Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

M. Cannone
Y. Meyer
F. Planchon

Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A8_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SOLUTIONS AUTO-SIMILAIRES DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

M. CANNONE, Y. MEYER & F. PLANCHON

Exposé n° VIII

18 Janvier 1994

1. Introduction et énoncés.

Nous considérons les équations de Navier-Stokes gouvernant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible répandu dans $\mathbb{R}^3$ tout entier. On pose $u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_3(x,t))$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\nabla \cdot u = \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_3} u_3$; $u \cdot \nabla$ est l'opérateur differentiel $u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ et les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u \cdot \nabla)\, u - \nabla p \\ \nabla \cdot u = 0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où $p = p(x,t)$ est la pression (c'est une fonction scalaire).

On cherche les solutions sous la forme de fonctions (vectorielles) continues sur $[0, \infty)$ à valeurs dans un espace de Banach X de fonctions de x. On demande que X soit inclus dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ et l'on décide que $u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u + \cdots + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} u$ est défini par $\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 u) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_3}(u_3 u)$ qui a un sens, au sens des distributions.

Si donc $u(x,t)$ est une fonction continue de $t \in [0, \infty)$ à valeurs dans un espace de Banach X de fonctions de x, alors $u(x,0) = u_0(x)$ a un sens. On peut alors poser le problème de Cauchy associé à (1.1).

Si $u(x,t)$ est solution de (1.1), il en est de même pour $\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ pour tout $\lambda > 0$. Cette remarque nous conduit à chercher des solutions auto-similaires, définies par $\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) = u(x,t)$ pour tout $\lambda > 0$. En d'autres termes

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, U\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \tag{1.2}$$

où $U = (U_1, U_2, U_3)$ est un champ de vecteurs à divergence nulle. On peut alors craindre que la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ n'ait aucun sens.

Le point de départ de la définition correcte de $u(x,0)$ est la remarque suivante : si, par exemple, $U(x) = \Big(0, \frac{-x_3}{|x|^2+1}, \frac{x_2}{|x|^2+1}\Big)$, alors $u(x,t) = \Big(0, \frac{-x_3}{|x|^2+t}, \frac{x_2}{|x|^2+t}\Big)$ qui tend effectivement vers une limite quand t tend vers 0. Cette limite est $u_0(x) = \Big(0, \frac{-x_3}{|x|^2}, \frac{x_2}{|x|^2}\Big)$ et $U(x)$ est une version "lissée en 0" de $u_0(x)$.

Cet exemple est caractéristique.

Si $u(x,t)$ est une solution auto-similaire et si $\lim\limits_{t \downarrow 0} u(x,t) = u_0(x)$ existe, alors $u_0(x)$ est nécessairement homogène de degré -1. On aura également $\nabla \cdot u_0(x) = 0$ (au sens des distributions).

Naturellement on ne peut avoir $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Il s'agira de trouver des espaces fonctionnels (remplaçant L^2) et contenant les fonctions homogènes de degré -1 (et régulières en dehors de 0).

Nous construisons de tels espaces fonctionnels E et démontrons que, pour toute condition initiale $u_0(x)$, homogène de degré -1, vérifiant $\nabla \cdot u_0 = 0$ et de norme suffisamment petite, il existe une et une seule solution auto-similaire $u(x,t)$ de (1.1) qui soit continue sur $[0,\infty)$ à valeurs dans E (muni d'une topologie "faible" qui sera définie dans un instant).

2. Espaces de Banach convenant aux solutions auto-similaires.

Soient $q = 1, 2$ ou 4 et $m \in \mathbb{N}$. On désignera par $E^{q,m} = E$ l'espace de Banach des fonctions de classe $C^m(\mathbb{R}^3)$ telles que

$$|\partial^\alpha f(x)| \le C(1+|x|)^{-q-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |\alpha| \le m \,. \tag{2.1}$$

Si $q = 1$ ou $q = 2$, on considérera également l'espace homogène correspondant défini par

$$|\partial^\alpha f(x)| \le C|x|^{-q-|\alpha|} \quad \text{si} \quad |\alpha| \le m \,. \tag{2.2}$$

Cet espace homogène est noté $\dot{E}^{q,m}$ (et se compose de fonctions de classe C^m en dehors de 0).

