SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Y. LAURENT

Positivité de l'irrégularité des D-modules

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. nº 24, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A25_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

POSITIVITE DE L'IRREGULARITE DES D-MODULES

Y. LAURENT

Exposé n° XXIV

17 mai 1994

POSITIVITÉ DE L'IRRÉGULARITÉ DES D-MODULES

YVES LAURENT

1. Introduction

En dimension 1, une équation différentielle est régulière (on dit encore à singularités régulières ou de type de Fuchs) si ses solutions séries formelles convergent. Dans le cas contraire, on définit [8] l'irrégularité de l'équation qui est la différence entre l'indice formel et l'indice analytique.

C'est un nombre positif qui peut se calculer de manière algébrique à partir des coefficients de l'équation.

Pour généraliser ce résultat en dimension supérieure, on considère un $\mathcal{D}$-module holonome, c'est-à-dire un système d'équations aux dérivées partielles dont la variété caractéristique est lagrangienne. Alors l'espace de ses solutions holomorphes ou séries formelles est de dimension finie en tout point.

On peut définir son irrégularité qui est une fonction constructible et la positivité de l'irrégularité signifie que cette fonction est associée à un cycle analytique positif.

Les résultats exposés ici ont été obtenus en collaboration avec Z. Mebkhout [7]

2. Polygone de Newton d'un opérateur en dimension 1

Soit P un opérateur différentiel à coefficients holomorphes définit sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Il s'écrit :

$$P(t, D_t) = \sum_{0 \leq j \leq m} p_j(t) D_t^j$$

où p_j est une fonction holomorphe sur un voisinage de 0 et D_t désigne l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$.

En développant les fonctions p_j en série de Taylor on obtient :

$$P(t, D_t) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ i \geq 0}} p_{ij} t^i D_t^j$$

Le polygone de Newton de P en 0 est le bord de l'enveloppe convexe de la réunion des ensembles :

$$S_{ij} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda \leq j, \mu \geq i - j\}$$

pour tous les points (i, j) tels que $p_{ij} \neq 0$.

On obtient ainsi une ligne polygonale à sommets entiers (fig. 1).

L'opérateur P est régulier en 0 si le polygone de Newton a un seul sommet. Dans ce cas il est bien connu que les solutions séries formelles de l'équation $Pu = 0$ sont convergentes.

Dans le cas contraire, le polygone est formé de deux demi-droites (une est verticale, l'autre horizontale) et d'un nombre fini de segments. On note $0 < s_N < \cdots < s_1 < +\infty$ les pentes de ces segments et $1 < r_1 < \cdots < r_N < +\infty$ les nombres

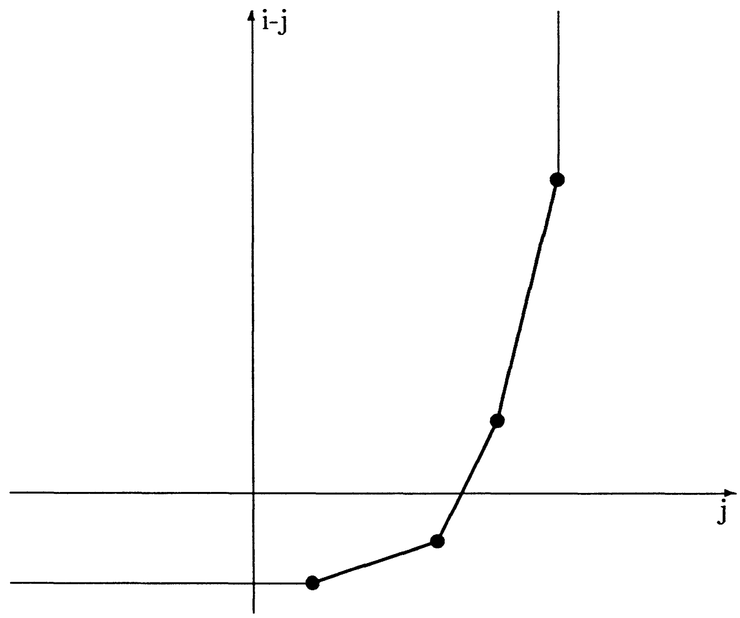

FIGURE 1. Polygone de Newton

rationnels déterminés par $(r_i - 1)(s_i - 1) = 1$. Les nombres s_i sont les pentes du polygone de Newton de P et les nombres r_i les indices critiques.

