Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

F. Bethuel

T. Rivière

Vorticité dans les modèles de Ginzburg-Landau pour la supraconductivité

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A17_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

VORTICITE DANS LES MODELES DE GINZBURG-LANDAU POUR LA SUPRACONDUCTIVITE

F. BETHUEL et T. RIVIERE

Exposé n° XVI

22 mars 1994

I. Introduction

La formation de tourbillons de vorticité dans des phénomènes liés à la supraconductivité peut être modélisée dans le cadre de la théorie de Ginzburg et Landau, et conduit à des problèmes mathématiques très intéressants. Elle a en particulier motivé notre étude dans [BR] (voir également [BBH]), où nous avons étudié une situation voisine de situations physiques réalistes : celles-ci néanmoins résistent encore pour une large part à l'analyse.

Notre ambition est ici de présenter ces problèmes et d'en décrire les difficultés.

II. Le modèle de Ginzburg-Landau

Le modèle proposé par Ginzburg et Landau vers 1950 permet de décrire la plupart des propriétés physiques observées dans les phénomènes de supraconductivité. A basse température, les matériaux supraconducteurs présentent des caractéristiques surprenantes : perte de résistivité, répulsion du champ magnétique (appelé effet London...). A l'échelle microscopique, ces phénomènes s'expliquent par la création de paires d'électrons (appelées paires de Cooper) : la conductivité électrique s'effectue alors par l'intermédiaire de ces paires, plutôt que par des électrons isolés (pour une discussion fine de la "réalité quantique" mise en jeu par ces paires, voir les travaux de Magnen et Rivasseau). On modélise, à échelle macroscopique, la densité des paires d'électrons par une fonction *complexe* u, appelée aussi fonction d'onde condensée. La norme de u, $|u|$ représente alors la densité, en un point donné du matériau, de paires de Cooper en présence. Après renormalisation des constantes, on aura si :

- $|u| \simeq 1$ le matériau est supraconducteur (au point considéré)
- $|u| \simeq 0$ le matériau est dans la phase normale (il n'y a pas de paires de Cooper).

Comme nous le verrons un peu plus loin, dans certaines conditions les deux phases peuvent coexister dans un même matériau.

Pour obtenir une description complète du modèle, il faut inclure les aspects électromagnétiques. On introduit ainsi le champ magnétique $\vec{\tilde{h}}$ (qui est un vecteur de l'espace), et le potentiel vecteur $\vec{\tilde{A}}$, où

$$\vec{\tilde{h}} = \mathrm{rot}\vec{\tilde{A}} \ .$$

Il est souvent commode de considérer $\tilde{h}$ et $\tilde{A}$ comme des 1-formes, c'est à dire $\tilde{A} = \tilde{A}_1 dx_1 + \tilde{A}_2 dx_2 + \tilde{A}_3 dx_3$, $\tilde{h} = \tilde{h}_1 dx_1 + \tilde{h}_2 dx_2 + \tilde{h}_3 dx_3$ et la relation précédente s'exprime par

$$\tilde{h} = *d\tilde{A} \ ,$$

où $*$ est l'opérateur de Hodge, et d la différentielle extérieure. Considérons un échantillon supraconducteur confiné dans un domaine Ω. Ginzburg et Landau ont introduit la fonctionnelle suivante, pour décrire l'énergie libre

$$\widetilde{G}(u,\widetilde{A}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |(\frac{\nabla}{\kappa} - i\widetilde{A})u|^2 + |d\widetilde{A}|^2 + \frac{1}{2}(1-|u|^2)^2 \ .$$

Ici κ est un paramètre qui dépend du matériau, et

$$|(\frac{\nabla}{\kappa} - i\widetilde{A})u|^2 = \sum_{j=1}^{3} |(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial x_j}u - i\widetilde{A}_j u)\ |^2 \qquad\qquad u : \Omega \to \mathbf{R}^2 \ .$$

En l'absence de champ magnétique extérieur la configuration stable est celle qui minimise G, à savoir la configuration triviale

$$\begin{aligned} &\widetilde{u} = \exp i\theta \ , \ \ (\text{où } \theta \in [0,2\pi]) \\ &\widetilde{A} = 0 \ . \end{aligned}$$