Les solutions auto-similaires que nous cherchons sont de la forme $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ où U appartient à $E^{1,m}$. Plus précisément on pose $S(t) = \exp(t\Delta)$ et l'on cherche des solutions de la forme

$$u(x,t) = [S(t)u_0](x) + \frac{1}{\sqrt{t}} w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.3}$$

où $u_0(x)$ est homogène de degré -1 et appartient à l'espace homogène $\dot{E}^{1,m}$ tandis que $w(x)$ appartient à l'espace (non homogène) $E^{2,m}$.

On a (Lemme 2 ci-dessous) $[S(t)u_0](x) = \frac{1}{\sqrt{t}} u_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ où $u_1 = S(1)u_0$.

Alors $S(t)u_0(x)$ est une fonction continue et bornée de $t \in (0,\infty)$ à valeurs dans l'espace de Banach homogène $\dot{E}^{1,m}$. En outre $S(t)u_0 \rightharpoonup u_0$, au sens des distributions, quand t tend vers 0.
Si l'on se restreint à $t \in (0,\infty)$, il vient $S(t)u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} u_1(\frac{x}{\sqrt{t}})$ où $u_1 \in E^{1,m}$. Mais $S(t)u_0$ n'est pas bornée, au sens de la norme de $E^{1,m}$, quand t tend vers 0.

Considérons le terme d'erreur $\frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. Ce terme d'erreur appartient encore à $L^\infty[(0,\infty)\,;\,\dot{E}^{1,m}]$ mais, cette fois, $\left|\frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right| \le C\frac{\sqrt{t}}{|x|^2}$ et il en résulte que $\frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ tend vers 0, au sens des distributions, quand t tend vers 0.

Pour conclure, nous utiliserons la définition suivante.

Soit B un espace de Banach fonctionnel (c'est-à-dire B est inclus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et cette inclusion est continue). Alors une suite f_j de vecteurs de B converge vers $f \in B$, au sens "faible-strict", si la suite des normes $||f_j||_B$ est bornée et si $f_j \rightharpoonup f$ au sens des distributions.

Ceci étant, on pose $B = \dot{E}^{1,m}$ (espace homogène) et $u(x,t)$ tend vers $u_0(x)$ au sens faible-strict précédemment défini.

3. La formulation de T. Kato des équations de Navier-Stokes.

On désigne par $\mathbb{P}\,:[L^2(\mathbb{R}^3)]^3 \to [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ l'opérateur de projection orthogonale sur les champs de vecteurs à divergence nulle.

Plus précisément, si $(f,g,h) \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$, on pose

$$\sigma = R_1 f + R_2 g + R_3 h \tag{3.1}$$

où $R_1 = -i\frac{\partial}{\partial x_1}(-\Delta)^{-1/2}, \cdots, R_3 = -i\frac{\partial}{\partial x_3}(-\Delta)^{-1/2}$ sont les transformations de Riesz et l'on a alors

$$\mathbb{P}(f,g,h) = (f - R_1\sigma, g - R_2\sigma, h - R_3\sigma)\,. \tag{3.2}$$

Le noyau de l'opérateur $\mathbb{P}$ est précisément l'espace vectoriel des fonctions ∇p (où p est une fonction scalaire arbitraire).

Alors T. Kato ([3]) remplace (1.1) par

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\nabla u(s)\otimes u(s)ds \tag{3.3}$$

où $\nabla u(s)\otimes u(s) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(u_1(s)u(s)\big) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_3}(u_3(s)u(s)\Big)$.

Réciproquement, si $u(t) = u(x,t)$ est suffisamment régulière en l'ensemble des variables et vérifie (3.3), alors $u(x,t)$ est une solution des équations de Navier-Stokes.

Nous allons nous concentrer sur (3.3) en cherchant, à l'aide d'un algorithme de point fixe, des solutions auto-similaires. On définit la suite $u^{(n)} = u^{(n)}(x,t)$ par $u^{(0)}(x,t) = S(t)u_0(x)$ et

$$u^{(n+1)}(t) = S(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\nabla u^{(n)}(s)\otimes u^{(n)}(s)ds\,. \tag{3.4}$$

On bénéficie alors du fait remarquable suivant :

si $u^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U^{(n)}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, alors nécessairement $u^{(n+1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U^{(n+1)}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$.