La somme $\sum p_{ij} t^i \tau^j$ pour $(j, i-j)$ sur la demi-droite verticale du polygone de Newton n'est autre que la fonction $p_m(t)\tau^m$ où m est l'ordre de P c'est-à-dire le symbole principal de l'opérateur P.

De manière analogue, on définit l'équation déterminante de P relative à l'indice r en prenant la restriction à $t = 1$ de la somme $\sum p_{ij} t^i \tau^j$ pour $(j, i-j)$ sur le segment de pente $1/(r-1)$.

Si r n'est pas un indice critique de P, l'équation déterminante correspondante est un monôme, sinon c'est un polynôme en τ. Remarquons que le polygone de Newton de P est déterminé à une translation près par la donnée du degré et de la valuation de chaque équation déterminante.

Si F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur lequel opère P on dit que P est d'indice fini si le noyau et le conoyau de P sont de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et on définit l'indice $\chi(P, F)$ de P par :

$$\chi(P, F) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(P) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}(P)$$

Dans [8], Malgrange a définit l'irrégularité de l'opérateur P par

$$\mathrm{Irr}(P) = \chi(P, \mathbb{C}[[t]]) - \chi(P, \mathbb{C}\{t\})$$

où $\mathbb{C}[[t]]$ désigne l'anneau des séries formelles et $\mathbb{C}\{t\}$ celui des séries convergentes.

Il a montré que ce nombre est égal à la différence d'ordonnée entre le sommet le plus haut et le sommet le plus bas du polygone de Newton de P. C'est donc un nombre positif qui est nul si et seulement si P est régulier.

Pour préciser ce résultat, Ramis [9] considère les anneaux $\mathbb{C}[[t]]_r$ définis de la manière suivante :

Une série formelle $u(t) = \sum_{k\geq 0} u_k t^k$ est un élément de $\mathbb{C}[[t]]_r$ si et seulement si la série :

$$F_r[u](t) = \sum_{k\geq 0} u_k \frac{t^k}{(k!)^{r-1}}$$

est convergente.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Ramis* [9]

(1) *L'opérateur P est d'indice fini sur $\mathbb{C}[[t]]_r$ pour tout $r \geq 1$.*

(2) *Si u est une série formelle solution de $Pu = 0$, elle appartient à un espace $\mathbb{C}[[t]]_r$ où r est un indice critique de P et le rayon de convergence de $F_r[u]$ est égal au module de l'une des racines de l'équation déterminante correspondante.*

(3) *L'indice $\chi(P, \mathbb{C}[[t]]_r)$ est une fonction de r constante en dehors de l'ensemble fini des indices critiques. Le saut de l'indice en un de ces points est égal à la hauteur du segment de pente $1/(r-1)$ du polygone de Newton de P.*

De ce théorème on déduit immédiatement que le saut de l'indice pour la valeur r est un entier positif i tel que ri est entier. En effet, c'est la hauteur d'un segment de pente $1/(r-1)$ dont les deux extrémités sont à coordonnées entières.

C'est ce résultat que nous voulons généraliser en dimension supérieure. Nous allons tout d'abord énoncer un résultat purement géométrique et nous ferons ensuite le lien avec les équations aux dérivées partielles.

3. Positivité géométrique

On considère une variété analytique complexe Y, un fibré vectoriel complexe Λ de rang 1 sur Y et le fibré cotangent $T^*\Lambda$ à Λ.

(En fait les résultats que nous allons énoncer sont vrais pour un fibré vectoriel de rang quelconque et même pour une variété munie d'une action de $\mathbb{C}^*$, mais ils sont alors un peu plus compliqué à énoncer.)

Le fibré vectoriel Λ est muni d'une action canonique de $\mathbb{C}^*$ qui induit une action de $\mathbb{C}^*$ sur $T^*\Lambda$. Nous noterons cette dernière H_∞.

