M. Bezard

Problème aux limites pour le système de Vlasov-Maxwell

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n^o 4, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A4_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

PROBLEME AUX LIMITES POUR LE SYSTEME DE VLASOV-MAXWELL

M. BEZARD

Exposé n° IV

20 octobre 1992

I Introduction

II Résultat principal et schéma de démonstration

III Principales étapes techniques

IV Conclusions et commentaires

I Introduction

La théorie des équations cinétiques permet aujourd'hui, dans le sillage d'articles de R. di Perna et P.L. Lions [13-12-14-15-22] de considérer des solutions faibles globales en temps pour l'équation de Bolztmann, l'équation de Fokker-Planck-Boltzmann, le système de Vlasov-Poisson, ou le système de Vlasov-Maxwell. Signalons aussi le travail récent de Rendal et Rein [38] sur des solutions fortes du système de Vlasov-Einstein.

Les travaux ci-dessus viennent sensiblement compléter les articles antérieurs de Glassey-Strauss [19], Wollmann [45], Ukai-Asano [3,43], Batt [5], Bardos-Degond [4], concernant des systèmes cinétiques dans lesquels intervient un couplage d'un champ électromagnétique à une équation de transport via un terme dit de Vlasov : c'est le cas des sytèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell.

Tous ces travaux ont en commun de ne s'intéresser qu'au problème global en espace, et il ne semble pas qu'une étude de problèmes aux limites dans un cadre d'existence globale en temps pour des solutions faibles ait été initiée ailleurs que dans les travaux de K. Hamdache [22] et de Ukai-Asano [44], et ce pour l'équation de Boltzmann. Dans le cas stationnaire de Vlasov-Poisson ou de Vlasov-Maxwell, on dispose du travail très récent de F. Poupaud [34-35], et hormis ces deux résultats, la question semble totalement ouverte en dimension 3 d'espace.

Dans le cas unidimensionnel, pour un exemple de problème cinétique issu de la physique des lasers à électrons libres, on pourra consulter le travail de Greengard et Raviart [20].

Contrairement à la démarche suivie par Poupaud, on s'intéresse au problème aux limites pour le système de Vlasov-Maxwell, dans un cadre instationnaire, en essayant de reprendre la stratégie mise au point par P.L. Lions et R. di Perna [15]. La partie cinétique proprement dite est justiciable des mêmes arguments que dans [15]. C'est donc sur les conditions aux limites qu'un travail est nécessaire.

Si le choix des conditions aux limites s'avère assez simple en ce qui concerne l'équation de Vlasov proprement dite, il semble que la lumière n'ait pas encore été totalement faite quant aux choix de conditions aux limites raisonnables pour le système de Maxwell.

Les conditions que nous imposerons sur le bord, pour l'équation de Vlasov, sont très simples et signifient en particulier que les flux de masse et d'énergie des particules ont tendance à faire décroitre l'énergie et la masse totale du système étudié. Nous avons aussi besoin d'une hypothèse sur la régularité du noyau au bord dont il est clair qu'elle est satisfaite dans les cas physiques que nous examinons.

Comme nous l'avons dit, le choix est plus délicat pour la partie du système qui fait intervenir les équations de Maxwell ; en effet, la littérature physique [23, 25, 28, 33] évite soigneusement cette question et se cantonne à parler, dans les cas favorables, de conditions de bord de type conducteur parfait lors de l'étude de guides d'ondes.

Pour ce qui concerne la théorie mathématique des équations de Maxwell, la totalité des références classiques consultées [via 9,17,27] n'aborde pas la question de savoir quelle est la classe des "bonnes conditions aux limites", comme l'avait posée et résolue Garding [18] dans le cas plus simple de l'équation des ondes, et se borne à étudier le cas du conducteur parfait dans le cadre du théorème de Hille Yosida ou à la suite des travaux de Friedrichs [17] sur les systèmes symétriques dissipatifs. La question de la régularité des solutions est évidemment hors d'atteinte des méthodes de semi-groupes et n'est jamais réellement évoquée. Ceci semble dû à la nature caractéristique du bord pour le système de Maxwell.

Faisant exception à cette règle, l'article de Majda et Osher [31] tente une classification des conditions au bord pour des systèmes hyperboliques symétrisables, caractéristiques de multiplicté constante dans un voisinage du bord, dans le sillage des articles de Kreiss [27] et Sakamoto [39]. A l'aide d'une machinerie pseudo-différentielle sophistiquée, sous l'hypothèse de "condition de Lopatinski uniforme", ils obtiennent des résultats d'existence, d'unicité, et de régularité, faisant apparaître un phénomène de "perte des dérivées normales", et ils montrent que leurs résultats sont essentiellement optimaux.

Là où le bât blesse, c'est que les conditions de type conducteur parfait violent la condition de Lopatinski uniforme, et n'entrent donc pas dans le cadre de [31], pour la même raison que l'équation des ondes $\Box u = f$ avec condition Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = 0$ n'entre pas dans le domaine de validité de la théorie de Kreiss-Sakamoto : le déterminant de Lopatinski [8-39,27] s'annule exactement à l'ordre 2 en certains points de la zone elliptique [24], et cette difficulté, à peine reconnue par Majda-Osher [31], impose de mieux tenir compte du caractère dissipatif de ces conditions aux limites. Il aura fallu attendre l'étude de J. Rauch [36], motivée par des questions de dynamique des fluides, [32,40], pour qu'un résultat d'existence et de **régularité** soit prouvé pour des systèmes symétriques maximaux dissipatifs, et on pourra juger combien notre méthode s'inspire des estimations conormales de [36] pour traiter complètement le problème de perturbation singulière qui intervient dans notre construction.

L'article présente ici un cas d'équation de Vlasov-Maxwell avec des conditions au bord maximales dissipatives qui, comme dans le cas du bord conducteur, violent la condition de Lopatinski.

Ainsi que l'intuition de Friedrichs [16], le laisse prévoir, la méthode de viscosité d'ordre élevé que nous utilisons sur le système de Maxwell fait naturellement apparaître un système maximal dissipatif à la limite de viscosité évanescente, et c'est ce choix de condition sur bord que nous faisons. Il serait intéressant de savoir si une modification de cette méthode, en particulier faisant intervenir des conditions aux limites autres que celles de Dirichlet dans le système visqueux, permet de traiter le cas de conditions au bord générales pour le système de Maxwell, vérifiant la condition de Lopatinski uniforme.

Le plan de l'exposé est le suivant : au paragraphe II on énonce le résultat d'existence globale de solutions faibles, en précisant les hypothèses de travail, et on met en place le schéma de résolution. Le paragraphe III présente le détail des principales étapes techniques de la preuve. Le paragraphe IV propose quelques commentaires.

II Résultat principal et schéma de démonstration

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un ouvert à frontière $\partial\Omega, C^\infty$ régulière compacte, de normale extérieure $n(x)$, où $x \in \partial\Omega$.

Sur $\mathbf{R}_t \times \Omega \times \mathbf{R}^3$, on cherche une fonction de densité $f(t,x,v) \geq 0$ qui satisfait au sens des distributions le système des équations de Vlasov-Maxwell suivant

$$(VM) \begin{cases} \partial_t f + \nabla_x.(vf) + \nabla_v.((v \times B + E)f) = 0 & \text{sur} \quad \mathbf{R}_t \times \Omega \times \mathbf{R}^3 \\ \partial_t E - \nabla \times B = -j \qquad \nabla.E = \rho & \text{sur} \quad \Omega \\ \partial_t B + \nabla \times E = 0 \qquad \nabla.B = 0 & \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

où

$$\rho = \rho(t,x) = \int f(t,x,v)dv \quad \text{et} \quad j = j(t,x) = \int f(t,x,v)vdv$$

représentent respectivement la densité de particules et le courant dans le sytème. Ce système d'équations intervient dans de très nombreuses modélisations en physique des plasmas, en astrodynamique, [5,20], où f décrit l'évolution statistique d'une population de particules chargées soumises à leur propre champ électromagnétique.

Dans le cas d'une évolution libre, c'est à dire sans condition aux limites, ($\Omega = \mathbf{R}^3$), les résultats de P.L. Lions et R. di Perna [15] assurent l'existence d'une solution faible globale en temps pour des données initiales $f_0(x,v), E_0(x), B_0(x)$ qui vérifient :

i) $0 \leq f_0(t,v)$ presque partout en x, v.

ii) $\int\int(1+|v|^2)f_0(x,v)dxdv + \int |E_0(x)|^2 + |B_0(x)|^2 dx < \infty$

iii) $\mathrm{div} B_0 = 0$ et $\mathrm{div} E_0 = \rho_0 = \int f_0(x,v)dv$.

iv) $f_0 \in L^2(dxdv)$

Nous nous intéressons ici au même problème en faisant intervenir des conditions aux limites sur $\partial\Omega$.

Définissons pour cela $\Sigma^\pm \subset \mathbf{R}_t \times \partial\Omega \times \mathbf{R}^3$ par

$$\Sigma^\pm = \{(t,x,v) \in \mathbf{R}_t \times \partial\Omega \times \mathbf{R}^3 / v.n(x) \lesseqgtr 0\} .$$

En tout point $(t,x) \in \mathbf{R}_t \times \partial\Omega$ on définit aussi

$$\Sigma^\pm_{x,t} = \{v \in \mathbf{R}^3 / v.n(x) \lesseqgtr 0\}$$

Les conditions aux limites que nous considérerons seront

$$(CL) \quad \begin{cases} Kf_{|\Sigma^+} = f_{|\Sigma^-} \quad \text{sur} \quad \mathbf{R} \times \partial\Omega \times \mathbf{R}^3 \\ P(x,n(x)).E(t,x) + R(x,n(x)).P(x,n(x)).B(t,x)_{|\partial\Omega} = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbf{R} \times \partial\Omega \end{cases}$$

où $P(x,n(x))$ désigne le projecteur orthogonal de $\mathbf{R}^3$ sur le plan tangent à $\partial\Omega$ en x, $R(x,n(x))$ désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan tangent à $\partial\Omega$ en x, et

$$Kf_{|\Sigma^+}(t,x,v) = \int_{\Sigma^+} k(x,v,v')f(t,x,v')dv'$$

est un opérateur de bord qui vérifie :

$\mathcal{B}i)$ Si $f_{|\Sigma_+} \geq 0 \quad \int\int_{\Sigma^+} (1-K)f(v.n)dxdv \geq 0$

$\mathcal{B}ii)$ Si $f_{|\Sigma_+} \geq 0 \quad \int\int_{\Sigma^+} (1-K)fv^2(v.n)dxdv \geq 0$.

Ces deux conditions signifient que les flux de masse et d'énergie sont tels, au bord, que le système ne peut recevoir ni masse ni énergie de l'extérieur.

En fait nous ne considérons que des conditions aux limites du type

$$f(t,x,v)_{|\Sigma^-} = \alpha f(t,x,v-2(v.n)n)_{|\Sigma^+} + \beta f(t,x,-v)_{|\Sigma^+}$$

où les coefficients α , β sont positifs ou nuls et vérifient en outre $0 \leq \alpha+\beta \leq 1$. Ainsi les hypothèses techniques suivantes sont toujours satisfaites :

$\mathcal{B}iii)$ Si $f_{|\Sigma^+}$ est C^2, alors $(Kf)_{|\Sigma^-}$ est C^2

$\mathcal{B}iv)$ K est continu de $L^p(\Sigma^+)$ dans $L^p(\Sigma^-)$ pour $1 \leq p < \infty$

de norme inférieure à 1 : $\|Kf\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.

Remarque : Le cas le plus classique de la littérature physique et celui de la réflexion spéculaire

$$f_{|\Sigma^-}(t,x,v) = f(t,x,v-2(v.n)n)_{|\Sigma^+}$$

pour lequel les conditions précédentes sont évidemment satisfaites. On peut aussi considérer le cas de la réflexion inverse pure

$$f_{|\Sigma^-}(t,x,v) = f(t,x,-v)_{|\Sigma^+}$$

qui entre encore dans notre cadre, de même que le cas du bord parfaitement absorbant pour lequel $\alpha = \beta = 0$.

Remarquons dès à présent, pour ne pas avoir à nous en préoccuper dans la suite, que si $(E,B) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ et $f \in L^\infty(0,T;L^1((1+|v|^2)dxdv) \cap L^2(dxdv))$ sont solutions du système de Vlasov-Maxwell (VM), la définition des conditions aux limites ne pose aucun problème et constitue une application des résultats d'hypoellipticité au bord [24] très classique : pour ce qui concerne l'équation de Vlasov, on remarque que cette équation de transport s'écrit sous la forme $\mathrm{div}Y = 0$, où la divergence est prise sur $\mathbf{R} \times \Omega \times \mathbf{R}^3$, et où $Y \in L^2_{\mathrm{loc}}$, de sorte que si N désigne la normale extérieure au domaine $\mathbf{R} \times \Omega \times \mathbf{R}^3, Y.N$ est toujours défini au sens des distributions sur le bord $\mathbf{R} \times \partial\Omega \times \mathbf{R}^3$, c'est à dire que $(v.n)f$ a un sens dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \partial\Omega \times \mathbf{R}^3)$, et il suffit de noter que Σ^+ et Σ^- sont des ouverts du bord pour que l'opérateur de bord ait automatiquement un sens. Par ailleurs l'application qui à $(Y \in L^2_{\mathrm{loc}}, \mathrm{div}Y = 0)$ associe $Y.N$ est continue à valeurs dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \partial\Omega \times \mathbf{R}^3)$. De même le bord $t = 0$ est non caractéristique et donc $Y_{t=0}$ est toujours définie au sens des distributions.

Pour la partie Maxwell, il suffit de voir que le vecteur $\begin{pmatrix} P(x,n(x)).E \\ P(x,n(x)).B \end{pmatrix}$ n'est pas dans le noyau de la matrice de bord pour que sa trace soit automatiquement définie et continue au sens des distributions de

$$\left\{ \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix} / \partial_t E - \nabla \times B \in L^2 \ \partial_t B + \nabla \times E \in L^2 \right\}$$

à valeurs dans $\mathcal{D}'(\partial\Omega)$. En effet, le système de Maxwell s'écrit sous la forme $\partial_t U + \mathcal{A}(iD)U = J$ où $U = \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -j \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$\mathcal{A}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & a(\xi) \\ -a(\xi) & 0 \end{pmatrix} \quad a(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que la matrice de bord en un point $x \in \partial\Omega$ s'écrit $\mathcal{A}(n(x))$, si $n(x)$ est la normale extérieure en x à Ω. Comme le système de Maxwell est caractéristique de multiplicité constante dans un voisinage du bord, cette matrice de bord n'est pas inversible. Cependant son noyau est de dimension constante, et on peut construire, au voisinage d'un point du bord, une fonction $\pi(x)$, régulière, qui associe à tout point le projecteur orthogonal sur le noyau de $\mathcal{A}(\tilde{n}(x))$ où $\tilde{n}(x)$ désigne un prolongement quelconque du champ normal au voisinage du point du bord considéré.

Redressons localement le bord par un changement de coordonnées, et notons y_1, y_2, y_3 les nouvelles coordonnées, et Φ le difféomorphisme local correspondant.

Nous pouvons supposer que Ω est donné localement par $y_3 > 0$, et $\partial\Omega$ par $y_3 = 0$. Dans ces nouvelles coordonnées, le système de Maxwell se réécrit sous la forme

$$\mathcal{A}(n(\phi^{-1}(y)))\frac{\partial U}{\partial y_3} + \mathcal{D}(y, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial t})U = J$$

où $\mathcal{D}$ est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre 1.

Si pour un réel $p > 1$ on a $U \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R} \times \Omega)$, et $J \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R} \times \Omega)$, en multipliant le système précédent par $(1 - \pi) \circ \phi^{-1}(y)$, on voit que

$$\mathcal{M}\frac{\partial}{\partial y_3}((1 - \pi) \circ \phi^{-1}U) = (1 - \pi) \circ \phi^{-1}J - \tilde{\mathcal{D}}(t, y, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial t})U$$

où $\mathcal{M}$ est une matrice injective sur l'image de $(1 - \pi) \circ \phi^{-1}$ et où $\tilde{\mathcal{D}}$ est un autre opérateur différentiel tangentiel d'ordre 1.

Il en résulte immédiatement que $\frac{\partial}{\partial y_3}((1 - \pi) \circ \phi^{-1}U) \in L^p_{y_3}(W^{-1,p})$, et comme on sait déjà par ailleurs que $U \in L^p_{\text{loc}}$, on voit que $(1 - \pi) \circ \phi^{-1}U \in W^{1,p}(y_z; W^{-1,p})$ et donc admet une trace sur $y_z = 0$. Par difféomorphisme il en résulte que $(1 - \pi)U$ possède une trace sur $\partial\Omega$. et la démonstration précédente prouve aussi que cette trace est continue au sens suivant :

$$\text{si} \quad U^n = \begin{pmatrix} E^n \\ B^n \end{pmatrix} \text{vérifie } \partial_t U^n + A(iD)U^n = J^n \quad \text{avec} \quad (E^n, B^n) \rightharpoonup (E, B) \; w^*L^p_{\text{loc}}$$

$$\text{et} \quad j^n \rightharpoonup j \; w^*L^p_{\text{loc}} \,, \quad \text{alors} \quad (1 - \pi)U^n_{|\partial\Omega} \rightharpoonup (1 - \pi)U_{|\partial\Omega} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \partial\Omega)$$

De même, le bord $t = 0$ est non caractéristique pour le système de Maxwell, et donc la trace d'une solution est toujours bien définie et fournit un opérateur continu.

Revenons, après ces considérations sur les conditions de bord, au résultat prouvé :

Théorème.— *Si $f_0 \geq 0$ est une fonction de $L^1((1 + |v|^2)dxdv) \cap L^2(dxdv)$, si (E_0, B_0) est dans $(L^2(\Omega))^2$, si f_0, E_0, B_0 vérifient les conditions de comptabilité $\text{div}E^0 = \rho_0, \text{div}B_0 = 0$, alors pour tout $T > 0$, il existe une solution faible $f \in L^\infty(0, T; L^1((1 + |v|^2)dxdv) \cap L^2), (E, B) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))^2$ au système de Vlasov-Maxwell (VM) avec les conditions au bord (CL) et les données de Cauchy*

$$(f_0, E_0, B_0) = (f, E, B)_{|t=0}$$

Afin de prouver ce résultat, suivant la stratégie initiée par R. di Perna et P.L. Lions, [15], on fait intervenir un schéma d'approximation visqueuse ; pour cela choisissons une suite $f_0^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^3)$ et une suite $(E_0^\varepsilon, B_0^\varepsilon) \in C_0^\infty(\Omega)$ pour $\varepsilon > 0$, telles que :

$$\begin{cases} f_0^\varepsilon \to f \quad \text{dans} \quad L^1((1+|v|^2)dxdv) \cap L^2(dxdv) \\ (E_0^\varepsilon, B_0^\varepsilon) \to (E_0, B_0) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)^2 \\ \text{div} E_0^\varepsilon = \rho_0^\varepsilon \quad \text{div } B_0^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

Choisissons de plus une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ telle que $0 \leq \chi \leq 1, \chi \equiv 1$ au voisinage de zéro, et pour $R > 0$ fixé, posons $\chi_R(v) = \chi(\frac{v}{R})$.

Intéressons nous alors au problème approché :

$$(VM^\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + \nabla_x(vf^\varepsilon) + \nabla_v(\chi_R(v)(v \times B^\varepsilon + E^\varepsilon)f^\varepsilon) = 0 \\ \partial_t E^\varepsilon - \nabla \times B^\varepsilon - \varepsilon\Delta^3 E^\varepsilon = -j_R^\varepsilon \\ \partial_t B^\varepsilon + \nabla \times E^\varepsilon - \varepsilon\Delta^3 B^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$(CL^\varepsilon) \qquad \begin{cases} f_{|\Sigma^-} = K f_{|\Sigma^+} \\ \begin{pmatrix} E^\varepsilon \\ B^\varepsilon \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial n}\begin{pmatrix} E^\varepsilon \\ B^\varepsilon \end{pmatrix} = \dfrac{\partial^2}{\partial n^2}\begin{pmatrix} E^\varepsilon \\ B^\varepsilon \end{pmatrix} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

et les données de Cauchy $(f_0^\varepsilon, E_0^\varepsilon, B_0^\varepsilon)$.

On a noté dans (VM^ε) $j_R^\varepsilon = \int v\chi_R(v) f^\varepsilon(t,x,v)dv$

L'existence, globale en temps, d'une solution pour un tel système est détaillée au paragraphe III de [48].

Utilisons alors les inégalités d'énergie naturellement associées au problème (VM) pour extraire, à R fixé, une sous suite faiblement convergente $f^\varepsilon \rightharpoonup f_R$ $w^*L^\infty(0,T;L^2)$ $(E^\varepsilon, B^\varepsilon) \rightharpoonup (E_R, B_R)$ $w^*L^\infty(0,T;L^2)^2$ pour tout $T > 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$.

Réitérons le procédé lorsque $R \to \infty$: $f_R \rightharpoonup f \quad w^*L^\infty(0,T;L^2)$, $(E_R, B_R) \rightharpoonup (E, B) \quad w^*L^\infty(0,T;L^2)^2$: on obtient un excellent candidat pour la solution cherchée : (f, E, B).

Les difficultés pour prouver qu'on tient bien là une solution sont de deux natures assez différentes. D'une part, il serait bon de savoir que (E_R, B_R), puis (E, B) sont solutions du système de Maxwell, avec seconds membres respectifs

$j_R = \int v\chi_R(v) f_R(t,x,v)dv$ et $j = \int vf(t,x,v)dv$, et conditions aux limites

$$P(x,n(x)).E_R(t,x) + R(x,n(x)).P(x,n(x)).B_R(t,x)_{|\partial\Omega} = 0$$

$$P(x,n(x)).E(t,x) + R(x,n(x)).P(x,n(x)).B(t,x)_{|\partial\Omega} = 0 \ .$$

D'autre part il faut montrer que le terme non linéaire $\nabla_v(\chi_R(v)(v \times B^\varepsilon + E^\varepsilon)f^\varepsilon)$ converge au sens des distributions vers $\nabla_v(\chi_R(v)(v \times B_R + E_R)f_R)$, puis que $\nabla_v(\chi_R(v)$ $(v \times B_R + E_R)f_R)$ converge au sens des distributions vers $\nabla_v((v \times B + E)f)$ lorsque $R \to \infty$. On retrouve là un problème résolu par di Perna et Lions [15] et on reprend leur argumentation pour ce point [48]. La plus grande partie du travail consiste donc à traiter le système de Maxwell. Pour cela, on prouve en premier lieu que si j, E_0, B_0 sont fixés, la suite $(E^\varepsilon, B^\varepsilon)$ de solutions du système de Maxwell visqueux

$$(M^\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t E^\varepsilon - \nabla \times B^\varepsilon - \varepsilon \Delta^3 E^\varepsilon = -j \\ \partial_t B^\varepsilon + \nabla \times E^\varepsilon - \varepsilon \Delta^3 B^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

avec les conditions au bord de Dirichlet

$$(CV^\varepsilon) \qquad \begin{pmatrix} E^\varepsilon \\ B^\varepsilon \end{pmatrix}_{|\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n}\begin{pmatrix} E^\varepsilon \\ B^\varepsilon \end{pmatrix}_{|\partial\Omega} = \frac{\partial^2}{\partial n^2}\begin{pmatrix} E^\varepsilon \\ B^\varepsilon \end{pmatrix}_{|\partial\Omega} = 0$$

converge faiblement vers la solution (E, B) du système de Maxwell

$$(M) \qquad \begin{cases} \partial_t E - \nabla \times B = -j \\ \partial_t B + \nabla \times E = 0 \end{cases}$$

avec la condition au bord attendue :

$$(CP) \qquad P(x, n(x)).E(t,x) + R(x, n(x)).P(x, n(x)).B(t,x)_{|\partial\Omega} = 0 \; .$$

On utilise là une technique assez classique de perturbation singulière, et nous ne ferons que reprendre des arguments esquissés dans [29] pour des perturbations d'ordre 2.

Evidemment un tel résultat est largement insuffisant pour notre propos, et nous montrons en fait que $(E^\varepsilon, B^\varepsilon)$ converge fortement vers (E, B). Nous avons pour cela recours à une estimation tangentielle qui semble nouvelle dans ce cadre, même si l'étude de problèmes mixtes hyperboliques caractéristiques non linéaires a largement profité de ce genre d'estimations [2,6,21,36,40].

C'est cet argument de convergence forte qui permet de voir, dans notre situation, que $(E_R, B_R) = \ w^* - \lim_{\varepsilon\to 0}(E^\varepsilon, B^\varepsilon)$ satisfait le système de Maxwell avec le second membre $j_R = w^* - \lim j^\varepsilon = w^* - \lim_{\varepsilon \to 0} \int \chi_R(v) f^\varepsilon v dv$, et la condition de bord (CP).

On passe alors, dans le système de Maxwell, à la limite faible pour $R \to \infty$, et la remarque ci-dessus au sujet de la condition de bord (CP) et des traces d'une solution du système de Maxwell prouve que (E, B) vérifie le système et la condition de bord attendus.

La démarche étant ainsi explicitée, les résultats intermédiaires ne dépendent essentiellement que d'estimations d'énergie et de la structure algébrique de l'équation de Vlasov.

Supposons un moment que f soit suffisamment régulière, ce qui sera toujours le cas dans notre processus d'approximation, de sorte que E et B sont eux aussi réguliers.

Les courbes caractéristiques, données par les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = v \times B + E \end{cases}$$

permettent de "transporter" f, au sens que f est constante le long des caractéristiques, tant que celles-ci ne rencontrent pas le bord $\partial\Omega$ et de conserver le signe de f. Les hypothèses faites sur K permettent de borner les normes L^p de $f, 1 \leq p < \infty$:

Conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt}\int\int f(t,x,v)dxdv = \int\int -\nabla_x(vf) - \nabla_v((v \times B + E)f)dxdv$$

$$= -\int\int_{\Sigma+}(1-K)f(v.n)d\sigma(x)dv \leq 0$$

Conservation des normes $L^p, p \in \mathbf{N}$:

$$\frac{d}{dt}\int\int f^p(t,x,v)dxdv = \int\int -\nabla_x(vf^p) - \nabla_v((v \times B + E)f^p)dxdv$$

$$= -\int\int_{\Sigma+}(f - Kf)(f^{p-1} + f^{p-2}Kf + \cdots + (Kf)^{r-1})v.nd\sigma(x)dv \leq 0 \ .$$

La borne des autres $\int\int f^p(t,x,v)dxdv, p \in \mathbf{R}_+$ en résulte par interpolation.

Conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int\int f(t,x,v)v^2dxdv + \int_\Omega |E|^2 + |B|^2dx)$$

$$= -\int\int_{\Sigma_+}\frac{v^2}{2}(1-K)f(v.n)d\sigma(x)dv + \int\int E.vfdxdv - \int E.jdx$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega(n \times E)E - (n \times E)Bd\sigma(x)$$

$$= -\int\int_{\Sigma+}\frac{v^2}{2}(1-K)f(v.n)d\sigma(x)dv - \int_{\partial\Omega}|P(x,n(x))B(x)|^2d\sigma(x) \leq 0$$

Remarquons que dans le cas de la réflexion spéculaire, l'inégalité de masse est en fait une égalité et l'inégalité d'énergie ne fait intervenir que le terme de bord du système de Maxwell, qui est négatif.

Ce sont ces quelques remarques qui sont la clé des développements qui suivent, convenablement modifiés dans chaque cas particulier.

III Principales étapes techniques :

Le premier point dans notre approche consiste à construire une solution pour le problème visqueux non-linéaire :

Théorème III.1.— *Si $f_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \times \Omega)$, si $(E_0, B_0) \in C_0^\infty(\Omega)^2$, alors, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, et $R > 0$, il existe une solution faible $f \in L^\infty(\mathbf{R}_+; L^p(\Omega \times \mathbf{R}^3)) \forall p \geq 1$, $(E, B) \in L^\infty(0, T; C^0)$ pour le système de Vlasov-Maxwell visqueux avec les données de Cauchy précédentes (f_0, E_0, B_0).*

Pour prouver un tel résultat, plusieurs ingrédients sont utiles : commençons par écrire le schéma itératif

$$(VM_{n+1}^\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t f^{n+1} + \nabla_x(v f^{n+1}) + \nabla_v(\chi_R(v)(v \times B^n + E^n) f^{n+1}) = 0 \\ \partial_t E^{n+1} - \nabla \times B^{n+1} - \varepsilon \Delta^3 E^{n+1} = -j_R^{n+1} \\ \partial_t B^{n+1} + \nabla \times E^{n+1} - \varepsilon \Delta^3 B^{n+1} = 0 \ . \end{cases}$$

$$(CL^\varepsilon) \qquad \begin{cases} f^{n+1}_{|\Sigma^-} = K f^{n+1}_{|\Sigma^+} \\ \dfrac{\partial^\alpha E^{n+1}}{\partial n^\alpha}_{|\partial\Omega} = \dfrac{\partial^\alpha B^{n+1}}{\partial n^\alpha}_{|\partial\Omega} = 0 \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \end{cases}$$

où $j_R^{n+1} = \int \chi_R(v) f^{n+1}(t, x, v) v dv$

• A chaque pas d'itération le système linéaire précédent possède une solution globale en temps pour les données de Cauchy proposées.

En effet, la partie faisant intervenir les équations de Maxwell visqueuses est justiciable du théorème de Hille-Yosida. La partie faisant intervenir l'équation de Vlasov linéaire se résoud grâce à des arguments classiques de transport linéaire [47,9]. Le détail se trouve dans la section 3 de notre article [48]

• En utilisant alors le lemme de moyennisation de di Perna-Lions [15] on obtient une solution globale du problème en passant à la limite faible et en utilisant les estimations d'énergie naturellement associées au système (VM^ε).

La seconde étape consiste à passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ dans le système (VM^ε). La démonstration repose sur un argument linéaire concernant le système de Maxwell seul et qui se décompose en deux points.

Théorème III.2.— *Si $j \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ et $(E_0, B_0) \in (L^2(\Omega))^2$ alors la solution du système visqueux*

$$(M^\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t E^\varepsilon - \nabla \times B^\varepsilon - \varepsilon \Delta^3 E^\varepsilon = -j \\ \partial_t B^\varepsilon + \nabla \times E^\varepsilon - \varepsilon \Delta^3 B^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet

$$(CV^\varepsilon)\frac{\partial^\alpha}{\partial n^\alpha}\begin{pmatrix}E^\varepsilon\\ B^t\end{pmatrix}_{|\partial\Omega} = 0 \quad si \quad 0 \leq \alpha \leq 2$$

converge $w^* - L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *faiblement vers la solution du système de Maxwell*

$$(M) \qquad \begin{cases} \partial_t E - \nabla \times B = -j \\ \partial_t B + \nabla \times E = 0 \end{cases}$$

avec la condition au bord $P(x,n(x))E + R(x,n(x))P(x,n(x))B_{|\partial\Omega} = 0$.

Une telle convergence faible est une indication des conditions aux limites qu'il est raisonnable d'attendre dans notre cas, mais ne suffit évidemment pas à traiter le problème couplé. Nous utilisons pour cela un résultat de convergence forte :

Théorème III.3.— *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème III.1, la suite* $(E^\varepsilon, B^\varepsilon)$ *converge dans* $C^0(0,T;L^2(\Omega))$ *vers* (E,B).

Ce théorème est sensiblement plus difficile à obtenir et sa preuve repose sur deux points : un énoncé de régularité elliptique conormale et un examen détaillé des composantes caractéristiques et non caractéristiques de $\begin{pmatrix}E\\ B\end{pmatrix}$ au voisinage de $\partial\Omega$.

Rappelons la définition des espaces de Sobolev conormaux :

Définition III.4 : On dit que $U \in L^2(\Omega)$ est dans l'espace de Sobolev conormal d'ordre $s \in \mathbf{N}$ et on note $U \in H^{0,s}(\Omega)$ si :

- si $\delta_0 > 0$ fixé $U \in H^s(\{x/dist(x,\partial\Omega) > \delta_0\})$
- Si $\Gamma_1 \cdots \Gamma_k \quad k \leq s$ sont des champs de vecteurs tangents à $\partial\Omega$, alors $\Gamma_1 \cdots \Gamma_k U \in L^2(\Omega)$.

Via le théorème de Hille-Yosida, le résultat d'ellipticité conormale que nous avons en vue est le suivant :

Proposition III.5.— *Si* $\varepsilon \in]0,1]$, *si* $\gamma > 0$ *est assez grand, si* $U, J \in L^2(\Omega)$ *vérifient :*

$$U = \begin{pmatrix}E^\varepsilon\\ B^\varepsilon\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -\nabla \times B^\varepsilon - \Delta^3 E^\varepsilon + \gamma E^\varepsilon = -j \\ +\nabla \times E^\varepsilon - \Delta^3 B^\varepsilon + \gamma B^\varepsilon = 0 \\ \dfrac{\partial^\alpha}{\partial n^\alpha} E^\varepsilon_{|\partial\Omega} = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial n^\alpha} B^\varepsilon_{|\partial\Omega} = 0 \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \end{cases}$$

alors :

i) si $J \in H^{0,1}$ *alors* $\varepsilon|D^3U^\varepsilon|^2_{H^{0,1}} + \gamma|U^\varepsilon|^2_{H^{0,1}} \leq C|J|^2_{0,1}$

ii) si $J \in H^{0,2}$ *alors* $\varepsilon|D^3U^\varepsilon|^2_{H^{0,2}} + \gamma|U^\varepsilon|^2_{H^{0,2}} \leq C|J|^2_{0,2}$

où D^3U *désigne la totalité des dérivées d'ordre 3 de* U *dans toutes les directions et où* C *ne dépend pas de* ε*.*

Considérons maintenant la matrice de bord $\mathcal{B}(x) = A.n(x)$ où $n(x)$ désigne un prolongement du champ de vecteur normal à $\partial\Omega$ dans un voisinage de $\partial\Omega$. Considérons, puisque la multiplicité de la valeur propre 0 est constante au voisinage de $\partial\Omega$, le projecteur $P_0(n)$ sur le noyau de $\mathcal{B}(x)$.

Proposition III.6.— *Sous les mêmes hypothèses que dans Proposition III.5, si* $0 < \eta < 1/2$ *on a :*

i) Si $J \in H^{0,1}, |(1 - \mathcal{P}_0)U^\varepsilon|_{H^{\frac{1}{2}-\eta}} < C|J|_{0,1}$

ii) $J \in H^{0,2}, |(1 - \mathcal{P}_0)\hat{U}^\varepsilon|_{H^{\frac{1}{2}-\eta}(H^1)} < C|J|_{0,2}$

iii) Si $J \in H^{0,2}$, *si* $\mathcal{P}_0 J \in H^1$, $\quad |\mathcal{P}_0 U^\varepsilon|_{H^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \leq C(|\mathcal{P}_0 J|_{H^1} + |J|_{H^{0,2}})$

A l'aide du théorème III.3 et du lemme de moyennisation, il est alors aisé de passer à la limite faible suivant un shéma maintenant bien connu.

Il reste alors à faire tendre R vers l'infini, ce qui n'est pas plus difficile.

Le reste de la preuve fait intervenir des techniques usuelles en théorie cinétique. (cf [15],[48]).

IV Conclusions et commentaires

La méthode employée ici pose plusieurs questions :

1) Considérons un type différent de conditions aux limites pour le système de Maxwell : $U_I = SU_{II} + G$ où

$$U_I = \left\{ \begin{array}{l} E - (E.n)n - (n \times B) \\ B - (B.n)n + (n \times E) \end{array} \right\} = \pi_+ U$$

$$U_{II} = \left\{ \begin{array}{l} E - (E.n)n + (n \times B) \\ B - (B.n)n - (n \times E) \end{array} \right\} = \pi_- U$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rang } S = 2 \\ \pi_+ S \pi_- = 0 \\ (n, 0) S \pi_- = 0 \\ (0, n) S \pi_- = 0 \\ SpS \subset \{z / |z| < 1\} \end{array} \right.$$

On sait alors d'après Majda Osher [31] que ce type de conditions au bord satisfait la condition de Lopatinski uniforme.

Est-il possible de trouver un "schéma visqueux" pour une perturbation elliptique d'ordre au moins 6, et des conditions aux limites adaptées à cette perturbation, telles que ces dernières satisfont la condition de recouvrement, et telles qu'en passant à la limite de viscosité évanescente, le sytème limite soit justement le système de Maxwell avec les conditions aux limites ci-dessus

2) le travail récent de Degond-Raviart [11] et Raviart [37] introduit un procédé d'approximation des équations de Maxwell, appelé approximation de Darwin, qu'il semble moins coûteux de résoudre numériquement que le système de Maxwell.

En particulier, couplé à une équation de Vlasov on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + (v.\nabla_x) f + \nabla_v ((v \times B + E) f) = 0 \\ \partial_t E_L - \nabla \times B = -j \\ \partial_t B + \nabla \times E_T = 0 \\ \nabla . E_L = \rho \quad \nabla . B = 0 \quad \nabla . E_T = 0 \quad \nabla \times E_L = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{|\Sigma^-} = K f_{|\Sigma^+} \\ E \times n_{\partial\Omega} = 0 \quad B.n_{|\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

Nous pouvons prouver [49] que ce système admet lui aussi des solutions globales en temps. Le point clé est que ce système est mathématiquement proche du système de Vlasov-Maxwell avec bord conducteur parfait et bien que ces conditions ne sont pas maximales dissipatives, et donc hors de portée de nos méthodes, la structure très particulière des équations au bord autorise un traitement spécial. Dans le cas de Vlasov-Maxwell à bord conducteur parfait, on pourra aussi consulter l'article très récent de Yan Guo [50]

Références :

[1] Agmon, Douglas, Nirenberg, *Estimates near the boundary of solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I. CPAM 12 (1959), pp. 623-726, II. CPAM 17 (1964), pp 35-92.

[2] Alinhac, *Existence d'ondes de raréfaction pour de systèmes quasilinéaires hyperboliques multidimensionnels*, CPDE 14 (1989), pp 173-230.

[3] Asano, *On local solutions of the initial value problem for the Vlasov-Maxwell system*, CMP 106 (1986), pp 551-568.

[4] Bardos-Degond, *Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3-space variable with small initial data*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Inst. H. Poincaré, Anal. Nonlinéaire 2 (1985), pp. 101-118.

[5] Batt, *Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamic*, J. diff. eq. 25 (1977), pp. 342-364.

[6] Bezard, *Problème de Riemann généralisé pour un système de lois de conservation multidimensionnel vraiment non linéaire.* Proceedings "Journées EDP St. Jean de Monts" Ed. Ecole Polytechnique, France + manuscrit.

[7] Cessenat, *Théorèmes de trace L^p pour les espaces de fonction de la neutronique*, C.R. Ac. Sci., Paris 299 (1986), pp. 831-834, et C.R. Ac. Sci. Paris 300 (1985), pp. 89-92.

[8] Chazarain-Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires.* Gauthier Villars 1981.

[9] Dautray-Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, 3 vol. Masson, 1983.

[10] Degond, *Régularité des solutions des équations cinétiques en physique des plasmas.* Séminaire EDP 1985-1986, Ecole Polytechnique, France.

[11] Degond-Raviart, *An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equation*, Preprint CMAP, Ecole Polytechnique, n°213, Mars 1990.

[12] Di Perna-Lions, *On Fokker-Planck-Boltzmann equation*, CMP 120 (1988), pp. 1-23.

[13] Di Perna-Lions, *On the Cauchy problem for Boltzmann equation : global existence and weak stability*, Ann. Math. 130 (1989), pp. 321-366.

[14] Di Perna-Lions, *Solutions globales pour les équations de Vlasov-Poisson*, C.R. Acad. Sci. 307 (1988), pp. 655-658.

[15] Di Perna-Lions, *Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems*, CPAM 42 (1989), pp 729-757.

[16] Friederichs, *Well-posed problems of mathematical physics*, Mimeographed Lecture Notes, NYU.

[17] Friederichs, *Symmetric positive systems of differential equations*, CPAM 11 (1959), pp. 333-418.

[18] Gårding, *Le problème de la dérivée oblique pour l'équation des ondes*, C.R. Acad. Sci. Paris, 285 (1977), pp. 773-775, + Rectifications CRAS 285 (1977), p.1199.

[19] Glassey-Strauss, *Singularity formation in a collisionless plasma could occur only at high velocities*, Arch. Rat. Mech. Anal, 92 (1986), pp. 59-90.

[20] Greengard-Raviart, *A boundary value problem for the stationary Vlasov-Poisson equations : the plane diode*, CPAM 43 (1990), pp. 473-507.

[21] Guès, *Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique*, CPDE 15 (1990), pp. 595-646.

[22] Hamdache, *Problème aux limites pour l'équation de Boltzmann, existence globale de solutions*, CPDE 13 (1988), pp. 813-845.

[23] Haus-Melcher, *Electromagnetic fields and energy*, Englewood Cliffs, Prentice Hall.

[24] Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, 4 vol. Springer.

[25] Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley.

[26] Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer.

[27] Kreiss, *Initial boundary value problems for hyperbolic systems*, CPAM, 23 (1970), pp. 277-298.

[28] Lawson, *The physics of charged particle beams*, Oxford Clarendon Press.

[29] J-L Lions, *Perturbation singulières dans les problèmes aux limites, et contrôle optimal*, LNM 323, Springer.

[30] P-L Lions, *Kinetic equations*, Lecture ICM, Kyoto 90.

[31] Majda-Osher, *Initial boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary*, CPAM, 28 (1975), pp. 607-695.

[32] Nishida-Rauch, *Local existence for smooth inviscid compressible flows in bounded domains*, Manuscript (1985).

[33] Panofsky-Phillips, *Classical electricity and magnetism*, Addison Wesley.

[34] Poupaud, *Solutions stationnaires des équations de Vlasov-Poisson*, C.R. Ac. Sci. Paris 311 (1990), pp. 307-312.

[35] Poupaud, *Boundary value problems for the stationary Vlasov-Maxwell systems*, Preprint Nice 1991.

[36] Rauch, *Symmetric positive systems with boundary characteristics of constant multiplicity*, Trans. AMS, 291, (1985), pp. 167-187.

[37] Raviart, *Approximate models for Maxwell's system and applications*, Preprint, CMAP, Ecole Polytechnique, No 227.

[38] Rendal-Rein, *On Vlasov-Einstein*, Preprint.

[39] Sakamoto, *Mixed problems for hyperbolic equations*, I-II Math. J. Kyoto Univ. pp. 349-373 ; 403-417, vol 10 (1970).

[40] Schochet, *The compressible Euler equations in a bounded domain : existence of solution and incompressible limit*, CMP 106 (1986), pp. 69-75.

[41] Strauss, *Nonlinear wave equations*, CBMS, Regional conference in Math No 73, AMS 1990.

[42] Ukai, *Solutions of the Boltzmann system* in "Pattern and waves" Ed. Nishida-Mimura-Fuji, North Holland.

[43] Ukai-Asano, *On the Vlasov-Poisson limit of the Vlasov-Maxwell equations*, in "Pattern and waves" Ed. Nishida-Mimura-Fuji, North Holland.

[44] Ukai-Asano, *Steady solutions of the Boltzmann equation for a gas flow past an obstacle*, Archiv. Rat. Mech. Anal. 84 (1983), pp. 269-291.

[45] Wollmann, *An existence and uniqueness theorem for the Vlasov-Maxwell system*, CPAM 37 (1986), pp. 651-662.

[46] Yosida, *Functional analysis*, Springer.

[47] Beals-Protopopescu, *Abstract time-dependant transport equations*, J. Math. Anal. Appl. (1987), pp. 370-405.

[48] Bezard, *Problème aux limites pour le système de Vlasov-Maxwell* Preprint 1991, Soumis Archiv Rat. Mech. Anal.

[49] Bezard, *Existence globale pour le système de Vlasov-Darwin.* En préparation

[50] Guo, *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system.* Preprint Brown University 1991.

Ecole Polytechnique

Centre de Mathématiques

91128 Palaiseau cedex