C'est-à-dire que si $S(t)u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} u_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ a la structure attendue pour les solutions auto-similaires, l'algorithme de point fixe reste piégé à l'intérieur de cette structure particulière. Si nous réussissons à démontrer la convergence de cet algorithme, la limite sera une solution auto-similaire des équations de Navier-Stokes.

Voici un énoncé précis.

Théorème 1.— *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe deux nombres positifs η et β tels que, pour toute condition initiale $u_0(x)$ homogène de degré -1 et vérifiant $||u_0||_{\dot{E}^{1,m}} < \eta$, alors il existe une et une seule solution auto-similaire $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ de (3.3) telle que $||U||_{E^{1,m}} < \beta$.*

En outre $U(x) = S(1)u_0 + w$ où $w \in E^{2,m}$.

La preuve du théorème 1 est basée sur quelques lemmes très simples.

4. Quelques lemmes très simples.

Lemme 1.— *Si $q = 1$ ou $q = 2$, pour toute fonction f appartenant à $\dot{E}^{q,m}$ (espace homogène) et pour toute fonction g appartenant à $E^{4,m}$ (espace non homogène), alors le produit de convolution $f * g$ appartient à $E^{q,m}$ (espace non homogène).*

La preuve est immédiate et laissée au lecteur.

Lemme 2.— *Si $f(x)$ est une distribution homogène de degré -1, alors, pour tout $t > 0$, on a*

$$[S(t)f](x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{où} \quad g = S(1)f \; .$$

On désigne par $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier et l'on écrit $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$. Alors $\mathcal{F}[S(t)f](\xi) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{f}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{f}(\sqrt{t}\xi)t$ puisque $\widehat{f}$ est homogène de degré -2. On pose ensuite $\widehat{g}(\xi) = e^{-|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)$ et il vient $[S(t)f](x) = \frac{1}{\sqrt{t}} g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$.

Nous allons démontrer le théorème 1 sous une version scalaire simplifiée où $u(t)$ est remplacée par une fonction scalaire encore notée u où $u \otimes u$ est remplacé par u^2 et finalement où $\mathbb{P}\nabla$ est remplacé par l'opérateur de Calderón $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$.

On observera que $\mathbb{P}\nabla$ est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1, tout comme Λ.

Finalement les équations de Navier-Stokes (3.3) sont remplacées par

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\Lambda u^2(s)ds \tag{4.1}$$

et la méthode de démonstration que nous utiliserons pour résoudre (4.1) conviendra également à (3.3).

On posera désormais

$$B(f,g) = \int_0^t S(t-s)\Lambda f(s)g(s)ds \tag{4.2}$$

où $f(s) = f(x,s), g(s) = g(x,s)$.

On a alors (en restant dans le cas scalaire)

Lemme 3.— *Si $u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ et $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, alors $B(u,v)(t) = w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$.*

En outre, en posant $f(x) = u(x)v(x)$, il vient

$$\widehat{w}(\xi) = \int_0^1 e^{-(1-\lambda)|\xi|^2}|\xi|\widehat{f}(\sqrt{\lambda}\ \xi)d\lambda\ . \tag{4.3}$$

Pour le vérifier, on passe bien évidemment aux transformées de Fourier. Il vient, si $W(x,t) = B(u,v)$ et si $\widehat{W}(\xi,t)$ désigne la transformée partielle (en x) de $W(x,t)$,

$$\widehat{W}(\xi,t) = \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2}|\xi|\widehat{f}(\sqrt{s}\ \xi)\sqrt{s}\ ds\ .$$

On effectue ensuite le changement de variable $s = t\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, et l'on obtient

$$\widehat{W}(\xi,t) = t\int_0^1 e^{-(1-\lambda)t|\xi|^2}\sqrt{t}|\xi|\widehat{f}(\sqrt{\lambda}\sqrt{t}\ \xi)\sqrt{\lambda}\ d\lambda = t\widehat{w}(\sqrt{t}\ \xi)$$

où w est définie par (4.3).