Par ailleurs, $T^*\Lambda$ est un fibré vectoriel sur Λ donc est muni d'une action de $\mathbb{C}^*$ distincte de la précédente et que nous noterons H_0.

Si r est un rationnel positif ou nul, nous pouvons l'écrire sous forme irréductible $r = p/q$ et poser $H_r = H_\infty^p H_0^q$.

Fixons des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ de Y et des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, t)$ de Λ. Le fibré $T^*\Lambda$ est muni des coordonnées (x, t, ξ, τ) et on a :

$$\begin{aligned}
H_0(\lambda) &: (x,t,\xi,\tau) \to (x,t,\lambda\xi,\lambda\tau)\\
H_\infty(\lambda) &: (x,t,\xi,\tau) \to (x,\lambda t,\xi,\lambda^{-1}\tau)\\
H_r(\lambda) &: (x,t,\xi,\tau) \to (x,\lambda^p t,\lambda^q\xi,\lambda^{q-p}\tau)
\end{aligned}$$

Soit r un nombre rationnel et soit Σ un sous-ensemble analytique lagrangien de $T^*\Lambda$ qui est homogène (i.e. conique) pour H_r. Nous supposerons de plus que ses fibres pour la projection $T^*\Lambda \to Y$ sont algébriques.

Si $r = 0$, il s'agit donc d'une variété lagrangienne homogène au sens habituel mais ici nous allons nous intéresser au cas $r > 1$. La géométrie de Σ est alors très différente et en particulier Σ n'est jamais le conormal à sa projection sur Λ.

Notons $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^*\Lambda$ qui sont polynomiales dans les fibres de la projection $T^*\Lambda \to Y$. En coordonnées locales une telle fonction s'écrit comme une somme finie :

$$f(x,t,\xi,\tau) = \sum a_{\alpha\beta\gamma}(x)\xi^\alpha t^\beta \tau^\gamma$$

où α est un multi-indice de $\mathbf{N}^n$ tandis que β et γ sont des entiers.

Soit k_0 (resp. k_1) la valuation (resp. le degré) de f comme polynôme en (ξ,τ). On associe à f les deux fonctions suivantes :

$$\sigma^+(f)(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\alpha|+\gamma=k_0} a_{\alpha\beta\gamma}(x)\xi^\alpha t^\beta \tau^\gamma$$
$$\sigma^-(f)(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\alpha|+\gamma=k_1} a_{\alpha\beta\gamma}(x)\xi^\alpha t^\beta \tau^\gamma$$

Soit $\mathcal{I}_\Sigma$ l'idéal de $\mathcal{O}_{[T^*\Lambda]}$ des fonctions qui s'annulent sur Σ et soit $\sigma^+(\mathcal{I}_\Sigma)$ l'idéal engendré par les fonctions $\sigma^+(f)$ pour f dans $\mathcal{I}_\Sigma$. L'ensemble des points de $T^*\Lambda$ où s'annulent toutes les fonctions de $\sigma^+(\mathcal{I}_\Sigma)$ est une variété que nous appelleront Σ^+ et de même on définit Σ^- en utilisant les fonctions $\sigma^-(f)$.

La variété Σ^+ est le cône tangent à Σ le long de Λ et Σ^- est le cône tangent à l'infini. Il est clair que ces deux variétés sont homogènes pour H_r et pour H_0 donc en fait pour tous les H_s. Nous dirons qu'elles sont bihomogènes.

D'autre part, il est bien connu que si Σ est lagrangienne il en est de même de son cône tangent. Ainsi Σ^+ et Σ^- sont lagrangiennes bihomogènes. De telles variétés sont très particulières comme le montre le lemme 3.1 ci-dessous.

La projection $\Lambda = T^*_Y X \to Y$ et le plongement $Y \to \Lambda$ définissent des applications :

$$T^*Y \xleftarrow{p_1} (T^*Y) \times_Y \Lambda \xrightarrow{j_1} T^*\Lambda$$
$$T^*Y \xleftarrow{p_2} (T^*\Lambda) \times_\Lambda Y \xrightarrow{j_2} T^*\Lambda$$

Les applications p_1 et p_2 sont des submersions tandis que j_1 et j_2 sont des plongements. En coordonnées locales on a :

$$p_1(x,\xi,t) = (x,\xi) \qquad j_1(x,\xi,t) = (x,t,\xi,0)$$
$$p_2(x,\xi,\tau) = (x,\xi) \qquad j_2(x,\xi,\tau) = (x,0,\xi,\tau)$$

La réunion de $j_1((T^*Y) \times_Y \Lambda)$ et de $j_2((T^*\Lambda) \times_\Lambda Y)$ est une hypersurface S_Λ de $T^*\Lambda$. On peut voir aussi cette variété comme la variété caractéristique du champ d'Euler associé à l'action de $\mathbb{C}^*$ sur Λ.

Lemme 3.1. *([6] Lemme 4.5.1.)*
Soit Σ une sous-variété lagrangienne bihomogène de $T^*\Lambda$. Il existe deux variétés lagrangiennes homogènes (au sens usuel) S_1 et S_2 de T^*Y telles que :

$$\Sigma = j_1 p_1^{-1} S_1 \cup j_2 p_2^{-1} S_2$$

Esquissons la démonstration de ce résultat. On montre tout d'abord que Σ est contenue dans S_Λ. Pour cela il suffit de considérer la partie lisse de Σ. Puisque Σ est lagrangienne, la 2-forme canonique de $T^*\Lambda$ s'annule sur cette partie lisse. D'autre part, si Σ est homogène pour H_0 et H_∞, les champs de vecteurs associés à ces opérations sont tangents à Σ.

La valeur de la 2-forme canonique sur ces deux champs de vecteurs est une fonction holomorphe sur $T^*\Lambda$ qui est donc nulle sur Σ. Or cette fonction est précisément l'équation de S_Λ comme on peut le voir en coordonnées. (Elle vaut $t\tau$ à une constante multiplicative près).

Considérons à présent une composante irréductible de Σ. Nous venons de voir qu'elle est contenue dans $S_\Lambda = \{ (x,t,\xi,\tau) \in T^*\Lambda \mid t\tau = 0 \}$ donc puisqu'elle est irréductible elle est contenue soit dans $\{ t = 0 \}$ soit dans $\{ \tau = 0 \}$. Comme elle est lagrangienne, si elle est contenue dans $\{ t = 0 \}$ elle est invariante par le champ hamiltonien de t donc de la forme :

$$\{ (x,t,\xi,\tau) \in T^*\Lambda \mid t = 0, (x,\xi) \in S_1 \}$$

et S_1 est une sous-variété lagrangienne homogène de T^*Y.

On raisonne de la même manière pour une composante contenue dans $\tau = 0$.

Revenons à la variété lagrangienne H_r-homogène Σ initiale. On peut donc lui associer deux variétés lagrangiennes bihomogènes Σ^+ et Σ^- qui se décomposent chacune suivant le lemme 3.1. On obtient ainsi quatre sous-variété lagrangiennes homogènes de T^*Y, notées $S_i^\pm$, $i = 1, 2$.

En fait nous allons faire cette opération pour les cycles analytiques. Rappelons qu'un cycle analytique est la donnée d'un ensemble analytique et, pour chaque composante irréductible de cet ensemble, d'un entier que l'on appelle la multiplicité de la composante. Le support du cycle est la réunion des composantes de multiplicité non nulle. Si toutes les multiplicités sont positives, le cycle est dit positif.

A tout idéal de fonctions holomorphes sur une variété est associé un cycle positif dont le support est précisément l'ensemble des points où s'annulent les fonctions de l'idéal.

On considère donc un cycle analytique positif $\tilde{\Sigma}$ de $T^*\Lambda$ dont le support est la variété Σ précédente. On lui associe deux cycles analytiques positifs $\tilde{\Sigma}^\pm$ de la manière suivante :

Supposons tout d'abord que Σ est irréductible avec multiplicité 1. On lui associe comme ci-dessus l'idéal $\mathcal{I}_\Sigma$ puis les deux idéaux $\sigma^\pm(\mathcal{I}_\Sigma)$. Alors les cycles $\tilde{\Sigma}^\pm$ sont les cycles associés à ces idéaux.

Si $\tilde{\Sigma}$ est un cycle positif quelconque, il s'écrit :

$$\tilde{\Sigma} = \sum_k n_k[\Sigma_k]$$

avec $n_k \in \mathbb{N}$ et Σ_k irréductible, on pose alors :

$$\tilde{\Sigma}^\pm = \sum_k n_k \tilde{\Sigma}_k^\pm$$

Les cycles $\tilde{\Sigma}^\pm$ sont positifs mais leur différence ne l'est pas en général.

Leurs supports se décomposent suivant le lemme 3.1 et on peut donc les écrire :

$$\tilde{\Sigma}^\pm = j_1 p_1^{-1} \tilde{S}_1^\pm + j_2 p_2^{-1} \tilde{S}_2^\pm$$

où $\tilde{S}_i^\pm$ est un cycle analytique positif de support lagrangien homogène dans T^*Y.

On pose alors :

$$\mathrm{Id}(\tilde{\Sigma}) = \tilde{S}_1^- - \tilde{S}_2^- - \tilde{S}_1^+ + \tilde{S}_2^+$$

et nous pouvons énoncer le résultat principal :

Théorème 3.2. $\mathrm{Id}(\tilde{\Sigma})$ *est un cycle analytique* ***positif*** *de* T^*Y *tel que* $r\,\mathrm{Id}(\tilde{\Sigma})$ *soit à valeurs entières.*

Autrement dit, les multiplicités de ce cycle sont des entiers positifs multiples de q où q est le dénominateur de l'écriture irréductible du rationnel r.

Comme nous le verrons dans le prochain paragraphe, ce résultat est facile en dimension 1. Le cas général se ramène à celui-ci par images directes et images inverses.

4. Exemples

Considérons tout d'abord la dimension 1 avec $Y = \{0\}$ et $\Lambda = \mathbb{C}$. Soit r un rationnel qui s'écrit $r = p/q$ avec p et q premiers entre eux et $p > q \geq 1$. Une hypersurface algébrique H_r-homogène de $T^*\Lambda$ est définie par une équation :

$$f(t,\tau) = \sum_{\substack{qi+p(j-i)=A \\ i_0 \leq i \leq i_1}} a_{ij} t^j \tau^i$$

Soient j_0 et j_1 les entiers définis par $qi_0 + p(j_0 - i_0) = qi_1 + p(j_1 - i_1) = A$. On a donc :

$$\sigma^+(f) = t^{j_0}\tau^{i_0} \quad \text{et} \quad \sigma^-(f) = t^{j_1}\tau^{i_1}$$

$\tilde{\Sigma}^\pm$ est le cycle défini par la fonction $\sigma^\pm(f)$, on a donc :

$$\tilde{\Sigma}^+ = i_0[\tau = 0] + j_0[t = 0] \quad \text{et} \quad \tilde{\Sigma}^- = i_1[\tau = 0] + j_1[t = 0]$$

Ici la variété T^*Y est réduite à un point et les cycles sur T^*Y s'identifient à des entiers. On a :

$$\tilde{S}_1^+ = i_0, \quad \tilde{S}_2^+ = j_0, \quad \tilde{S}_1^- = i_1, \quad \tilde{S}_2^- = i_1$$

d'où :

$$\mathrm{Id}(\Sigma) = i_1 - i_0 - j_1 + j_0 = (i_1 - i_0)\frac{q}{p}$$

qui est bien un entier positif multiple de q.

Calculons un exemple en dimension 2. On considère $Y = \mathbb{C}$, $\Lambda = \mathbb{C}^2$ et la variété Σ définie par :

$$\Sigma = \{ (x,t,\xi,\tau) \in T^*\Lambda \mid \xi\tau - 2x = 0, x\xi + 2t\tau = 0 \}$$

où plus exactement le cycle analytique qui a la multiplicité 1 sur chacune des deux composantes irréductibles de Σ.

On peut calculer les cônes :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}^+ &= [\{ x = 0, t = 0 \}] + [\{ x = 0, \tau = 0 \}] \\
\tilde{\Sigma}^- &= [\{ x = 0, \tau = 0 \}] + [\{ \xi = 0, t = 0 \}] + 2[\{ \xi = 0, \tau = 0 \}]
\end{aligned}$$

en désignant par $[\{ x = 0, t = 0 \}]$ le cycle analytique égal à la variété irréductible $\{ x = 0, \tau = 0 \}$ avec multiplicité 1.

Les cycles sur T^*Y sont :

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_1^+ &= [T^*_{\{0\}}Y] \qquad & \tilde{S}_2^+ &= [T^*_{\{0\}}Y] \\
\tilde{S}_1^- &= [T^*_Y Y] \qquad & \tilde{S}_2^- &= [T^*_{\{0\}}Y] + 2[T^*_Y Y]
\end{aligned}$$

et on obtient $\mathrm{Id}(\Sigma) = [T^*_{\{0\}}Y] + [T^*_Y Y]$ qui est bien un cycle positif.

Dans la suite nous allons montrer assez rapidement comment le résultat précédent s'applique aux équations aux dérivées partielles.

5. Polygone de Newton d'un opérateur en dimension quelconque

Les définitions et les résultats de ce paragraphe se trouvent dans [5] (et aussi [4]).

On considère une variété analytique complexe X de dimension n et une hypersurface lisse Y de X. Le fibré cotangent à X sera noté T^*X et le fibré conormal à Y sera noté $\Lambda = T^*_Y X$.

Localement, on fixe des coordonnées $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ de X telles que Y soit l'hypersurface d'équation $\{ t = 0 \}$. Alors

$$T^*_Y X = \{ (x,t,\xi,\tau) \in T^*X \mid t = 0, \xi = 0 \}$$

.

Le fibré cotangent $T^*\Lambda$ est muni des coordonnées (x, τ, x^*, τ^*).

Soit P un opérateur différentiel à coefficients holomorphes définit au voisinage de Y. En coordonnées locales il s'écrit :

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|+\beta\leq m} p_{\alpha\beta}(x,t) D_x^\alpha D_t^\beta$$

avec $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $\beta \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $p_{\alpha\beta}(x,t)$ sont définies au voisinage de $t=0$ et se développent donc en séries de Taylor en t :

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{\substack{|\alpha|+\beta\leq m\\ \gamma\geq 0}} p_{\alpha\beta\gamma}(x)t^\gamma D_x^\alpha D_t^\beta$$

Rappelons que le symbole principal de P est la fonction définie sur T^*X par :

$$\sigma(P)(x,t,\xi,\tau) = \sum_{|\alpha|+\beta=m} p_{\alpha\beta}(x,t)\xi^\alpha\tau^\beta$$

Cette fonction ne dépend pas des coordonnées locales et on a $\sigma(PQ)=\sigma(P)\sigma(Q)$.

De manière analogue on définit les fonctions suivantes :

$$p_{ij}(x,\tau,x^*,\tau^*) = \sum_{\substack{|\alpha|+\gamma=i\\ |\alpha|+\beta=j}} p_{\alpha\beta\gamma}(x)(-\tau^*)^\gamma(x^*)^\alpha\tau^\beta$$

On définit alors le polygone de Newton de P exactement comme en dimension 1 en considérant les points (i,j) pour lesquels p_{ij} n'est pas identiquement nulle.

On montre que les fonctions p_{ij} pour lesquelles le point $(j,i-j)$ se trouve sur un sommet ou sur un segment du polygone de Newton de P sont indépendantes des coordonnées locales quand on les considère comme des fonctions sur $T^*\Lambda$.

Pour tout $r>1$ rationnel on définit le symbole $\sigma^{(r)}(P)$ qui est la somme des fonctions p_{ij} pour $(j,i-j)$ appartenant au segment de pente $1/(r-1)$ du polygone de Newton de P.

Par définition, les fonctions $\sigma^{(r)}(P)$ sont des fonctions sur $T^*\Lambda$, il y a seulement un nombre fini de fonctions distinctes et elles se réduisent à une seule fonction bihomogène p_{ij} sauf pour un nombre fini de valeurs de r. On montre que l'on a toujours $\sigma^{(r)}(PQ)=\sigma^{(r)}(P)\sigma^{(r)}(Q)$.

6. Cycles caractéristiques et microcaractéristiques.

Soit $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur la variété analytique complexe X.

Considérons un idéal de type fini $\mathcal{I}$ de $\mathcal{D}_X$. On peut lui associer l'idéal :

$$\sigma(\mathcal{I}) = \{\,\sigma(P)\mid P\in\mathcal{I}\,\}$$

C'est un idéal du faisceau des fonctions holomorphes sur T^*X polynomiales dans les fibres de $T^*X\to X$ et il définit donc un cycle analytique positif de T^*X.

On montre que ce cycle ne dépend que du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}=\mathcal{D}_X/\mathcal{I}$ et on dit que c'est le cycle caractéristique de $\mathcal{M}$. Son support est la variété caractéristique de $\mathcal{M}$.

Plus généralement, un $\mathcal{D}_X$-module cohérent est un module qui s'écrit localement sous la forme

$$\mathcal{M} = (\mathcal{D}_X)^N \big/ (\mathcal{D}_X)^M A$$

et on sait associer un cycle caractéristique à n'importe quel $\mathcal{D}_X$-module cohérent.

La variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent est toujours involutive donc de codimension inférieure ou égale à la dimension de X. Lorsqu'elle est de codimension égale à la dimension de X on dit que $\mathcal{M}$ est holonome.

Nous renvoyons à [1] [2] [10] pour plus de détails sur ces notions.

Soient Y une hypersurface lisse de X et r un nombre rationnel supérieur à 1. Si, dans ce qui précède, on remplace le symbole principal σ par le symbole $\sigma^{(r)}$, on définit la variété microcaractéristique $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ et le cycle analytique associé $\widetilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})$.

Par définition, la variété microcaractéristique $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ est un sous-ensemble analytique de $T^*\Lambda$ qui est algébrique dans les fibres de $T^*\Lambda \to Y$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 6.1. *([5] corollaire 4.1.2.)*
La variété microcaractéristique $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ est une sous-variété involutive de $T^*\Lambda$ et, si $\mathcal{M}$ est holonome, elle est lagrangienne.

Théorème 6.2. *([5] théorème 3.4.1.)*
Pour tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ il existe une suite finie $r_0 = 1 < r_1 < \cdots < r_N < r_{N+1} = +\infty$ de nombre rationnels tels que le cycle $\widetilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})$ soit indépendant de r dans chacun des intervalles $]r_i, r_{i+1}[$.

La variété $\Lambda = T^*_Y X$ est un fibré vectoriel de rang 1 sur Y et on peut donc lui appliquer les résultats du praragraphe 3.

Par définition, la variété $\Sigma^{(r)}(\mathcal{M})$ est homogène pour H_r. Si r n'est pas un des indices critiques $r_1, \ldots, r_N$, elle est homogène pour plusieurs valeurs de r donc pour tout r.

Lorsque r est un de ces indices r_i, on vérifie facilement que le cycle $\widetilde{\Sigma}^{(r_i)}(\mathcal{M})^+$ (définit comme en 3) est égal à $\widetilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})$ pour $r \in]r_i, r_{i+1}[$ et que le cycle $\widetilde{\Sigma}^{(r_i)}(\mathcal{M})^-$ est égal à $\widetilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})$ pour $r \in]r_{i-1}, r_i[$.

On peut donc appliquer les résultats du paragraphe 3 et définir pour tout $r > 1$ l'irrégularité de type r par :

$$\mathrm{Irr[r]}(\mathcal{M}) = \mathrm{Id}\left(\widetilde{\Sigma}^{(r)}(\mathcal{M})\right)$$

.

$\mathrm{Irr[r]}(\mathcal{M})$ est un cycle analytique de T^*Y qui est nul si r n'est pas un indice critique. Il y a donc seulement un nombre fini de cycles non nuls et on peut définir l'irrégularité de $\mathcal{M}$ par :

$$\mathrm{Irr}(\mathcal{M}) = \sum_{r>1} \mathrm{Irr[r]}(\mathcal{M})$$

Le théorème 3.2 se traduit immédiatement en :

Corollaire 6.3. *Soit $r > 1$ rationnel d'écriture irréductible $r = p/q$. $\mathrm{Irr[r]}(\mathcal{M})$ est un cycle analytique* ***positif*** *à valeurs dans $q\mathbb{Z}$.*

On peut en particulier appliquer les exemples du paragraphe 4.

