Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. L. Joly
G. Métivier
J. Rauch

Compacité par compensation trilinéaire et optique géométrique non linéaire

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A3_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

COMPACITE PAR COMPENSATION TRILINEAIRE ET OPTIQUE GEOMETRIQUE NON LINEAIRE

J.L. JOLY - G. METIVIER - J. RAUCH

Exposé n° III

23 novembre1993

COMPACITÉ PAR COMPENSATION TRILINÉAIRE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE NON LINÉAIRE.

J.L. Joly [1]
CEREMAB URA 226 CNRS, Univ. de Bordeaux I
33405 Talence

G. Métivier [1]
IRMAR URA 305 CNRS, Univ. de Rennes I
35042 Rennes

J. Rauch [1,2]
Dept. of Math, Univ. of Michigan
Ann Arbor MI 48109, USA

[1] partially supported by NATO grant CRG 890904.
[2] partially supported by NSF and ONR grants DMS 9003256 and N O14 92 J 1245.

1. Introduction.

De nombreux problèmes non linéaires conduisent à l'étude du comportement asymptotique de familles de solutions. Une difficulté pour obtenir des équations limites, est d'analyser le défaut de compacité locale qui peut être provoqué par deux phénomènes distincts : concentration et oscillations. Pour d'écrire ces dernires, une approche consiste à introduire les mesures de Young associées à une famille de solutions u^ε, i.e. les limites vagues des mesures de probabilités $\delta_{\lambda=u^\varepsilon(x)}$ (voir [Y], [T1], [T2], [DP1], [Ev]...). Le problème est alors de savoir s'il existe des équations de propagation qui déterminent les mesures de Young. Bien entendu, on ne prétend pas apporter une réponse générale à ces questions. Au contraire, on va se restreindre à un cas très particulier, celui des systèmes hyperboliques semi-linéaires en dimension un d'espace. Notre analyse s'appuie sur notre étude antérieure des solutions oscillantes à haute fréquence de tels systèmes ([JMR1]), dont l'asymptotique est gouvernée par les équations de l'optique géométrique non linéaire. Dans ce cadre, un mécanisme fondamental est celui de l'interaction résonante des oscillations (voir [T2], [T3], [J], [MR],[K], [HMR], [McLPT], [JMR1 à 4], [S]...). L'objet de cet exposé est de montrer que l'analyse des rénonances est aussi un élément crucial dans l'étude des mesures de Young.

1) Nous donnons un exemple de système 3×3, pour lequel il existe deux familles de solutions ayant des mesures de Young différentes, bien que leur données initiales admettent la même mesure de Young. Cela est du à l'existence, dans l'un des deux cas, d'une résonance, le mécanisme de la résonance dépendant des phases d'oscillation alors que les mesures de Young n'en dépendent pas.

2) À l'inverse, pour les systèmes **non résonants** 3×3 ou à non linéarité quadratique, nous établissons des équations de propagation qui déterminent les mesures de Young des solutions à partir de celles des données initiales. En outre, convenablement interprétées, ces équations sont équivalentes à celles de l'optique géométrique non linéaire.

L'idée essentielle dans cette étude, est que la non résonance implique que les oscillations qui se propagent dans des directions différentes sont **indépendantes**. Cette indépendance est traduite par un théorème de compacité par compensation, qui est à la base des résultats présentés ici. Les preuves complètes se trouvent dans [JMR5].

2. Résonances et non compacité par compensation.

Considérons sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, n champs de vecteurs X_k deux à deux indépendants. La question que l'on se pose est la suivante. Considérons des suites u_k^ε bornées dans $L^\infty(\Omega)$ telles que les suites $X_k u_k^\varepsilon$ soient bornées dans $L^\infty(\Omega)$. Quand peut-on affirmer que les convergences faibles $u_k^\varepsilon \rightharpoonup \underline{u}_k$ impliquent la convergence faible des produits $u_1^\varepsilon ... u_n^\varepsilon \rightharpoonup \underline{u}_1 ... \underline{u}_n$?

Les résonances sont un obstacle à une telle continuité faible.

DÉFINITION 2.1. *Une résonance sur un ouvert ω est un n-uple de fonctions C^∞ sur*

ω, $(\varphi_1, .., \varphi_n)$ telles que

$$X_k \varphi_k = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} d\varphi_k = 0. \tag{2.1}$$

La résonance est triviale lorsque $d\varphi_j(y) = 0$ pour tout j et tout $y \in \omega$.

PROPOSITION 2.2. *Supposons que $(\varphi_1, .., \varphi_n)$ soit une résonance non triviale sur ω pour les champs X_k. Alors il existe $a_k \in C_0^\infty(\omega)$, tels que*

1) *les fonctions $u_k^\varepsilon(y) := a_k(y) e^{i\varphi_k(y)/\varepsilon}$ sont bornées dans $L^\infty(\omega)$, ainsi que $X_k u_k^\varepsilon$.*
2) *Une au moins des suites u_k^ε converge faiblement vers 0.*
3) *Le produit $u_1^\varepsilon ... u_n^\varepsilon$ ne converge pas faiblement vers 0.*

Preuve. Il existe j tel que $d\varphi_j(y) \neq 0$ sur $\omega' \subset \omega$. Prendre les a_k supportés dans ω'.

3. Remarques sur la résonance.

Les résonances ne dépendent pas des champs X_k mais des feuilletages associés. La donnée de n feuilletages est connue sous le nom de n-tissu (Cf [BB] [P]). Les résonances correspondent aux relation abélienne des tissus. L'espace des résonances (modulo des constantes) pour un n-tissu, est de dimension au plus $(n-1)(n-2)/2$ ([BB], [P], [JMR1]).

EXEMPLE 3.1. Si les X_k sont à coefficients constants, l'espace des résonances est de dimension maximale. Les phases résonantes sont des polynômes de degré inférieur à $n-2$.

EXEMPLE 3.2. Un système de deux champs indépendants n'est jamais résonant.

EXEMPLE 3.3. Pour $n = 3$, l'espace des résonances est de dimension au plus 1. Les champs constants sont résonants, les phases résonantes étant linéaires. Génériquement, il n'y a pas de résonances non triviales. Un 3-tissu associé à trois champs deux à deux indépendants, est engendré dans des coordonnées locales convenables, par

$$X_1 := \partial_t \quad , \quad X_2 := \partial_x \quad , \quad X_3 := \partial_t + a(t, x)\, \partial_x \quad , \tag{3.1}$$

avec $a \neq 0$. Il existe une résonance non triviale si et seulement si a est le produit d'une fonction de t et d'une fonction de x, ou encore

$$\partial_t\, \partial_x\, Ln\,(a) = 0. \tag{3.2}$$

Pour les 3-tissus, un invariant géométrique, appelé courbure, caractérise par son annulation, l'existence d'une résonance non triviale ([BB], [JMR1]). Dans l'exemple (3.1), cette courbure est égale, à une normalisation près, à $\partial_t \partial_x Ln\,(a)$.

On renvoie à la section 3 de [JMR1] pour une discussion plus détaillée des aspects géométriques de la résonance, en relation avec les systèmes d'équations non linéaires.

4. Non résonance et compacité par compensation

Revenons à la situation du paragraphe 2, avec $n = 3$. Notons $\mathcal{W}(\Omega, X_k)$ l'espace des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $X_k u \in L^2(\Omega)$. On vérifie facilement que l'application $(u_1, u_2, u_3) \to u_1 u_2 u_3$ est continue de $\mathcal{W}(\Omega, X_1) \times \mathcal{W}(\Omega, X_2) \times \mathcal{W}(\Omega, X_3)$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

THÉORÈME 4.1. *Supposons que X_1, X_2, X_3 sont trois champs, deux à deux indépendants, tels que la courbure du 3-tissu associé ne s'annule pas en $\underline{y}$. Alors il existe un voisinage ω de $\underline{y}$ tel que pour tout triplet u_k^ε de familles bornées dans $\mathcal{W}(\omega, X_k)$, telles que u_k^ε converge faiblement vers $\underline{u}_k$, le produit $u_1^\varepsilon\, u_2^\varepsilon\, u_3^\varepsilon$ converge faiblement vers $\underline{u}_1\, \underline{u}_2\, \underline{u}_3$.*

Compte tenu de la discussion esquissée à l'Exemple 3.3, la non annulation de la courbure équivaut à la non existence d'une résonance non triviale. Cela montre que pour $n = 3$, les résonances constituent effectivement le seul obstacle à la continuité faible du produit.

Ce théorème est différent des théorèmes antérieurs ([M1], [M2], [T1], [DP1], [CLMS]), en ce sens qu'il ne repose pas sur une étude "à coefficients figés". Au contraire, les champs constants sont toujours résonants et la continuité faible est fausse (Proposition 2.2.). Il s'apparente plutôt à certains résultats de compacité par compensation bilinéaires qui utilisent des idées de propagation de compacité microlocale ([T4], [G1]).

5. L'estimation principale.

L'énoncé du Théorème 4.1 est local. Il suffit de montrer la convergence

$$\int u_1^\varepsilon(y)\, u_2^\varepsilon(y)\, u_3^\varepsilon(y)\; dy \quad \to \quad \int \underline{u}_1(y)\, \underline{u}_2(y)\, \underline{u}_3(y)\; dy \tag{5.1}$$

lorsque les u_k^ε sont à support dans un petit voisinage de $\underline{y}$ où la courbure ne s'annule pas.

Soit $\Delta_0(\eta) + \sum_{j\geq 1} \Delta(2^{-j}\eta) = 1$ une décomposition dyadique de l'unité et $\Delta_0(D_y)\, u + \sum \Delta(2^{-j} D_y)\, u = u$ la décomposition de Littlewood-Paley associée. Décomposant chaque fonction u_k^ε, on se ramène à montrer la continuité faible de quantités de la forme

$$\sum_j \int \Delta(2^{-j} D_y)\, u_1^\varepsilon(y)\;\, \Delta(2^{-j+\alpha} D_y)\, u_2^\varepsilon(y)\;\, S(2^{-j+\beta} D_y)\, u_3^\varepsilon(y)\; dy \tag{5.2}$$

où $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| \leq 2$ et $S(2^{-j}\eta) = \Delta_0(\eta) + \sum_{1\leq k\leq j} \Delta(2^{-k}\eta)$.

La convergence faible des u_k^ε implique pour chaque j fixé, la convergence forte de $\Delta(2^{-j} D_y)\, u_k^\varepsilon$. Chaque terme de la série est donc continu pour la convergence faible. En outre, on a des estimations du type

$$||\, \Delta(2^{-j} D_y)\;\, u_k^\varepsilon\, ||_{\mathcal{W}(X_k)} \;\leq\; C\; \delta_j(u_k^\varepsilon)\;\, ||\, u_k^\varepsilon\, ||_{\mathcal{W}(X_k)} \tag{5.3}$$

avec $\sum_j \{\, \delta_j(u_k^\varepsilon)\, \}^2 \leq 1$. Par conséquent, la convergence uniforme de la série (5.2), et donc sa continuité faible, résultent de l'estimation suivante.

THÉORÈME 5.1. *Sous les hypothèses du théorème* 4.1, *on peut choisir des coordonnées locales, un voisinage de* $\underline{y}$, *et une suite* δ_j *qui tend vers zéro, tels que pour tout triplet* $u_k \in \mathcal{W}(\omega, X_k)$, *à support compact dans* ω,

$$\left| \int \Delta(2^{-j}D)\, u_1\; \Delta(2^{-j+\alpha}D)\, u_2\; S(2^{-j+\beta}D)\, u_3\; dy \right| \leq \delta_j \,\| u_1 \|_{\mathcal{W}(\omega,X_1)}\; \| u_2 \|_{\mathcal{W}(\omega,X_2)}\; \| u_3 \|_{\mathcal{W}(\omega,X_3)}. \tag{5.4}$$

6. Indications sur la preuve du théorème 5.1.

On procède par l'absurde en supposant pour simplifier que $\alpha = \beta = 0$. Si l'estimation (5.4) est fausse, il existe $\delta > 0$, une suite de réels h tendant vers 0, de la forme 2^{-j}, et des suites u_k^h bornées dans $\mathcal{W}(\omega, X_k)$ et à support compact dans ω, telles que

$$\left| \int \left(\Delta\,(hD)\, u_1^h \right) \left(\Delta\,(hD)\, u_2^h \right) \left(S\,(hD)\, u_3^h \; dy \right) \right| \;\geq\; \delta. \tag{6.1}$$

On utilise la notion de mesure semi-classique microlocale de défaut introduite par P. Gérard ([G 2],voir aussi [G L]). Si u^h est une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe une sous suite et une mesure de Radon positive et bornée sur $T^*(\mathbb{R}^2)$, appelée mesure semiclassique de défaut de la suite extraite, telle que pour toute fonction $a \in \mathcal{S}(T^*(\mathbb{R}^2)$, on ait

$$\int \left(a(y, hD_y)\, u^h(y) \right) \overline{u}^h(y) dy \quad \rightarrow \quad \int a(y,\eta)\; \mu\,(dy\, d\eta). \tag{6.2}$$

LEMME 6.1.([G 2]) *Soit* v^h *et* w^h *deux suites bornées dans* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *qui admettent des mesures semiclassiques de défaut étrangères. Alors, pour toute fonction* $\sigma \in \mathcal{S}(T^*(\mathbb{R}^2))$

$$\int v^h(y)\; \left(\sigma\,(hD_y)\, w^h(y) \right)\; dy \quad \rightarrow \quad 0. \tag{6.3}$$

La stratégie est de montrer que, après extraction de sous suites, $v^h := u_3^h$ et $w^h := \Delta(hD)\, u_1^h\; \Delta(hD)\, u_2^h$ admettent des mesures semiclassiques de défaut étrangères, (6.3) étant alors en contradiction avec l'hypothèse (6.1).

Supposons que les champs X_k ont préalablement été mis sous la forme (3.1), localement autour de $\underline{y}$, et que leur définition a été étendue à $\mathbb{R}^2$.

LEMME 6.2. *Les mesures semiclassiques de défaut,* ν, *des suites extraites de* $v^h := u_3^h$, *sont portées par* $\mathcal{C} \cap T^*(\omega)$ *où* $\mathcal{C}$ *est l'ensemble caractéristique* $\mathcal{C} := \{ \tau + a\,(t,x)\, \xi \,=\, 0 \}$. *Si* π_1 *[resp.* π_2 *] désigne la projection* $(t,x,\tau,\xi) \rightarrow (x,\xi)$ *[resp.* (t,τ)*], alors pour tout* (x,ξ) *et tout* (t,τ) $\Gamma_{x,\xi} := \pi_1^{-1}(x,\xi) \cap \mathcal{C} \cap T^*\omega$ *et* $\Gamma^{t,\tau} := \pi_2^{-1}(t,\tau) \cap \mathcal{C} \cap T^*\omega$, *vérifient*

$$\nu(\Gamma_{x,\xi}) = \nu(\Gamma^{t,\tau}) = 0 \tag{6.4}$$

La première affirmation est un résultat d'ellipticité microlocale (cf [G 2]). De plus, ν vérifie une équation de transport $H_{X_3}\nu = \nu_1$ où H_{X_3} est le champ hamiltonien associé à X_3 et ν_1 une mesure absolument continue par rapport à ν. Dans des coordonnées (y_1, y_2) où X_3 est colinéaire à ∂_{y_1}, on montre que

$$\nu\,(dy\,d\eta) \ll \tilde{\nu}\,(dy_2\,d\eta_2) \otimes dy_1 \otimes \delta_{\eta_2=0}, \tag{6.5}$$

où $\nu \ll \nu'$ signifie que la mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure ν'. (6.5) implique qu'une courbe transverse aux lignes de champs de X_3 est de ν-mesure nulle. La seconde partie du lemme en résulte.

LEMME 6.3. *Les mesures semiclassiques de* $w^h := \big(\Delta(hD)\,u_1^h\big)\,\big(\,\Delta(hD)\,u_2^h\big)$ *sont supportées dans* $T^*(\omega)$, *nulles autour de* $\eta = 0$, *et absolument continues par rapport à un produit tensoriel de mesures de Radon positives bornées*

$$\mu\,(dy\,d\eta) \ll \mu_2\,(dt\,d\tau) \otimes \mu_1\,(dx\,d\xi). \tag{6.6}$$

Si $X_1u_1^h = 0$ et $X_2u_2^h = 0$, alors u_1^h et u_2^h sont respectivement de la forme $f_1^h(x)$ et $f_2^h(t)$. Alors, $\mu\,(dy\,d\theta) = \mu_2\,(dt\,d\tau) \otimes \mu_1\,(dx\,d\xi)$ avec μ_j une mesure semiclassique dans $T^*(\mathbb{R})$ de f_j^h. Lorsque les second membres $X_ku_k^h$ ne sont pas nuls, la preuve est techniquement plus lourde et résulte de (6.5) pour les mesures semi-classiques de u_1^h et u_2^h.

Le résultat suivant, où intervient la condition de non résonance, termine l'analyse.

THÉORÈME 6.4. *Soit* ω *un rectangle et soit* $a(t,x) \in C^\infty(\overline{\omega})$ *telle que* $\partial_t\partial_x Ln\,(a) \neq 0$ *sur* $\overline{\omega}$. *Soit* μ *une mesure de Radon sur* $T^*\omega$, *nulle au voisinage de* $\{\eta = 0\}$ *et vérifiant* (6.6). *Soit* ν *une mesure sur* $T^*\omega$, *portée par* $\mathcal{C} := \{\tau = a\,(t,x)\,\xi\}$ *et vérifiant* (6.4). *Alors,* μ *et* ν *sont étrangères.*

Supposons d'abord que les points $\{x, \xi\}$ et $\{t, \tau\}$ sont respectivement de μ_1 et μ_2 mesure nulle. Notons $\mathcal{C}_{x,\xi} := \{(t,\tau) \mid (t,x,\tau,\xi) \in \mathcal{C}\}$. Ce sont des courbes, et l'hypothèse de non résonance implique que $\mathcal{C}_{x,\xi}$ et $\mathcal{C}_{x',\xi'}$ se coupent transversalement si $(x,\xi) \neq (x',\xi')$. Comme les points sont de mesure nulle et que μ_1 est bornée et il en résulte que l'ensemble des (x,ξ) tels que $\mu_1(\mathcal{C}_{x,\xi}) > 0$ est au plus dénombrable, donc de μ_2 mesure nulle. Le théorème de Fubini implique alors que $\mu_1 \otimes \mu_2(\mathcal{C}) = 0$.

Les points de mesures strictement positives, sont éliminés en utilisant l'hypothèse (6.4). On renvoie à [JMR 5] pour une preuve complète.

7. Non résonance et indépendance des mesures de Young.

Venons en maintenant aux applications aux systèmes semi-linéaires strictement hyperboliques en dimension un d'espace. Après diagonalisation, un tel système s'écrit :

$$X_ku_k := \partial_t u_k - c_k(t,x)\,\partial_x u_k = F_k(t,x,u_1,..,u_n) \quad ,1 \leq k \leq n, \tag{7.1}$$

avec $c_1 < .. < c_n$. Soit $\Omega := \{(t,x) \mid 0 \leq t \leq T_0, \gamma_n(t) \leq x \leq \gamma_1(t)\}$, où $\gamma_n(t)$ [resp. $\gamma_1(t)$] est la caractéristique de X_n [resp. X_1] issue de l' extrémité gauche [resp. droite] d'un intervalle compact $\omega \subset \mathbb{R}$. Supposons que u^ε soit une suite de solutions de (7.1) bornée dans $L^\infty(\Omega)$, construite, par exemple, par résolution du problème de Cauchy.

Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer qu'il existe une mesure de Young, c'est-à-dire une famille mesurable de probabilités $\mu_y(d\lambda_1, .., d\lambda_n)$ sur $\mathbb{R}^n$, paramétrée par $y := (t,x) \in \Omega$, telle que pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction $\varphi \in C_0^0(\Omega)$,

$$\text{(7.2)} \qquad \int \varphi(y)\ f(u^\varepsilon(y))\ dy \quad \rightarrow \quad \int \varphi(y) f(\lambda_1, .., \lambda_n)\ \mu_y(d\lambda_1..d\lambda_n)\ dy.$$

En particularisant f, on voit que chaque composante u_k^ε admet une mesure de Young, qui est la probabilité marginale de μ_y pour la projection $(\lambda_1, .., \lambda_n) \rightarrow \lambda_k$. Pour $f \in C^0(\mathbb{R})$,

$$\text{(7.3)} \qquad \int \varphi(y)\ f(u_k^\varepsilon(y))\ dy \quad \rightarrow \quad \int \varphi(y) f(\lambda)\ \mu_{k,y}(d\lambda)\ dy.$$

De même, quitte à extraire une nouvelle sous suite, on peut supposer que les données initiales $u_k^\varepsilon(0,.)$ admettent des mesures de Young, qu'on notera $\nu_{k,x}(d\lambda), x \in \omega$.

La question est de savoir si la mesure μ est déterminée par la mesure initiale ν. Pour étudier la propagation des mesures μ_k, multiplions l'équation $X_1 u_1^\varepsilon = F_1$ par $\varphi(y) f'(u_1^\varepsilon)$ et intégrons par parties. On choisit les fonctions test φ nulles sur $\partial\Omega \backslash \omega$. On obtient :

$$\text{(7.4)} \qquad \begin{aligned} -\int ({}^t X_1 \varphi)(y) f(u_1^\varepsilon(y))\, dy \ + \int \varphi\,(0,x) f(u_1^\varepsilon(0,x))\, dx \\ + \int \varphi(y)\ f'(u_1^\varepsilon(y))\ F_1(y, u_1^\varepsilon(y), ..), u_n^\varepsilon(y))\ dy \ = \ 0 \end{aligned}$$

La limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, s'exprime à l'aide des mesures de Young. On obtient

$$\text{(7.5)} \qquad \begin{aligned} -\int ({}^t X_1 \varphi)\,(y) f(\lambda_1))\, \mu_{1,y}(d\lambda_1)\, dy \ + \int \varphi\,(0,y) f(\lambda_1))\, \nu_{1,x}(d\lambda_1)\, dx \\ + \int \varphi(y) f'(\lambda_1) F_1(y, \lambda_1, .., \lambda_n)\ \mu_y(d\lambda_1, .., d\lambda_n)\, dy \ = \ 0. \end{aligned}$$

En éliminant φ et f et en notant μ_1 la mesure $\mu_{1,y}(d\lambda_1) dy$ sur $\Omega \times \mathbb{R}$, cela devient

$$\text{(7.6)} \qquad X_1 \mu_1 - \partial_{\lambda_1}(m_1) = 0 \quad , \quad \mu_{1|t=0} = \nu_1$$

où m_1 est la mesure sur $\Omega \times \mathbb{R}$ définie par $m_1 := m_{1,y}(d\lambda_1) dy$, $m_{1,y}(d\lambda_1)$ étant la mesure marginale de $F_1(y, \lambda_1, .., \lambda_n)\ \mu_y(d\lambda_1, .., d\lambda_n)$. On obtient des équations semblables pour les autres mesures μ_k. Mais les m_k dépendent de μ. Pour clore le système obtenu, il faut donc pouvoir **exprimer μ à l'aide des mesures marginales μ_k.**

L'observation fondamentale, est que, **lorsque $n \leq 3$, la non résonance des champs X_k implique l'indépendance des mesures μ_k.** Le cas $n = 1$ est trivial. Le cas $n = 2$ relève du théorème classique de compacité par compensation bilinéaire.

THÉORÈME 7.1. *Supposons que $n = 3$ et que la courbure du 3-tissu engendré par les champs X_k ne s'annule pas sur Ω. Alors, pour presque tout $y \in \Omega$ on a*

$$\mu_y(d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_2) = \mu_{1,y}(d\lambda_1) \otimes \mu_{2,y}(d\lambda_2) \otimes \mu_{3,y}(d\lambda_3) \tag{7.7}$$

Il suffit de montrer que pour $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, 3$, on a

$$\int \varphi(y) f_1(\lambda_1), f_2(\lambda_2), f_3(\lambda_3)\ \mu_y(d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3)\ dy\ = \int \varphi(y) f(\lambda_1), f_2(\lambda_2), f_3(\lambda_3)\ \mu_{1,y}(d\lambda_1)\, \mu_{2,y}(d\lambda_2)\, \mu_{3,y}(d\lambda_3)\ dy. \tag{7.8}$$

Cela revient à montrer que les fonctions $v_k^\epsilon := f_k(u_k^\epsilon)$ qui convergent faiblement vers $\underline{v}_k(y) := \int f_k(\lambda_k)\, \mu_{k,y}(d\lambda_k)$, sont telles que le produit $v_1^\epsilon\, v_2^\epsilon\, v_3^\epsilon$ converge faiblement vers $\underline{v}_1\, \underline{v}_2\, \underline{v}_3$. Or $X_k v_k^\epsilon = f'(u_k^\epsilon)\, X_k u_k^\epsilon$, et les v_k^ϵ sont bornées dans l'espace $\mathcal{W}(\Omega, X_k)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 4.1.

8. Équations pour les mesures de Young. Lien avec l'optique géométrique non linéaire.

Considérons un système (7.1) avec $n = 3$. La discussion s'applique aussi lorsque $n > 3$ et les F_k sont quadratiques en u ou plus généralement lorsque les $F_k(t, x, u)$ vérifient $\partial^3 F_k / \partial u_j \partial u_l \partial u_m = 0$ pour tous les quadruples d'entiers (k, j, l, m) deux à deux différents.

On suppose que la courbure du 3-tissu engendré par les X_k ne s'annule pas sur Ω. En injectant (7.7) dans (7.6), on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 8.1. *Sous les hypothèses précédentes, les mesures de Young μ_k vérifient :*

$$X_k \mu_k - \partial_{\lambda_k}(A_k(y, \lambda_k)\mu_k)\ =\ 0 \quad , \quad \mu_{k|t=0} = \nu_k \tag{8.1}$$

avec

$$A_1(y, \lambda_1) := \int F_1(y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\ \mu_{2,y}\,(d\lambda_2)\ \mu_{3,y}\,(d\lambda_3) \tag{8.2}$$

et des formules analogues pour A_2 et A_3.

A_1 dépend de μ_2 et μ_3. Les équations (8.1) sont donc couplées. Cependant, ce système est clos en ce sens qu'il est un système intégrodifférentiel ne portant que sur les μ_k. Le résultat suivant montre que les mesures μ_k sont déterminées par leurs données initiales ν_k.

THÉORÈME 8.2 *Le Problème de Cauchy* (8.1) *a au plus une solution (μ_1, μ_2, μ_3) telle que les $\{\mu_{k,y}\}_{y \in \Omega}$ sont des familles mesurables de probabilités supportées dans un compact $[-\Lambda, \Lambda] \subset \mathbb{R}$ indépendant de y.*

Introduisons les fonctions de répartition des probabilités $\mu_{k,y}$:

$$M_k(y,\lambda) := \mu_{k,y}(]-\infty,\lambda[). \tag{8.3}$$

Les équations (8.1) peuvent s'écrirent à l'aide des M_k. On peut aussi introduire les profils U_k de répartition des μ_k. Ils sont caractérisés par la condition suivante : pour $\theta \in]0,1[$

$$M_k(y,\lambda) > \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda > U_k(y,\theta). \tag{8.4}$$

$\mu_{k,y}$ est l'image par la fonction croissante $U_k(y,.)$ de la mesure $d\theta$ sur $]0,1[$, i.e.

$$\int f(\lambda_k)\ \mu_{k,y}(d\lambda_k) \ = \ \int_0^1 f(U_k(y,\theta))\ d\theta. \tag{8.5}$$

On détermine de même les profils $V_k(x,\theta)$ des mesures initiales $\nu_{k,x}(d\lambda_k)$.

THÉORÈME 8.3. *Les profils U_k sont solutions des équations suivantes :*

$$X_j U_j(y,\theta_j) = \int F_j(y,\, U_1(y,\theta_1),\, U_2(y,\theta_2),\, U_3(y,\theta_3))\ d\theta_k\ d\theta_l \quad , \quad U_{j\,|t=0} = V_j \tag{8.6}$$

où $\{j,k,l\} = \{1,2,3\}$.

Les équations (8.6) sont celles de l'optique géométrique non linéaire non résonante ([JMR1], [MR], [HMR]). Via la formule (8.5), elles déterminent, dans le cas $n = 3$ non résonant, toutes les mesures de Young des familles de solutions bornées de (7.1).

Le théorème 8.3 admet une réciproque beaucoup plus facile. Si les mesures de Young initiales sont données par des profils V_k, non nécessairement croissants, et si les U_k vérifient (8.6), alors les mesures μ_k données par (8.5) satisfont (8.1). Le théorème d'unicité 8.2 implique que ce sont les mesures de Young des solutions.

9. Un exemple de non détermination des mesures de Young en présence de résonances.

En présence d'une résonance, les mesures de Young des solutions ne sont pas complètement déterminées par celles des données initiales. Cela se vérifie sur l'exemple suivant :

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x)\, u_1^\varepsilon &= 0 & u_1^\varepsilon(0,x) &= \cos(\varphi(x)/\varepsilon) \\ (\partial_t + \partial_x)\, u_2^\varepsilon &= 0 & u_2^\varepsilon(0,x) &= \cos(\varphi(x)/\varepsilon) \\ \partial_t\, u_3^\varepsilon &= u_1^\varepsilon\, u_2^\varepsilon & u_3^\varepsilon(0,x) &= 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

Alors

$$u_1^\varepsilon\,(t,x) = \cos(\varphi(x+t)/\varepsilon) \quad , \quad u_2^\varepsilon\,(t,x) = \cos(\varphi(x-t)/\varepsilon) \quad , \tag{9.2}$$

$$u_3^\varepsilon(t,x) = \int_0^t \cos(\varphi(x+t)/\varepsilon)\ \cos(\varphi(x-t)/\varepsilon)\ ds. \tag{9.3}$$

LEMME 9.1 *i) Si* $\varphi(x) = x$, *alors* $u_3^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{2}\, t\cos(2x/\varepsilon) + O(\varepsilon)$,
ii) Si $\varphi(x) = x + x^2$, *alors* $u_3^\varepsilon(t,x) \to 0$ *uniformément pour* $|x| \le 1/2$ *et* t *borné.*

Le comportement de u_3^ε dépend de la création ou non d'une oscillation résonante entre les phases $\varphi(x+t)$ et $\varphi(x-t)$. C'est le cas lorsque $\varphi(x) = x$, la somme $\varphi(x+t) + \varphi(x-t)$ étant caractéristique pour le troisième champ ∂_t. Cela ne se produit pas dans le cas *ii)* et en fait, pour tout choix de φ qui n'est pas *i)*.

Pour une famille de la forme $u^\varepsilon(x) := U(\varphi(x)/\varepsilon)$ avec U continue, 2π- périodique et φ de classe C^1 avec $d\varphi \neq 0$ presque partout, et pour f continue, on a la convergence faible

$$f(u^\varepsilon) = f(U(\varphi/\varepsilon)) \quad \rightharpoonup \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(U(\theta))d\theta. \tag{9.4}$$

La mesure de Young de la suite u^ε est donc $\mu(d\lambda) \otimes dx$, où μ est l'image de $d\theta/2\pi$ par l'application U. En particulier, cette mesure **ne dépend pas de la phase** φ.

À l'oposé, lorsque $u^\varepsilon \to 0$ p.p., $f(u^\varepsilon) \rightharpoonup f(0)$ et la mesure de Young est $\delta_{\lambda=0} \otimes dx$.

On voit donc que les familles u_3^ε admetent des mesures de Young différentes dans les cas *i)* et *ii)* du lemme.

PROPOSITION 9.2. *Pour* $\varphi^{(1)}(x) = x$ *et* $\varphi^{(2)}(x) = x + x^2$, *les données de Cauchy* (2.2) *ont les mêmes mesures de Young. Mais les mesures de Young de* u_3^ε *sont différentes.*

Références.

[BB] W. BLASCHKE, G.BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer-Verlag, 1938.

[CLMS] F. COIFMAN, P.L.LIONS, Y.MEYER, S.SEMMES, *Compensated compactness and Hardy spaces*, C.R. Ac. Sc. Paris, 309 (1991) pp 945-949, et preprint.

[DP1] R. DI PERNA, *Compensated compactness and general systems of conservation laws*, Trans. of the Amer. Math. Soc, 292 (1985) pp 383-420 .

[DP2] R. DI PERNA, *Measure valued solutions of conservation laws*, Arch. for Rat. Mech. Anal., 8 (1985), pp 223-270.

[DPM] R. DI PERNA, A.MAJDA, *Oscillations and concentration in weak solutions of the incompressible fluid equations*, Comm. in Math. Physics, 108 (1987), pp 667-689.

[E] L.C.EVANS *Weak convergence methods for non linear partial differential equations*, Regional conference series in mathematics, 74 (1990), Providence RI, AMS.

[G1] P.GÉRARD, *Microlocal Defect measures* , Comm. in Partial Diff. Equ., 16 (1991), pp 1761-1794.

[G2] P.GÉRARD, *Mesures semi-classiques et ondes de Bloch*, in Séminaire équations aux dérivées partielles 1990-91, École Polytechnique.

[GL] P.GÉRARD, E.LEICHTNAM, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J., 71 (1993), pp 559-607.

[HK] J.HUNTER, J.KELLER, *Weakly nonlinear high frequency waves*, Comm. on Pure and Appl. Math., 36 (1983), pp 547-569.

[HMR] J.HUNTER, A.MAJDA, R.ROSALES, *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves II*, Studies in Appl. Math, 75 (1986), pp 187-226.

[J] J.L.JOLY, *Sur la propagation des oscillations par un système hperbolique nonlinéaire en dimension 1*, C.R.Ac. Sc. Paris, 296 (1983).

[JMR1] J.L.JOLY, G.MÉTIVIER, J.RAUCH, *Resonant one dimensional nonlinear geometric optics*, J. Func. Anal, 114 (1993) pp 106-231.

[JMR2] J.L.JOLY, G.MÉTIVIER, J.RAUCH, *Generic rigourous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves*, Duke Math. J., à paraître..

[JMR3] J.L.JOLY, G.MÉTIVIER, J.RAUCH, *Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics*, Ann. Scient. ENS Paris, à paraître..

[JMR4] J.L.JOLY, G.MÉTIVIER, J.RAUCH, *Coherent nonlinear waves and the Wiener algebra*, Ann. Inst. Fourier, à paraître .

[JMR5] J.L.JOLY, G.MÉTIVIER, J.RAUCH, *Trilinear compensated compactness and non linear geometric optics*, preprint 1993 .

[K] L.A.KALYAKIN, *Long waves asymptotics. Integrable equations as asymptotic limits of nonlinear systems*, Russian Math. Surveys, 44 (1989) pp 3-42 , Uspekhi Math. Nauk., 44 (1989), pp 5-34..

[McLPT] D.W.MC LAUGHLIN, G.PAPANICOLAOU, L.TARTAR, *Weak limits of semilinear hyperbolic systems with oscillating data*, in Macroscopic modelling of turbulent flows, Lecture notes in Physics Springer-Verlag, 230 (1985),pp 277-298..

[MR] A.MAJDA, R.ROSALES, *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves I*, Studies in Appl. Math., 71 (1984), pp 149-179.

[M1] F.MURAT, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Sup. di Pisa, 5 (1978) pp 489-507.

[M2] F.MURAT, *Compacité par compensation : condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant*, Ann. Scuola Sup. di Pisa, 8 (1981) pp 69-102.

[P] H.POINCARÉ *Sur les surfaces de translation et les fonctions Abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, 29 (1901), 61-86.

[S] S.SCHOCHET, *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J.Diff. Equ., to appear.

[T1] L.TARTAR, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in research notes in mathematics, nonlinear analysis and mechanics. Heriot-Watt symposium, vol 4, Knops R.J. ed., Pitmann Press, 1979.

[T2] L.TARTAR, *Solutions oscillantes des équations de Carleman*, in Séminaire Goulaouic- Schwartz 1980-81, École Polytechnique.

[T3] L.TARTAR, *Étude des oscillations dans les équations aux dérivées partielles non linéaires*,Trends and applications of pure mathematics to mechanics, Ciarlet-Roseau ed., Lecture notes in Physics, Springer-Verlag, 195 (1984), pp 384-412.

[T4] L.TARTAR, *H-measures : a new approach for studying homogeneization, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec A, 115 (1990), pp 193-230.

[Y] L.C.YOUNG, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Philadelphia-London, W.B. Saunders Co, 1969.

J.L. JOLY
CEREMAB
Université de Bordeaux I
33405 TALENCE

G. METIVIER
IRMAR
Université de Rennes I
35042 RENNES

J. RAUCH
Department of Mathematics
Ann Arbor MI 48109
USA