Lemme 4.— *Si f appartient à $E^{2,m}$, alors la fonction w définie par (4.3) appartient aussi à $E^{2,m}$ et l'opérateur linéaire ainsi défini est continu.*

Pour le démontrer, on écrit $\widehat{w} = \widehat{w}_0 + \widehat{w}_1 = \int_0^{1/2}(\cdots) + \int_{1/2}^{1}(\cdots)$.

En ce qui concerne w_0, on observe que $|\xi|e^{-|\xi|^2}$ est la transformée de Fourier d'une fonction $\Theta(x)$ qui possède les deux propriétés suivantes : $\Theta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $\Theta(x) = O(|x|^{-4})$ à l'infini. en outre $\partial^\alpha\Theta(x) = O(|x|^{-4-|\alpha|})$ à l'infini, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$.

Donc Θ appartient à $E^{4,m}$, pour tout entier m.

Ensuite on pose $\Theta_\lambda(x) = (1-\lambda)^{-3/2}\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{1-\lambda}}\right)$ et $f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}f\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$.
On a alors

$$w_0(x) = \int_0^{1/2} \Theta_\lambda * f_\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}\,. \tag{4.4}$$

Puisque f appartient à $E^{2,m}$, la famille $\frac{1}{\lambda}f(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})$ est borné dans $\dot{E}^{2,m}$ et le Lemme 1 nous apprend que les produits de convolution $\Theta_\lambda * f_\lambda$ sont bornés dans $E^{2,m}$. L'intégrale définissant $w_0(x)$ est donc une intégrale de Bochner usuelle.

Passons à w_1. On a, cette fois,

$$w_1(x) = \int_{1/2}^{1} \Theta_\lambda * f_\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}}\,. \tag{4.5}$$

Maintenant f_λ appartient à une partie bornée de $E^{2,m}$. La fonction $\Theta(x)$ a une intégrale nulle et les fonctions Θ_λ sont donc des ondelettes (de largeur $\sqrt{1-\lambda}$). Mais nous oublions cette particularité (intégrale nulle) et retenons seulement l'aspect d'une approximation de l'identité. Finalement, $\Theta_\lambda * f_\lambda$, $1/2 \le \lambda \le 1$, est une famille bornée dans $E^{2,m}$ et l'intégrale définissant $w_1(x)$ est à nouveau une intégrale de Bochner.

5. La preuve du théorème 1.

Nous retournons à la formulation donnée par T. Kato des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire à (3.3).

Soient f et g deux champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^3$.

On pose alors $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}f(\frac{x}{\sqrt{t}})$, de même pour g_t et finalement

$$B(f,g) = \int_0^1 \mathbb{P}S(1-t)\nabla f_t \otimes g_t\, dt\,. \tag{5.1.}$$

Les coefficients du symbole matriciel de l'opérateur $\mathbb{P}\,S(1-t)\nabla$ sont
$\frac{\xi_j\xi_k\xi_\ell}{|\xi|^2}\exp(-(1-t)|\xi|^2)$ et la preuve du lemme 4 s'adapte immédiatement à ce cas.

Il vient donc

Lemme 5.— *Pour tout entier m, il existe une constante C_m telle que l'on ait, si $\|\cdot\|_{(1)}$ désigne la norme dans $E^{1,m}$, et $\|\cdot\|_{(2)}$, celle dans $E^{2,m}$,*

$$\|B(f,g)\|_{(2)} \leq C_m \|f\|_{(1)} \|g\|_{(1)} \,. \tag{5.2}$$

Chercher des solutions auto-similaires revient à résoudre

$$f(x) = u_1(x) - B(f,f)(x) \tag{5.3}$$

où $u_0(x)$ est la condition initiale et $u_1 = S(1)u_0$.
On suppose que $u_0(x)$ est homogène de degré -1 et que la restriction de $u_0(x)$ à la sphère unité $|x| = 1$ appartient à $C^m(S^2)$ avec une norme ne dépassant pas η.

Alors le schéma itératif défini par

$$f^{(n+1)} = u_1(x) - B\left(f^{(n)}, f^{(n)}\right) \tag{5.4}$$

où, par exemple, $f^{(0)} = 0$ converge, au sens de la norme de $E^{1,m}$, vers une solution de (5.3).

