faibles (quitte à extraire une sous-suite) de

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\varepsilon}E^\varepsilon(0) \pm j^\varepsilon(0)), \tag{44}$$

où

$$j^\varepsilon = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} c_i (v_i^\varepsilon)^2. \tag{45}$$

A noter qu'en dimension 1, $\int fvdv = 0$ (quitte à faire un changement de repère), et que donc l'équation (22) se simplifie en $\partial_t E_\pm = 0$.

Pour prouver ce résultat, on introduit

$$\tilde{E}^\varepsilon = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon}} \int_t^{t+2\pi\sqrt{\varepsilon}} E^\varepsilon(\tau,x)d\tau, \tag{46}$$

moyenne du champ électrique sur une période. Grâce à (13), on montre que

$$\|\tilde{E}^\varepsilon\|_{L^\infty(H^{s-1})} \leq C \tag{47}$$

uniformément en ε. Une étude de la transformée de Fourier temporelle de $E^\varepsilon - \tilde{E}^\varepsilon$ permet alors d'introduire $E_\pm$ et de passer à la limite.

Remarque

Il est aussi possible, comme dans ([4],[7]) d'introduire un groupe de transformations qui élimine le terme linéaire de taille ε^{-1}, ce qui conduit naturellement à $E_\pm$.

4 Estimations d'énergie

Dans ce paragraphe, on va considérer une classe de systèmes plus générale que (31). Le théorème 3.2 peut se déduire du théorème 4.2 ci dessous.

Soit la famille d'équations

$$\partial_t u^\varepsilon + \mathcal{A}^\varepsilon(u^\varepsilon)u^\varepsilon = 0 \tag{48}$$

avec données initiales

$$u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon \tag{49}$$

où u_0^ε est une famille bornée de $H^s(\mathbb{R}^d)$, avec s assez grand, et où $\mathcal{A}^\varepsilon(u^\varepsilon)$ est une famille d'opérateurs pseudo-différentiels, dont le symbole dépend de la solution u^ε, comme de coutume dans les problème nonlinéaires. Précisons tout d'abord cette dépendance

Définition 4.1 *On dit qu'un symbole $p(v,\xi)$ est de classe $C^\infty S^m$ si pour tous multiindices α, β, il existe une fonction croissante $C_{\alpha,\beta}$ telle que*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_v^\beta p(v,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(|v|)(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}. \tag{50}$$

On dit qu'une famille $p^\varepsilon(v,\xi)$ est bornée dans $C^\infty S^m$ uniformément en ε si pour tous multiindices α, β, il existe une fonction croissante $C_{\alpha,\beta}$, indépendante de ε, telle que

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_v^\beta p^\varepsilon(v,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(|v|)(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}. \tag{51}$$

A noter que si $u(x) \in H^s(\mathbb{R})$, et si $p(v,\xi) \in C^\infty S^m$ alors $p(u(x),\xi)$ est un symbole à régularité limitée d'ordre m au sens de [8].

Nous allons faire un certain nombre d'hypothèses sur (48,49) qui seront commentées plus loin.

(A1) L'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon(u^\varepsilon(t,x))$ est la somme de deux opérateurs $\mathcal{A}_1(u^\varepsilon(t,x))$ et $\mathcal{A}_2^\varepsilon$, tels que

- $\mathcal{A}_1(u^\varepsilon(t,x)) = Op(a_1(u^\varepsilon(t,x),\xi))$, où $a_1 \in C^\infty S^1$ est un opérateur différentiel d'ordre 1, indépendant de ε,
- $\mathcal{A}_2^\varepsilon$ est un opérateur pseudodifférentiel de symbole $\varepsilon^{-1} l(\xi)$.

(A2) L'opérateur $\mathcal{A}^\varepsilon$ a pour symbole $A^\varepsilon(u^\varepsilon(t,x),\xi)$, où $A^\varepsilon(v,\xi)$ est un symbole matriciel, de classe $C^\infty S^1$, diagonalisable, dont les valeurs propres sont imaginaires pures

$$A^\varepsilon = P^\varepsilon B^\varepsilon Q^\varepsilon \tag{52}$$

où

- $B^\varepsilon(v,\xi)$ est diagonale, à coefficients imaginaires purs,

- $P^\varepsilon(v,\xi)$ et $Q^\varepsilon(v,\xi) = (P^\varepsilon)^{-1}$ sont des familles de symboles bornées dans $C^\infty S^0$ au sens de 4.1.

(A3) Pour tout multiindice α de longueur totale 1, $\partial_v^\alpha B^\varepsilon$, $B^\varepsilon \partial_v^\alpha Q^\varepsilon$ et $\partial_v^\alpha P^\varepsilon B^\varepsilon$ sont des familles de symboles, bornées dans $C^\infty S^1$ au sens de 4.1, et $\partial_\xi^\alpha B^\varepsilon \partial_v^\alpha Q^\varepsilon$ est une famille bornée de $C^\infty S^{1-|\alpha|}$ pour tout multiindice α.

(A4) Pour s assez grand, il existe une fonction croissante C_s, telle que, pour tout $w \in H^s$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|Op(\partial_v Q^\varepsilon(w,\xi)\mathcal{A}^\varepsilon(w)w)\|_{L^2\to L^2} \leq C_s(\|w\|_{H^s}). \tag{53}$$

(A5) Pour s assez grand, il existe une constante C_0 et des fonctions croissantes C_1 et C_2 telles que, pour tout $v, w \in H^s$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(C_0 - \varepsilon C_1(\|v\|_{H^s}))\|w\|_{L^2} \leq \|Op(Q^\varepsilon(v,\xi))w\|_{L^2} \leq C_2(\|v\|_{H^s})\|w\|_{L^2}. \tag{54}$$

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses (A1),(A2),(A3),(A4) et (A5), il existe des solutions $u^\varepsilon(t,x)$ à (48) avec données initiales (49), uniformément bornées en ε dans $L^\infty([0,T],H^s(\mathbb{R}^d))$.*

Ce théorème est une version «pseudodifférentielle» générale des résultats de [6] où l'on trouve des hypothèses voisines de (A1),(A2) et (A3). Il s'obtient en bornant uniformément en ε les normes des opérateurs apparaissant dans les preuves classiques d'énergie ([8]).

Remarques

Les hypothèses (A1) et (A2) traduisent juste le fait que l'on étudie la pénalisation par un terme linéaire de systèmes hyperboliques.

Les hypothèses (A3) et (A4) sont plus «géométriques»: la fréquence des oscillations temporelles des solutions (qui tend vers l'infini quand $\varepsilon \to 0$) est indépendante de x ($\partial_x B^\varepsilon$ est bornée) et de t (A4), et la direction des oscillations est indépendante de x (autres bornes de (A3)) et de t (A4).

(A5) exprime la quasi-équivalence des normes $\|w\|_{L^2}$ et $\|Op(Q^\varepsilon(u^\varepsilon,\xi))w\|_{L^2}$ (norme utilisée dans les estimations d'énergie).

5 Remarques

5.1 Limite quasineutre

Il est possible de justifier l'Ansatz en temps petit et en dimension quelconque pour des données initiales analytiques. Le système limite est alors toujours bien posé, ce qui évite les difficultés du cadre de la régularité Sobolev dûes à la proposition 3.1.

En temps grand, le problème est essentiellement ouvert : la conservation de l'énergie ne permet de passer à la limite ([3]) que dans les deux premiers moments de la fonction de distribution, après avoir introduit diverses mesures de défaut.

5.2 Limite gyrocinétique

Des méthodes semblables s'appliquent à la limite gyrocinétique où l'on considère le système suivant ([2]), dans $\mathbb{R}^2$

$$\partial_t u + (u.\nabla)u = \frac{E + u^\perp}{\varepsilon} \tag{55}$$

$$\partial_t \rho + \text{ div } (\rho u) = 0 \tag{56}$$

$$\text{div } E = \rho \qquad \text{et} \qquad \text{rot } E = 0, \tag{57}$$

$u^\perp$ désignant le vecteur u tourné de $\pi/2$. Comme dans le cas de la limite quasineutre, la vitesse des particules oscille autour de sa vitesse moyenne et il faut introduire des correcteurs pour assurer la convergence forte des solutions. Le théorème 4.2 permet d'obtenir les bornes uniformes en ε nécessaires pour justifier l'Ansatz.

Références

[1] Y. Brenier On the motion of an ideal incompressible fluid, *Convegno partial diff. equ. of elliptic type, Cortona* 1993.

[2] P. Degond, M. Pulvirenti : communication personnelle.

[3] E. Grenier : Defect measures of the Vlasov-Poisson system, *à paraitre dans Comm. Partial Diff. Equ.* 1995.

[4] E. Grenier : Oscillatory perturbations of the Navier Stokes equations, *prépublication D.M.I, L.M.E.N.S 95-6*

[5] E. Grenier : Pseudodifferential energy estimates, *en préparation*

[6] S. Klainerman, A. Majda : Compressible and Incompressible fluids, *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982) p629 – 651.

[7] S. Schochet : Fast singular limts of hyperbolic PDEs, *J.Diff.Equ.* 114, (1994) p456 – 512.

[8] M. Taylor : Pseudodifferential operators and nonlinear PDE, *Progress in Mathematics* 100, Birkhäuser.