On a clairement $\widetilde{G}(\widetilde{u},\widetilde{A}) = 0$. Lorsque l'on applique un champ extérieur $\vec{h}_{ex}$ il faut ajouter à l'énergie libre un terme d'interaction. Les configurations stables sont celles qui minimisent la fonctionnelle

$$(1) \qquad \widetilde{J}(\widetilde{u},\widetilde{A}) = \widetilde{G}(\widetilde{u},\widetilde{A}) - \int_\Omega \vec{\widetilde{h}} \cdot \vec{\widetilde{h}}_{ex} \ .$$

Dans toute la suite, nous nous restreindrons à des situations deux-dimensionnelles : $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, simplement connexe. Le domaine considéré correspond alors, physiquement, à un cylindre infiniment long $\Omega \times \mathbf{R}$, avec une invariance de h et u par rapport à l'axe $\mathcal{O}x^3$. En particulier on supposera le champs extérieur parallèle à cet axe : on le décrit donc, de même que le champ induit $\widetilde{h}$, par un scalaire. On prendra alors

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\widetilde{A} = \widetilde{A}_1 dx_1 + \widetilde{A}_2 dx_2 \\ &\widetilde{h} = *d\widetilde{A} = \frac{\partial \widetilde{A}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \widetilde{A}_1}{\partial x_2} \ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est commode d'effectuer la renormalisation suivante

$$\begin{aligned} &A = \kappa\widetilde{A} \\ &h = \kappa\widetilde{h} \quad h_{ex} = \kappa\widetilde{h}_{ex} \ . \end{aligned}$$

L'énergie libre devient alors

$$\begin{aligned} G(u,A) &= \kappa^2\widetilde{G}(\widetilde{u},\widetilde{A}) \\ &= \frac{1}{2}(\int_\Omega |\nabla_A u|^2 + |dA|^2 + \frac{\kappa^2}{2}(1-|u|^2)^2) \end{aligned}$$

où

$$\nabla_A u = (\partial_{x_1} u - iA_1 u \ , \partial_{x_2} u - iA_2 u) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \ .$$

L'énergie à minimiser est donc

$$J(u,A) = G(u,A) - \int_\Omega h.h_{ex} \ , \tag{3}$$

parmi toutes les configurations possibles $(u, A) \in H^1(\Omega\ ;\mathbf{R}^2) \times H^1(\Omega\ ;\mathbf{R}^2)$.

Remarquons que les fonctionnelles G et J sont invariantes par transformations de jauge. Plus précisément, soit $\varphi \in H^2(\Omega\ ;\ \mathbf{R})$ et

$$\begin{aligned} v &= (\exp i\varphi)u \\ B &= A + d\varphi \ . \end{aligned}$$

On vérifie aisément que $dB = dA$ (B est aussi un potentiel vecteur pour h), et

$$G(u,A) = G(v,B) \ . \tag{4}$$

On dit que la configuration (u, A) est équivalente à la configuration (v, B) (par transformation de jauge). Seules les quantités invariantes par transformation de jauge sont observables physiquement : en particulier $|u|, h$, et le courant

$$J = (iu, \nabla_A u) = ((iu, \partial_{x_1} u - iA_1 u) \ , (iu \ , \partial_{x_2} u - iA_2 u)) \in \mathbf{R}^2 \ .$$

En revanche u, et A ne sont pas des quantités observables (on dit que l'espace physique, est le quotient de l'espace des configurations par le groupe de jauge).

L'invariance de jauge a évidemment des conséquences pour le problème de minimisation (8) : elle rend le problème non compact. Pour remédier à cela, on peut imposer une condition supplémentaire sur A. Ici on choisit la condition

$$\begin{cases} \text{div } A = 0 \text{ (ou } d^*A = 0 \quad \text{dans le langage des formes) dans} \quad \Omega \ , \\ A.\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \ . \end{cases} \tag{5}$$

On montre facilement que pour toute configuration (v, B) donnée, on peut trouver une configuration (u, A) qui lui est équivalente, et telle que A vérifie (5).

Comme on suppose Ω simplement connexe, borné, les relations (5) peuvent s'intégrer, grâce au lemme de Poincaré. Il existe donc $\xi \in H^2(\Omega)$ tel que

$$A = -\xi_{x_2} dx_1 + \xi_{x_1} dx_1 \ . \tag{6}$$

La fonction ξ vérifie alors

$$\begin{cases} \Delta\xi = h \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \quad \xi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \ . \end{cases} \tag{7}$$

III. Le problème de minimisation (3).

On suppose ici que le champ extérieur est constant, i.e. $h_{ex} = C^{te}$. Soit

$$V = \left\{ \begin{array}{r} (u, A) \in H^1(\Omega\ ; \mathbf{R}^2) \times H^1(\Omega\ ; \mathbf{R}^2), \mathrm{div} A = 0\ ds\ \Omega \\ A.\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right\}$$

On cherche donc $(u, A) \in V$, minimum de

$$\inf_{(v,B)\in V} J(v, B) \ . \tag{8}$$

On montre facilement que (8) est atteint. la solution (u, A) vérifie alors les équations de Ginzburg-Landau suivantes

$$\begin{aligned} -\nabla_A^2 u &= \kappa^2 u(1 - |u|^2) \\ - * dh &= J = (iu, d_A u) \ , \end{aligned} \tag{9}$$

où l'opérateur ∇_A^2 est défini par

$$\nabla_A^2 = \sum_{j=1}^{2} (\partial_{x_j} - iA_j)(\partial_{x_j} - iA_j) \ .$$

On obtient de plus les conditions au bord suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ h = h_{ex} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \ , \end{array} \right. \tag{10}$$

qui montrent en particulier que le champ magnétique est continu au passage de la frontière $\partial\Omega$.

La question principale qui nous préoccupe ici est la suivante ?

"Quelles sont les propriétés des minima (u, A) ? A quoi ressemblent-ils ?"

La réponse à cette question dépend de manière cruciale de la valeur de κ, mais aussi de celle du champ extérieur appliqué. Selon la valeur de κ, on distingue ainsi deux types de supraconducteurs.

• **1er Cas :** $\kappa \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce sont les supraconducteurs de type I. Il existe alors un champ extérieur critique $H_{c_2} \simeq \kappa\sqrt{2}$, tel que :

- si $h_{ex} \leq H_{c_2}$, le matériau se trouve dans l'état supraconducteur, et

$$u \simeq \exp i\theta, \quad \text{où} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

et h vérifie

$$-\Delta h + h = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad \text{(équation de London)} \quad .$$

- si $h_{ex} > H_{c_2}$ le matériau est dans l'état normal $u \simeq 0$ et

$$h \simeq h_{ex} \quad \text{dans} \quad \Omega \ .$$

On vérifie aisément en particulier que si Ω est grand (au vu de l'équation de London), le champ magnétique ne pénètre pas le matériau, si $h_{e_x} \leq H_{c_2}$ [en fait, comme on a renormalisé beaucoup de constantes, le domaine est grand en pratique]. En revanche, dès que le champ magnétique excède H_{c_2}, le matériau est en phase normale et le champ magnétique pénètre le matériau.

• **2ème cas** $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On dit alors que le matériau est un supraconducteur de type II. Il existe alors un autre champ critique $H_{c_1} < H_{c_2}$ tel que :

- si $h_{ex} < H_{c_1}$, le matériau se comporte comme un supraconducteur de type I, c'est à dire $u \simeq \exp i\theta$, et $-\Delta h + h = 0$ dans Ω.

- si $H_{c_1} < h_{ex} < H_{c_2}$, on voit apparaître un nouveau phénomène : il y a coexistence de la phase supraconductrice et de la phase normale. Cette dernière reste confinée autour de tourbillons de taille caractéristique κ^{-1}, que nous noterons ε,

$$\varepsilon = \kappa^{-1} \ .$$

Le nombre de tourbillons augmente, lorsque l'on accroît le champ magnétique extérieur. Lorsque h_{ex} est proche de H_{c_2}, le nombre de tourbillons est tellement important que la phase supraconductrice disparaît progressivement. On a donc :

- si $h_{ex} > H_{c_2}$ le matériau est en phase normale, et le champ induit est pratiquement identique au champ extérieur.