Le lemme "abstrait" assurant la convergence de l'algorithme est le suivant

Lemme 6.— *Soit X un espace de Banach et $B : X \times X \to X$ une application bilinéaire telle que, $\|\cdot\|$ désignant la norme dans X, on ait, pour tout $x \in X$ et tout $y \in X$,*

$$\|B(x,y)\| \leq \gamma \|x\| \|y\| \,. \tag{5.5}$$

Alors, pour tout $y \in X$ vérifiant $\|y\| < \frac{1}{4\gamma}$, l'algorithme itératif défini par $x^{(0)} = 0$ et $x^{(n+1)} = y + B(x^{(n)}, x^{(n)})$ converge, au sens de la norme de X, vers une solution de

$$x = y + B(x,x) \tag{5.6}$$

vérifiant $\|x\| < \frac{1-\sqrt{1-4\gamma\|y\|}}{2\gamma}$.

En outre, (5.6) possède une unique solution x verifiant $\|x\| < \frac{1}{4\gamma}$ et cette solution est celle fournie par l'algorithme itératif si $\|y\| < \frac{3}{16\gamma}$.

Le théorème 1 est donc complètement démontré.

6. Retour aux solutions d'énergie finie.

Nous nous proposons de donner une version *locale* du Théorème 1 en partant d'une condition initiale $u_0(x)$, d'énergie finie qui soit approximativement homogène de degré -1 en 0.
Voici comment $u_0(x)$ est définie. On part d'un champ de vecteurs $U_0(x)$, de divergence nulle, homogène de degré -1 et de classe C^m en dehors de 0. On suppose ici $m \geq 1$.
Ensuite on définit $\widetilde{u}_0(x) = \varphi(x)U_0(x)$ où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est égale à 1 au voisinage de 0 .

Enfin on pose $u_0 = \mathbb{P}(\widetilde{u}_0)$.

Lemme 7.— *On a* $u_0(x) = \widetilde{u}_0(x) + r_0(x)$ *où* $r_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

En effet $\mathbb{P}[\varphi U_o] - \varphi\mathbb{P}(U_0) = \int K(x-y)(\varphi(y)) - \varphi(x))U_0(y)dy$ où $K(x-y)$ est le noyau-distribution de l'opérateur $\mathbb{P}$.

Si $\varphi = 1$ sur la boule $|x| \leq r$ $(r > 0)$, on distinguera les cas $|x| \leq r/2$ et $|x| > r/2$. Si $|x| \leq r/2$, on découpe l'intégrale en en $|y| \leq r$ et $|y| > r$. Dans le premier cas, $\varphi(y) - \varphi(x) = 0$ et dans le second, on majore $|K(x-y)(\varphi(y) - \varphi(x))U_0(y)|$ par $C|x-y|^{-n}|y|^{-1}$.

Si $|x| > r/2$, on découpe de même l'intégrale en $|y| < r/4$ et en $|y| > r/4$, et les majorations sont immédiates.

Théorème 2.— *Avec les notations précédentes, il existe* $\eta > 0$ *et* $T > 0$ *tels que si la norme* C^m *de* U_0 *sur la sphère unité ne dépasse pas* η*, la solution* $u(x,t)$ *des équations de Navier-Stokes (au sens de (3.3)) associée à la condition initiale* $u(x,0) = u_0(x)$ *s'écrit*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + r(x,t) \tag{6.1}$$

où $\frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ *est la solution auto-similaire associée à la condition initiale* $U_0(x)$ *et* $r(x,t) \in L^\infty([0,T]) \times \mathbb{R}^3$.

On cherchera $r(x,t)$ en appliquant une méthode de point fixe dans l'espace de Banach $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3) = X$. Pour alléger les notations, nous écrirons $u(t)$ au lieu de $u(x,t)$, $U(t)$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ et $r(t)$ au lieu de $r(x,t)$.

On cherchera donc $u(t)$ sous la forme $r(t) + U(t)$.

Nous avons alors

$u(t) = S(t)u_0 + B(u(t), u(t))$
et
$U(t) = S(t)U_0 + B(U(t), U(t))$.

Cela entraîne

$$r(t) = S(t)(u_0 - U_0) + B(r(t), U(t)) + B(U(t), r(t)) + B(r(t), r(t))\,. \tag{6.2}$$

Mais, grâce au Lemme 7, $u_0 - U_0 = \rho_0$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^3)$.
Par ailleurs, U appartient également à $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ et sa norme L^∞ tend vers 0 avec celle de U_0 dans $C(S^2)$. On utilise alors le lemme (évident) suivant

Lemme 8.— *Si $U \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, alors l'opérateur linéaire défini par $r(t) \to B(r(t), U(t))$ est borné dans $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ et la norme de cet opérateur ne dépasse pas $C_0\|U\|_\infty$ où C_0 ne dépend pas de T.*

En effet, l'opérateur bilinéaire $B(u(t), v(t))$ est défini par $\int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\nabla(u(s)\otimes v(s))ds$.
La norme de $\mathbb{P}S(t-s)\nabla : L^\infty(dx) \to L^\infty(dx)$ est bornée par $\frac{C_0}{\sqrt{t-s}}$.

Dans le cas qui nous intéresse $u(s)$ est $U(s)$ dont la norme L^∞ est $\frac{1}{\sqrt{s}}\|U\|_\infty$. Tout se termine par l'observation suivante $\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} = \pi$.

Par un raisonnement semblable, on établit que $\|B(r(t), r(t))\| \le C\sqrt{T}\|r(t)\|^2$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)$.

Finalement on est amené à résoudre, par un algorithme de point fixe, l'équation

$$x = y + L(x) + B(x, x) \tag{6.3}$$

où $L : X \to X$ est une application linéaire continue, de norme λ, et où $B : X\times X \to X$ est une application bilinéaire continue telle que $\|B(u,v)\| \le \gamma\|u\|\|v\|$.

On suppose alors que $0 \le \lambda < 1$ et que $\|y\| < \frac{(1-\lambda)^2}{4\gamma}$.

Dans ces conditions, l'algorithme de point fixe défini par $x^{(o)} = 0$, $x^{(n+1)} = y + L(x^{(n)}) + B(x^{(n)}, x^{(n)})$ converge, au sens de la norme de X, vers une solution x de (6.3).
Cela suffit à établir la preuve du Théorème 2.

7. Généralisation.

Les normes $\dot{E}^{1,m}$ sont très naturelles pour étudier des fonctions homogènes de degré -1. Mais il y a d'autres choix intéressants. On peut remplacer $\dot{E}^{1,m}$ par l'espace de Besov homogène $\dot{B}_3^{0,\infty}(\mathbb{R}^3)$ qui, dans l'analyse de Littlewood-Paley, est défini par $\sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\Delta_j(f)\|_3 < \infty$. Alors il existe deux constantes positives β et η telles que si $u_0(x)$ est homogène de degré -1, vérifie div $u_0 = 0$ (au sens des distributions) et $\|u_0\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} < \eta$, alors il existe une et une seule solution de (3.3) de la forme $u(t) = S(t)u_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} w(\frac{x}{\sqrt{t}})$ où $w \in L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\|w\|_3 < \beta$.

Le terme d'erreur, qui est la différence entre l'évolution non-linéaire $u(t)$ et l'évolution linéaire $S(t)u_0$ appartient à un espace "plus petit" (à savoir, $L^3(\mathbb{R}^3)$) que celui auquel appartient la condition initiale $u_0(x)$. On retrouve une situation déjà rencontrée dans le Théorème 1.

Remarquons que les auteurs de [2] construisent également des solutions auto-similaires dans un cadre fonctionnel différent.

Références.

[1] P. FEDERBUSH. *Navier and Stokes meet the wavelet*, Commun. Math. Phys. **155** (1993), 219-248.

[2] Y. GIGA, T. MIYAKAWA. *Navier-Stokes flow in $\mathbb{R}^3$ with measures as initial vorticity and Morrey spaces*, Comm. in PDE **14***(5)* (1989), 577-618.

[3] T. KATO. *Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^n$ with applications to weak solutions*, Math. Zeit. **187** (1984), 471-480.

[4] M. TAYLOR. *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations*, Comm. in PDE **17** (1992), 1407-1456.

Marco Cannone
CEREMADE
Université de Paris-Dauphine
75775 Paris Cedex 16

Yves Meyer
CEREMADE
Université de Paris-Dauphine
75775 Paris Cedex 16

Fabrice Planchon
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex