Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. Sjöstrand

Estimations sur les corrélations et principes du maximum

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 2, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A2_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

ESTIMATIONS SUR LES CORRELATIONS ET PRINCIPES DU MAXIMUM

J. SJÖSTRAND

Exposé n° II

19 Octobre 1993

Estimations sur les correlations et principes du maximum.

0. Introduction.

Dans [S1], [HS] et inspirés par [SiWYY] nous avons développé une méthode basée sur le principe du maximum, pour estimer le logarithme de la première fonction propre d'un opérateur de Schrödinger et pour majorer des corrélations pour certaines intégrales du type de Laplace. Voir aussi [H1,2,3] pour une introduction plus large à ce sujet, et pour d'autres résultats obtenus avec le même type de méthode.

Dans cet exposé, basé sur [S2], nous décrivons quelques nouvelles estimations obtenues par un emploi un peu plus systématique et conceptuel du principe de maximum.

1. La première fonction propre.

Soit B un espace de Banach réel de dimension finie m, et soit B^* son dual. Soit $A : B \to B$ une application linéaire, $\delta > 0$. Disons que A vérifie (mpδ) si on a:

$$\text{Si } t \in B,\ s \in B^*,\ \langle t,s\rangle = \|t\|_B\|s\|_{B^*},\ \text{alors } \langle At,s\rangle \geq \delta\|t\|_B\|s\|_{B^*}.$$

Exemple a. Si $B = B^* = \ell^2(\{1,..,m\})$, A symétrique $\geq \delta \geq 0$, alors A vérifie (mpδ).
Exemple b. Soit $B = \ell^p_\rho(\{1,..,m\})$, $p \in [1,\infty]$, $\rho : \{1,..,m\} \to]0,\infty[$, avec la norme $\|x\|_{\ell^p_\rho} = \|\rho x\|_{\ell^p}$, où $(\rho x)_j = \rho(j)x_j$. Soit $A = D + W$, où D est diagonale $\geq r_0 \geq r_1 \geq 0$ et où $\|W\|_{\mathcal{L}(\ell^p_\rho,\ell^p_\rho)} \leq r_1$. Alors A vérifie (mpδ). En fait, $B^* = \ell^q_{1/\rho}$, où $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et si $\langle t,s\rangle = \|t\|_B\|s\|_{B^*}$, alors $t_js_j \geq 0$ pour tout j. Donc $\langle Dt,s\rangle \geq r_0\|t\|_B\|s\|_{B^*}$, pendant que $|\langle Wt,s\rangle| \leq r_1\|t\|_B\|s\|_{B^*}$.

Soit $V \in C^\infty(\mathbf{R}^m;\mathbf{R})$ avec

$$(1.1)\qquad V''(x) = D + W''(x),\ \text{où } D \text{ est diagonale } \geq r_0 > r_1 \geq 0,\ \|W''(x)\|_{\mathcal{L}(B,B)} \leq r_1,$$

où $B = \ell^p_\rho$, $p \in [1,\infty]$, $\rho : \{1,..,m\} \to]0,\infty[$. Remarquons que (1.1) entraine que V est uniformement strictement convexe.

Théorème 1.1. *Soit $e^{-\phi(x)/h}$ la première fonction propre de $-\frac{h^2}{2}\Delta+V(x)$. Alors $\phi''(x) = \sqrt{D} + \psi''(x)$, où $\|\psi''(x)\|_{\mathcal{L}(B,B)} \leq \sqrt{r_0} - \sqrt{r_0 - r_1}$.*

Rappelons ici un résultat de Brascamp-Lieb [BL] qui dit que si l'on remplace (1.1) par $V''(x) \geq r_0$, alors $\phi''(x) \geq \sqrt{r_0}$. Ce résultat fut re-démontré par Singer-Wong-Yau-Yau [SiWYY] à l'aide du principe du maximum. Dans [S1] nous avons obtenu le Théorème 1.1 dans le cas particulier $D = I$. Nous espérons que notre nouvelle variante donnera plus de fléxibilité et permettra de traiter aussi des cas non-convexes.

Esquisse de la démonstration. Si μ est la plus petite valeur propre, nous avons l'équation de Riccati:

$$(1.2)\qquad V(x) - \mu = \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 - \frac{h}{2}\Delta\phi$$

et comme dans [SiWYY] et [S1], on obtient

$$V''(x) = \nabla\phi \cdot \partial_x \phi'' - \frac{h}{2}\Delta\phi'' + \phi'' \circ \phi'', \tag{1.3}$$

où bien avec $\phi'' = \sqrt{D} + \psi''$:

$$W''(x) = \nabla\phi \cdot \partial_x \psi'' - \frac{h}{2}\Delta\psi'' + (\sqrt{D} + \frac{1}{2}\psi'')\psi'' + \psi''(\sqrt{D} + \frac{1}{2}\psi''). \tag{1.4}$$

Supposons maintenant que

$$\sup_x \|\psi''(x)\|_{\mathcal{L}(B,B)} =_{\mathrm{def}} m \leq \sqrt{r_0},\ \psi''(x) \to 0,\ |x| \to \infty. \tag{1.5}$$

Alors $\sqrt{D} + \frac{1}{2}\psi''(x)$ vérifie (mpδ) avec $\delta = \sqrt{r_0} - m/2$. Soit x_0 un point où le sup dans (1.5) est atteint et soient $t \in B$, $s \in B^*$ des vecteurs normalisés avec $\langle \psi''(x_0)t, s\rangle = m$. Notons que

$$\langle \psi''(x_0)t, s\rangle = \|\psi''(x_0)t\|_B \|s\|_{B^*} = \|t\|_B \|\psi''(x_0)s\|_{B^*}.$$

Appliquons (1.4) à t et prenons le produit scalaire avec s. Comme les opérateurs $\nabla\phi \cdot \partial_x$ et $-\Delta$ peuvent être sortis des produits scalaires, la contribution des deux premiers termes à droite dans (1.4) est non-négative en x_0 et on obtient:

$$\begin{aligned} & r_1 \geq \sup_x \|W''(x)\|_{\mathcal{L}(B,B)} \geq \\ & \langle (\sqrt{D} + \frac{1}{2}\psi''(x_0))\psi''(x_0)t, s\rangle + \langle (\sqrt{D} + \frac{1}{2}\psi''(x_0))t, \psi''(x_0)s\rangle \geq \\ & 2(\sqrt{r_0} - \frac{m}{2})m. \end{aligned} \tag{1.6}$$

En combinant (1.5), (1.6) on obtient $m \leq \sqrt{r_0} - \sqrt{r_0 - r_1}$. Dans le cas général, il faut faire des arguments de déformation et de régularisation (comme dans [S1]) pour se ramener au cas où (1.5) s'applique. ♯

En principe on peut aussi utiliser cette méthode pour estimer les dérivées supérieures.

2. Estimations sur les corrélations.

Il s'agit d'améliorer certains résultats de [HS] dans le cas ferro-magnétique, et en particulier de pouvoir traiter un cas limite où un exposant cesse d'être uniformement strictement convexe. On commence par quelques résultats simples et préliminaires sur des matrices dans l'esprit du théorème de Perron-Frobenius. (Voir aussi l'appendice A dans Guerra-Rosen-Simon [GRSim].) Soit $A = A_\Gamma = (a_{j,k})_{j,k\in\Gamma}$ une matrice réelle, où l'ensemble Γ est finie.

Proposition 2.1. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(2.1) *Si* $\Gamma \ni j \mapsto u(j) \in \mathbf{R}$ *est maximal* $= m \geq 0$ *en* $j = j_0$, *alors* $Au(j_0) \geq 0$.

$$a_{j,j} \geq 0,\ a_{j,k} \leq 0,\ j \neq k \text{ et } \sum_k a_{j,k} \geq 0 \text{ pour tout } j \in \Gamma. \tag{2.2}$$

La preuve est simple et naturelle. Remarquons aussi que si A vérifie (2.1) il en est de même pour $\epsilon I + A$, $\epsilon > 0$, et $\epsilon I + A$ est bijectif: $\mathbf{R}^\Gamma \to \mathbf{R}^\Gamma$.

Proposition 2.2. *Soit $A = A_\Gamma$ bijectif vérifiant (2.1). Si $v \in \mathbf{R}^\Gamma$ est ≥ 0 (en chaque composante), il en est de même pour la solution $u \in \mathbf{R}^\Gamma$ de $Au = v$.*

Si $A = A_\Gamma$, $B = B_\Gamma$ sont des matrices réelles, écrivons $A \leq' B$ ou $B \geq' A$ si $a_{j,k} \leq b_{j,k}$ pour tous $j, k \in \Gamma$. Remarquons que si A vérifie (2.1) et $b_{j,k} \leq 0$, $B \geq' A$, alors B vérifie (2.1).

Proposition 2.3. *Supposons que A, B vérifient (2.1) (avec le même Γ), que $A \leq' B$ et que A soit bijectif. Alors B est bijectif et si $0 \leq v \in \mathbf{R}^\Gamma$ et u_A, $u_B \in \mathbf{R}^\Gamma$ sont les solutions de $Au_A = v$, $Bu_B = v$, alors $0 \leq u_B \leq u_A$ (en chaque composante).*

Théorème 2.4. *Soit $A = A_\Gamma > 0$ une matrice symétrique réelle vérifiant (2.1) et soit $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^\Gamma; \mathbf{R})$ tel que $\partial_{x_j}\partial_{x_k}\phi \leq 0$, $j \neq k$, $\phi''(x) \geq' A$, $|\partial^\alpha \phi| \leq C_\Gamma$, $|\alpha| = 2$. Alors,*

$$0 \leq \langle (x_j - \langle x_j \rangle)(x_k - \langle x_k \rangle) \rangle \leq h(A^{-1}e_k)(j),\ j,k \in \Gamma, \tag{2.3}$$

où nous avons posé

$$\langle f \rangle = \frac{\int f(x) e^{-\phi(x)/h} dx}{\int e^{-\phi(x)/h} dx}, \tag{2.4}$$

et où e_k est le vecteur de base canonique dans $\mathbf{R}^\Gamma$ correspondant à k.

Esquisse de la démonstration. La première inégalité dans (2.3) est un cas particulier d'un résultat de Cartier [C]. Comme dans [S3], [HS], nous considérons l'équation

$$v - \langle v \rangle = \nabla\phi \cdot \partial_x u - h\Delta u, \tag{2.5}$$

et en supposant assez de régularité chez u, v:

$$\nabla v = \phi''(x)\nabla u - h\Delta\nabla u + \nabla\phi \cdot \partial_x \nabla u. \tag{2.6}$$

Supposons maintenant que $u \in C^2$, $\nabla u \to 0$, $|x| \to \infty$ et que $\nabla v(x)$ est borné sur $\mathbf{R}^\Gamma$. Soient

$$V_\pm(j) = \sup_x \max(0, \pm\partial_{x_j} v(x))$$

$$0 \leq U_\pm = A^{-1}V_\pm = \lim_{\epsilon \to 0} U_{\pm,\epsilon},$$

où

$$0 \leq U_{\pm,\epsilon} = A^{-1}(V_\pm + \epsilon \mathbf{1}),\ \mathbf{1}(j) = 1, \forall j.$$

On obtient,

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad &\phi''(x)(\nabla u - U_{+,\epsilon}) - h\Delta(\nabla u - U_{+,\epsilon}) + \nabla\phi \cdot \partial_x(\nabla u - U_{+,\epsilon}) \\ &= -\phi''(x)U_{+,\epsilon} + \nabla v \leq \nabla v - AU_{+,\epsilon} < \nabla v - V_+ \leq 0.\end{aligned}$$

Supposons pour un $\epsilon > 0$ que l'on n'ait pas $\nabla u \leq U_{+,\epsilon}$ partout et soit $x_0 \in \mathbf{R}^\Gamma$, $j_0 \in \Gamma$ tels que $\partial_{x_{j_0}} u(x_0) - U_{+,\epsilon}(j_0)$ soit maximal ≥ 0. Alors de (2.7) on déduit:

$$(2.8)\qquad 0 \leq (\phi''(x_0)(\nabla u - U_{+,\epsilon}))_{j_0} < 0$$

ce qui est absurde. Donc $\nabla u \leq U_{+,\epsilon}$ partout et donc aussi $\nabla u \leq U_+$. De même $\nabla u \geq -U_-$:

$$(2.9)\qquad -U_- \leq \nabla u \leq U_+.$$

Avec $v = x_k$ on obtient modulo quelques arguments de regularisation et de déformation (voir [HS]):

$$(2.10)\qquad 0 \leq \nabla u \leq A^{-1} e_k.$$

Il suffit maintenant d'appliquer la formule de [HS]:

$$(2.11)\qquad \langle (x_j - \langle x_j \rangle)(x_k - \langle x_k \rangle) \rangle = h \langle \partial_{x_j} u \rangle$$

pour obtenir (2.3). ♯

Comme exemple considérons

$$A = \delta_{j,k} - v(j-k),\ j,k \in \mathbf{Z}^d,$$

avec $d \geq 3$ pour simplifier. On suppose

$$(2.12)\qquad v(j) \geq 0,\ v \text{ est paire},\ \|v\|_{\ell^1} = 1,\ v(0) < 1,$$

$$(2.13)\qquad \sum \langle j \rangle^{\max(2,d-2)} v(j) < \infty.$$

Alors $\hat{v} \in C^{\max(2,d-j)}(\mathbf{T}^d)$ et $1 - \hat{v}(\theta) \geq 0$ avec égalité en $\theta = 0$. (Ici $\hat{v}(\theta) = \sum v(j) e^{i\theta\cdot j}$ désigne la transformée de Fourier de v.) On suppose

$$(2.14)\qquad 1 - \hat{v}(\theta) > 0 \text{ pour } \theta \neq 0 \text{ dans } \mathbf{T}^d,$$

$$(2.15)\qquad \sum a_{j,k}\theta_j\theta_k > 0,\ |\theta| \neq 0,\ \text{où } 1 - \hat{v}(\theta) = \sum_{j,k} a_{j,k}\theta_j\theta_k + o(|\theta|^2),\ \theta \to 0.$$

Passant par les transformées de Fourier, on trouve alors une fonction $E_0(j) \geq 0$, avec $E_0(j) = F_0(j) + o(\langle j\rangle^{2-d})$, $|j| \to \infty$, et $(\delta_0 - v) * E_0 = \delta_0$, où F_0 désigne la solution fondamentale de $\sum a_{j,k} D_{x_j} D_{x_k}$ qui est positivement homogène de degré $2-d$.

Si $\Gamma \subset \mathbf{Z}^d$ est fini et A_Γ désigne la restriction de A à $\Gamma \times \Gamma$, alors on montre que A_Γ est bijectif et que la matrice de l'inverse vérifie:

$$0 \leq A_\Gamma^{-1}(j,k) \leq E_0(j-k). \tag{2.16}$$

Si $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^\Gamma; \mathbf{R})$ satisfait aux hypothèses du théorème 2.3 avec $A = A_\Gamma$ pour un v fixé indépendant de Γ qui vérifie (2.12)-(2.15), alors on obtient pour $j,k \in \Gamma$, uniformement en j,k,Γ:

$$0 \leq \langle (x_j - \langle x_j\rangle)(x_k - \langle x_k\rangle)\rangle \leq h(F_0(j-k) + o(\langle j-k\rangle^{2-d})),\ |j-k| \to \infty. \tag{2.17}$$

Pour $d = 1, 2$, on obtient aussi des estimations dans lesquelles il faut préciser une dépendence de Γ.

L'exemple qui nous a motivé au départ (voir [HS]) provient d'un modèle de M.Kac $(d = 1)$:

$$\phi(x) = \sum \frac{x_j^2}{2} - \sum \log \mathrm{ch}(\sqrt{\nu}(x_j + x_{j+1})) \tag{2.18}$$

où on somme sur $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Pour $\nu < \frac{1}{4}$ nous avons montré dans [HS] que les corrélations decroissent exponentiellement en $|j-k|$. Pour $\nu = \frac{1}{4}$ on perd la stricte convexité. Une généralisation naturelle au cas de la dimension d quelconque serait de prendre

$$\phi(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \frac{x_\alpha^2}{2} - \frac{1}{d} \sum_{\{\alpha,\beta\} \subset \Gamma,\, |\alpha-\beta|_{\ell^1} = 1} \log \mathrm{ch}(\sqrt{\nu}(x_\beta + x_\alpha)). \tag{2.19}$$

Ici Γ est un sous-ensemble fini de $\mathbf{Z}^d$. Alors, si $d \geq 3$, $\nu = \frac{1}{4}$, on peut appliquer (2.17) avec

$$v = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4d} \sum_{|\alpha|_1 = 1} \delta_\alpha.$$

Remarquous que

$$\hat{v}(\theta) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{1 + \cos\theta_j}{2}.$$

La bibliographie contient quelques travaux supplémentaires qui nous ont inspiré.

Bibliographie.

[BL] H.J.Brascamp, E.H.Lieb, *On extensions of the Brunn-Minkovski and Prékopa Leindler theorems,...,* J. Funct. An. 22(1976), 366-389.

[BrFLeSp] J.Bricmont, J.R. Fontaine, J.L.Lebowitz, T.Spencer, *Lattice systems with continuous symmetry II. Decay of correlations,* Comm. Math. Phys. 78(1981), 363-373.
[BrFLeLSp] J.Bricmont, J.R. Fontaine, J.L.Lebowitz, E.H.Lieb, T.Spencer, *Lattice systems with continuous symmetry III. Low temperature asymptotic expansion for the plane rotator model,* Comm. Math. Phys. 78(1981), 545-566.
[C] P.Cartier, *Inégalités de correlation en mécanique statistique,* Sém. Bourbaki, 25ème année, 1972-73, no 431, Springer LNM no 383.
[E] R.S.Ellis, *Entropy, large deviations and statistical mechanics,* Grundlehren der Math. Wiss. 271 Springer (1985).
[GlJ] J.Glimm, A.Jaffee, *Quantum physics, a functional integral point of view,* second edition, Springer (1987).
[GRSim] F.Guerra, L.Rosen, B.Simon, *The $p(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics,* Ann. Math. 101(1975), 111-259.
[H1] B.Helffer, *Estimations sur les fonctions de corrélation pour des modèles du type de Kac,* Sém. e.d.p. Ecole Polytechnique (1992-93).
[H2] B.Helffer, *Correlation decay and gap of the transfer operator,* Prépublication (1993).
[H3] B.Helffer, *Spectral properties of the Kac operator in large dimension,* Proceedings of the Summer School in Vancouver, August 1993.
[HS] B.Helffer, J.Sjöstrand, *On the correlation for Kac like models in the convex case,* J. Stat. Mech., à paraître.
[MZ] R.A.Minlos, E.A.Zhizhina, *Asymptotics of correlation decrease for Gibbsian spin fields,* Teor. Math. Phys. 77(1)(1988).
[SiWYY] I.M.Singer, B.Wong, S.T.Yau, S.S.T.Yau, *An estimate of the gap of the first two eigenvalues of the Schrödinger operator*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (ser. 4), 12(1985), 319-333.
[S1] J.Sjöstrand, *Exponential convergence of the first eigenvalue divided by the dimension for certain sequences of Schrödinger operators,* Astérisque 210 (1992), 303-326.
[S2] J.Sjöstrand, *Ferromagnetic integrals, correlations and maximum principles,* Prépublication d'Orsay (1993)
[S3] J.Sjöstrand, *Evolution equations in a large number of variables,* Math. Nachr. à paraître.
[So] A.D.Sokal, *Mean field bounds and correlation inequalities,* J. Stat. Phys. 28(1982), 431-439.

Université d'Orsay
Département de Mathématiques
Bât. 425
91405 ORSAY cedex
France