Comme on peut s'en douter l'étude près de H_{c_2} est extrêmement délicate, et nous n'allons pas considérer ce problème ici (voir l'exposé de C. Bolley et B. Helffer [BH]). En revanche, nous allons nous intéresser au comportement près du premier champ critique H_{c_1}, afin de tenter d'expliquer la formation de ces tourbillons. A cet effet, nous allons supposer que κ est très grand (ou $\varepsilon = \kappa^{-1}$ est très petit), et mener une étude asymptotique $\kappa \to +\infty$. Abrikosov a montré (voir par exemple [SST]) que lorsque $\kappa \to +\infty$, on devait avoir

$$H_{c_1} \simeq \frac{1}{2}(\log \kappa + c) \qquad \kappa \to +\infty \ .$$

En fait (comme nous le verrons plus loin), son argument montre seulement, rigoureusement, que

$$H_{c_1} \leq \frac{1}{2}(\log \kappa + c) \ . \tag{11}$$

Etablir l'inégalité inverse est, à notre sens, un problème ouvert important.

Apparition de tourbillons.

Nous désirons ici expliciter le mécanisme qui conduit à la formation de tourbillons, près du champ critique H_{c_1}, dans la limite asymptotique $\kappa \to \infty$. Nous supposerons toujours que

$$(12) \qquad |h_{e_x}| \leq C(\log \kappa) \quad (\text{où} \quad C \quad \text{est une constante}) \quad .$$

Commençons par quelques propriétés simples des minima (u, A).

Lemme 1.— *On a, pour* $(u\ ,\ A)$ *minimum de (3)*

$$(13) \qquad G(u, A) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_A u|^2 + |dA|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1 - |u|^2)^2 \leq C h_{ex}^2 \leq c(\log \kappa)^2 \ ,$$

où C *est une constante.*

Preuve : Par minimalité on a $J(u, A) \leq J(v, B) \leq 0$, où $v \equiv (1, 0)$ et $B \equiv 0$. on a donc

$$G(u, A) \leq C(\int |h|^2)^{1/2} |h_{ex}| \leq C(G(u, A))^{1/2} |h_{ex}| \ ,$$

et le lemme en découle.

Remarques

1. L'estimation est optimale.

2. Dans [BR], nous avions une estimation cruciale en $|\log \kappa|$. On ne peut donc transposer telles quelles les techniques employées.

3. On a en particulier

$$\int_\Omega (1 - |u|^2)^2 \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0 \quad (\text{ou} \quad \varepsilon \to +\infty) \ .$$

En particulier u est "presque" une application à valeur dans le cercle S^1, sauf aux endroits (de mesure petite), où $|u| \simeq 0$. Ces endroits sont précisément ceux où apparaissent les tourbillons (voir lemme 3).

Lemme 2.— *On a* $(u, A) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *et*

$$(14) \qquad |u| \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$$

$$(15) \qquad |\nabla h| \leq |\nabla_A u| \leq \frac{C}{\varepsilon} = C\kappa \ .$$

Preuve : on peut adapter les arguments de [BR].

Lemme 3.— *Il existe une constante $\lambda > 0$, et ℓ points $a_1, \cdots, a_\ell$ dans Ω tels que*

$$|u(x)| \geq \frac{1}{2} \quad \textit{sur} \quad \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} B(a_i, \lambda\varepsilon) \tag{16}$$

$$\ell \leq C|\log\varepsilon|^2 \tag{17}$$

Preuve : voir [BR] ou [BBH].

Les disques $B(a_i, \lambda\varepsilon)$ sont les endroits où les tourbillons sont localisés. Contrairement à [BR], la borne sur ℓ dépend de κ et diverge lorsque $\kappa \to +\infty$. Cette borne n'est pas optimale : on peut montrer que $\ell \leq |\log\varepsilon|^{1/2}$. Néanmoins, sous l'hypothèse (12), on ne peut espérer que ℓ reste bornée lorsque $\kappa \to +\infty$. Ainsi si $h_{ex} = \log\kappa$, on peut montrer que $\ell \to +\infty$ lorsque $\kappa \to \infty$. En revanche, si $h_{ex} = H_{c_1} + C$, où C est une constante quelconque, on peut espérer que ℓ reste uniformément borné lorsque $\kappa \to +\infty$.

En dehors des boules $B(a_i, \lambda\varepsilon)$, $|u| \geq \frac{1}{2}$. On peut donc définir $\frac{u}{|u|}$ sur $\partial B(a_i, \lambda\varepsilon)$: il s'agit d'une application à valeur dans le cercle S^1. On notera d_i son degré topologique :

$$d_i = \deg(u, \partial B(a_i, \lambda\varepsilon)) \in \mathbf{Z} \ .$$

Si cet invariant est non nul, on voit que u "tourne" autour de $\partial B(a_i, \lambda\varepsilon)$. Ceci justifie l'appellation "tourbillon".

On peut maintenant se demander pourquoi il est favorable, énergetiquement, d'avoir de tels tourbillons. A cet effet, nous allons réécrire la fonctionnelle J en essayant de séparer les contributions dues à A et u. Rappelons que

$$A = -\xi_{x_2} dx_1 + \xi_{x_1} dx_2$$

où ξ vérifie (7). On a donc, en posant $\rho = |u|$

$$|\nabla_A u|^2 = |\nabla u|^2 + \rho^2 |\nabla\xi|^2 + 2(iu, \xi_{x_2} u_{x_1} - \xi_{x_1} u_{x_2}) \ .$$

On peut montrer, en utilisant le Lemme 1 et l'équation (17)

$$\int_\Omega (1-\rho^2)|\nabla\xi|^2 \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \kappa \to +\infty$$

et que

$$\int_\Omega (iu, \xi_{x_2} u_{x_1} - \xi_{x_1} u_{x_2}) = 2\pi \sum_{i=1}^{\ell} \xi(a_1) d_i + 0(1)$$

On a donc

$$J(u,A) = F(u) + V(\xi) + 0(1)$$

où

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u|^2)^2$$

et

$$V(\xi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta\xi|^2 + |\nabla\xi|^2 - \int_\Omega h_{ex}\Delta\xi + \sum_{i=1}^{\ell} 2\pi d_i \xi(a_i)\ .$$

On voit en particulier que si les points a_i et les entiers d_i sont connus, on peut minimiser V séparément. On voit qu'à une petite perturbation près (que nous négligeons ici), ξ vérifie l'équation

$$(18)\qquad \begin{aligned} -\Delta^2\xi + \Delta\xi = 2\pi\sum_{i=1}^{\ell} d_i\delta_{a_i} &\quad \text{dans} \quad \Omega \\ \xi = 0 &\quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \Delta\xi = h_{ex} &\quad \text{sur} \quad \partial\Omega\ . \end{aligned}$$

On trouve donc l'équation de London, déjà évoquée (dans le cas $U\{a_i\} = \emptyset\}$

$$(19)\qquad \begin{cases} -\Delta h + h = 2\pi\Sigma\delta_{a_i} & \text{dans} \quad \Omega \\ h = h_{ex} & \text{sur} \quad \partial\Omega\ . \end{cases}$$

La fonctionnelle F a été étudiée dans [BBH] (notons qu'ici il n'y a pas de conditions spéciales au bord $\partial\Omega$ pour u).

• Supposons tout d'abord que $h_{ex} < H_{c_1}$, c'est à dire qu'il n'y a pas de tourbillons, $U\{a_i\} = \emptyset$. Dans ce cas il est clair que, pour minimiser F il suffit de prendre u constante, $u = \exp i\theta$, où $\theta \in [0, 2\pi]$, et alors $F(u) = 0$. Le champ magnétique h est déterminé par l'équation de London, ce qui permet de calculer ξ et A. On retrouve les résultats déjà annoncés. On a en particulier

$$\xi = h_{ex}\xi_0\ ,$$

ou ξ_0 est la solution (unique) de

$$(20)\qquad \begin{cases} -\Delta^2\xi_0 + \Delta\xi_0 = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \Delta\xi_0 = 1 & \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \xi_0 = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega\ . \end{cases}$$

Lorsqu'on est en présence de tourbillons, on peut écrire

$$(21)\qquad \xi = h_{ex}\xi_0 + \gamma\ ,$$

où γ est la solution de

$$(22) \qquad \begin{cases} -\Delta^2\gamma_0 + \Delta\gamma_0 = \sum_{i=1}^{\ell} 2\pi d_i \delta_{a_i} & \text{dans} \quad \Omega \\ \Delta\gamma_0 = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \gamma_0 = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \; . \end{cases}$$

Un calcul élémentaire montre qu'alors

$$V(\xi) = V(h_{ex}\xi_0) + V(\gamma) \; .$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une majoration de H_{c_1}. On a

Lemme 4.— *Il existe des constantes C_1 et C_2 ne dépendant que de Ω, telle que*

$$H_{c_1} \leq C_1(\log\kappa + C_2) \; .$$

Preuve : Nous avons déjà étudié la configuration sans tourbillon. Il suffit donc de trouver une configuration avec un tourbillon, qui a une énergie inférieure. Supposons pour simplifier que $\Omega = B(R)$ ou $R \geq 1$. Soit u la fonction $\Omega \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$u(r,\theta) = f(r)\exp i\theta \qquad\qquad (r = \sqrt{x_i^2 + x_2^2}) \; ,$$

ou f est une fonction telle que

$$f \equiv 1 \quad \text{sur} \quad B(R) \setminus B(\varepsilon) \; ,$$

$$f \equiv 0 \quad \text{sur} \quad B(R) \setminus B(\frac{\varepsilon}{2}) \; ,$$

et $|f'(r)| \leq \frac{4}{\varepsilon}$

On montre aisément que

$$(23) \qquad |F(u) - \pi|\log\varepsilon|| < C \; , \quad \text{où} \quad C \quad \text{est une constante.}$$

De plus u a un "tourbillon" en $a_1 = (0,0)$ de degré $+1$. Si on prend alors ξ sous la forme (21), il vient

$$\begin{aligned} \zeta(u,A) &= F(u) + V(h_{ex}\xi_0) + V(\gamma) \\ &= F(u) + 2\pi h_{ex}\xi_0(0,0) + W_0 + V(\gamma) \; , \end{aligned}$$

où W_0 est l'énergie de la configuration sans tourbillon, à savoir

$$W_0 = h_{ex}^2 \int_\Omega |\Delta\xi_0|^2 + |\nabla\xi_0|^2$$

Pour que la configuration (u, A) soit favorable, il suffit donc que

$$F(u) + 2\pi h_{ex}\xi_0(0,0) + V(\gamma) \leq 0 \ .$$

Or $\xi_0 \leq 0$ (par le principe du maximum), la relation précédente devient

$$F(u) + V(\gamma) \leq 2\pi h_{ex}|\xi_0(0,0)| \ .$$

Ce qui est bien le cas lorsque h_{ex} est assez grand. Comme

$$|V(\gamma)| \leq C$$

où C est une constante, on démontre le Lemme grâce à (23), avec $C_1 = \frac{1}{2|\xi_0(0,0)|}$.

Remarque

1. Dans le cas où Ω n'est pas une boule, on trouve

$$C_1 = \frac{1}{2\max|\xi|} \ .$$

2. Le calcul que nous venons de faire est dans l'esprit de celui d'Abrikosov, que l'on trouvera dans [SST] p.46-52.

Ces calculs semblent indiquer que

$$H_{c_1} = C_1((\log\kappa) + C_2)$$

Il semble en effet intuitivement clair que lorsqu'on augmente h_{ex}, la première configuration avec tourbillons ne possède qu'un seul tourbillon. Nous n'avons pourtant pas été capables de prouver jusqu'a présent cette assertion. La difficulté essentielle réside dans le fait qu'on ne peut exclure, à priori, des configurations avec des “dipoles”, c'est à dire des paires de tourbillons tournants en sens inverses. Il faudrait montrer que de telles configurations ne sont pas favorables énergétiquement.

Pour conclure cet exposé, remarquons que l'énergie $J(u, A)$ est finalement essentiellement déterminée par les configurations des tourbillons (a_i, d_i). Pour estimer $F(u)$, on peut remarquer qu'en dehors des disques $B(a_i, \lambda_\varepsilon)|u| \simeq 1$. On est donc conduit à considérer le problème

$$\inf_{v\in\mathcal{C}} E(v) \tag{24}$$

où

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{l} v \in H^1(\Omega \setminus \cup_{i=1}^{\ell} B(a_i, \lambda\varepsilon), S^1) \\ \deg(v; \partial B(a_i, \lambda\varepsilon)) = d_i \end{array} \right\}$$

et

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^2. \qquad\qquad \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{\ell} B(a_i, \lambda\varepsilon)\ .$$

On montre alors (cf. [BBH]) que

$$\mu = \inf_{v\in\mathcal{C}} E(V) = E(\tilde{\phi})$$

où $\tilde{\phi}$ est la solution de

$$(25)\qquad \begin{cases} \Delta\tilde{\phi} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon \\ \displaystyle\int_{\partial B(a_i,\lambda\varepsilon)} \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\nu} = 2\pi d_i \\ \tilde{\phi} = C^{te} \quad \text{sur} \quad \partial B(a_i,\lambda\varepsilon) \\ \tilde{\phi} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\ . \end{cases}$$

Notons (du moins heuristiquement) que l'énergie de $\tilde{\phi}$ est proche sur Ω_ε de la solution ϕ de

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\Delta\phi = \sum_{i=1}^{\ell} 2\pi d_i \delta_{a_i} \quad \text{dans} \quad \Omega \\ &\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

En première approximation l'étude de la fonctionnelle $J(u, A)$, se ramène donc à étudier

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^2 + h_{ex}\sum_{i=1}^{\ell} \xi_0(a_i)d_i\ ,$$

qui ne dépend que des points (a_i, d_i). Il faut alors minimiser cette fonctionnelle parmi toutes les configurations possibles (a_i, d_i) *sans* restriction, a priori, sur le nombre des tourbillons, ni sur le *signe* de d_i (on ne peut exclure a priori des configurations dipolaires). Ce problème, plus simple que le problème initial, ne semble pas avoir été, à notre connaissance résolu. On peut le reformuler comme suit, de manière encore plus simple (en prenant $d_i = \pm 1$)

Problème : Soit $\varepsilon > 0$,. Pour $\ell \in \mathbf{Z}$, tel que

$$(27)\qquad |\ell| \le |\log\varepsilon|$$

on considère tout les configurations de ℓ points $a_1, \cdots, a_\ell$ dans Ω tels que

$$(28)\qquad |a_i - a_j| \ge 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad i \ne j$$

$$(29)\qquad \text{dist}\ (a_i, \partial\Omega) \ge 2\varepsilon$$

et ℓ nombres relatifs $d_1, \cdots, d_\ell$ dans $\{-1, +1\}$.

Soit ϕ solution de (26). Soit

$$W((a_i, d_i)) = W(\phi) \ . \tag{30}$$

Quelle est la configuration (a_i, d_i) qui minimise (30), parmi toutes celles qui vérifient (27), (28), (29) ? A-t-on en particulier $d_i = +1, \forall i$? Comment se répartissent les points a_i ? Forment-ils un réseau ? Mêmes questions avec ϕ remplacé par $\widetilde{\phi}$?

Remerciements. Nous remercions tout particulièrement Vincent Rivasseau pour les conversations enrichissantes que nous avons eues avec lui.

Références

[BBH] F. Bethuel, M. Brezis, F. Hélein - *Ginzburg-Landau Vortices* Birkhaüser (1994).

[BH] C. Bolley et B. Helffer - in *Seminaire X-EDP, n° IV, 1993-1994*

[BR] F. Bethuel, T. Rivière - *A variationnal problem related to superconductivity* à paraître Annales IHP, analyse non linéaire.

[SST] D. Saint-James, G. Sarma, E.J. Thomas - *Type II superconductivity* Pergamon Press (1969).

F. Bethuel
Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Paris-Sud
Bât. 425
91405 Orsay cedex

T. Rivière
CMLA
ENS de Cachan
61 avenue du Président Wilson
94235 Cachan Cedex