En dimension 1, on peut toujours se ramener au cas d'un opérateur, et la traduction est immédiate entre les résultats du paragraphe 2 et l'exemple de 4.

L'exemple que nous avons donné en dimension 2 correspond au module holonome $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X exp(\frac{x^2}{t})$.

Plus précisément $\mathcal{M}$ est le quotient de $\mathcal{D}_X$ par l'idéal des opérateurs qui annulent la fonction $exp(\frac{x^2}{t})$ c'est-à-dire l'idéal de $\mathcal{D}_X$ engendré par les opérateurs :

$$P = tD_x - 2x \qquad \text{et} \qquad Q = 2tD_t + xD_x$$

La variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est égale à :

$$\{\, (x,t,\xi,\tau) \in T^*X \mid 2t\tau + x\xi = 0, t\xi = 0 \,\}$$

Les variétés microcaractéristiques de $\mathcal{M}$ valent :

$$\Sigma^{(r)}(\mathcal{M}) = \begin{cases} \{\, (x,\tau,x^*,\tau^*) \in T^*\Lambda \mid x^*\tau^* - 2x = 0, xx^* + 2\tau\tau^* = 0 \,\} & \text{si } r = 2 \\ \{\, (x,\tau,x^*,\tau^*) \in T^*\Lambda \mid x = 0, xx^* + 2\tau\tau^* = 0 \,\} & \text{si } r > 2 \\ \{\, (x,\tau,x^*,\tau^*) \in T^*\Lambda \mid x^*\tau^* = 0, xx^* + 2\tau\tau^* = 0 \,\} & \text{si } r < 2 \end{cases}$$

Le module $\mathcal{M}$ a donc un seul indice critique $r = 2$ et la variété microcaractéristique associée est celle de l'exemple du paragraphe 4.

Grâce au corollaire 6.3, on peut donner une définition du polygone de Newton d'un module holonome.

On considère pour cela le support S du cycle Irr($\mathcal{M}$). C'est une réunion finie de variétés lagrangiennes homogènes donc une variété lagrangienne homogène de T^*Y. On associe alors un polygone de Newton à chaque composante irréductible de cette variété :

Ce polygone à pour côtés les segments de pente $1/(r-1)$ pour r indice critique et de hauteur la valeur du cycle Irr[r] sur cette composante. Le théorème précédent assure que toutes les hauteurs sont positives et que les sommets sont des points de coordonnées entières.

Les définitions précédentes sont justifiées par le fait que, comme en dimension 1, ce polygone permet de calculer les différences d'indice entre les solutions de croissance différentes, en particulier solutions formelles et solutions convergentes. Nous renvoyons à [3] pour l'énoncé exact et la démonstration de ces résultats.

Les résultats précédents peuvent s'étendre au cas d'une variété Y de codimension supérieure à 1, ce qui correspond à un fibré Λ de rang supérieur à 1, et aussi au cas d'une sous-variété lagrangienne homogène quelconque de T^*X.

References

1. J.-E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
2. ______, *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.
3. Y. Laurent, *Irregular vanishing cycles of $\mathcal{D}$-modules*, à paraître.

4. ———, *Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe*, Progress in Math., vol. 53, Birkhäuser, 1985.
5. ———, *Polygone de newton et b-fonctions pour les modules microdifférentiels*, Ann. Ec. Norm. Sup. 4e série **20** (1987), 391–441.
6. ———, *Vanishing cycles of $\mathcal{D}$-modules*, Inv. Math. **112** (1993), 491–539.
7. Y. Laurent and Z. Mebkhout, *Pentes algébriques et pentes analytiques d'un $\mathcal{D}$-module*, à paraître.
8. B. Malgrange, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, L'Enseignement Mathématique **20** (1974), 147–176.
9. J.-P. Ramis, *Théorèmes d'indices gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the AMS **48** (1984), no. 296.
10. P. Schapira, *Microdifferential systems in the complex domain*, Grundlehren der Math., vol. 269, Springer, 1985.

INSTITUT FOURIER MATHÉMATIQUES BP 74, 38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX