

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. ALINHAC

## **Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1992-1993), exp. n° 3,  
p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1992-1993\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993___A3_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Téléc 601.596 F

Séminaire 1992-1993

---

## EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

### **TEMPS DE VIE ET COMPORTEMENT EXPLOSIF DES SOLUTIONS D'EQUATIONS D'ONDES QUASI-LINEAIRES EN DIMENSION DEUX**

**S. ALINHAC**

Exposé n° III

19 Janvier 1993



## Introduction

1. Notre but est de comprendre le moment, le lieu et l'allure de l'explosion de solutions régulières d'équations hyperboliques non linéaires.

En dimension d'espace  $n \geq 2$ , il ne semble possible actuellement que d'aborder l'étude de situations de perturbations de l'équation des ondes  $\square u = 0$ . Pour une telle perturbation quasi-linéaire  $\Sigma g_{ij}(\nabla u) \partial_{ij}^2 u = 0$ , on considérera la solution régulière  $u$  d'un problème de Cauchy à données  $C_0^\infty$  de taille  $\varepsilon$ , et l'on notera  $T_\varepsilon$  son temps de vie.

Cette situation a été étudiée par de nombreux auteurs, principalement Klainerman [13], [14], John [8], [9], [10], [11], [12] et Hörmander [6], [7] (voir également les bibliographies de ces ouvrages pour plus de détails).

Nous nous limitons ici à  $n = 2$ , pour des raisons de simplicité, mais aussi parce que, dans la situation d'existence "presque globale" du cas  $n = 3$ , on a pensé que les mécanismes de l'explosion n'apparaissent pas aussi clairement qu'en dimension  $n = 2$ .

L'étude du cas  $n = 3$  fera l'objet d'un travail ultérieur (voir cependant [9]).

En fait, à notre connaissance, les seuls cas où l'on sait prouver l'explosion effective (i.e.,  $T_\varepsilon < +\infty$ ) en comprenant le mécanisme sont ceux de la dimension  $n = 1$  ou d'équations de structure "invariante par rotation" pour des données de Cauchy également invariantes par rotation (voir [6], [8], [10]). Dans certains cas spéciaux d'équations "invariantes par rotation", on sait prouver l'explosion pour des données quelconques, sans en comprendre, semble-t-il, le mécanisme (voir [8]).

Les résultats que nous présentons ici sont de nature purement asymptotique, bien que la méthode "d'optique géométrique à l'explosion" utilisée (cf. §2.3) semble promettre, dans certains cas, une élucidation du mécanisme de l'explosion.

Le résultat principal (Théorème 1.2) est l'existence d'un "temps de vie asymptotique"  $T_\varepsilon^a$  tel que, pour des données génériques, on ait à la fois

i) Pour tout  $N \geq 1$ ,  $T_\varepsilon \geq T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$  pour  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$ ,

et

ii) Il existe  $C > 0$  avec  $\frac{1}{c} \frac{1}{T_\varepsilon^a - t} \leq \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{T_\varepsilon^a - t}$  pour  $t \leq T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$ .

Tout se passe donc "comme si" on avait (sous les hypothèses du théorème 1.2)

i)  $T_\varepsilon < +\infty$ ,  $T_\varepsilon - T_\varepsilon^a = 0(\varepsilon^\infty)$  et

ii)  $\frac{1}{c} \frac{1}{T_\varepsilon - t} \leq \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{T_\varepsilon - t}$  pour  $t < T_\varepsilon$ .

Soulignons que nous n'avons aucune preuve de cette dernière assertion ; c'est une simple croyance personnelle.

Il serait évidemment très intéressant de comparer ces résultats à ceux d'études numériques.

2. La méthode de la preuve est classique dans son principe (cf. [6],[7]), qui tient en deux points :

- i) Construire une solution approchée  $u_a$ ,
- ii) Estimer  $\dot{u} = u - u_a$  à l'aide d'inégalités d'énergie.

Le premier point requiert un soin particulier, car on vise ici une approximation d'ordre arbitraire en  $\varepsilon$ , au moins au bord du cône de lumière. Les grandes lignes de la construction sont indiquées au §2 (cf. [1] et [2] pour les détails).

Quant au deuxième, il est standard loin de l'explosion (cf. [14], [6], [7]), mais délicat ensuite, car bien entendu, si l'on avait  $T_\varepsilon < +\infty$ , on aurait  $\int^{T_\varepsilon} \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} dt = +\infty$  (cf. par exemple [16]). Il convient d'introduire des poids (singuliers) dans les inégalités standard pour obtenir un bon contrôle des différentes normes de  $\dot{u}$  par des puissances de  $\frac{1}{T_\varepsilon - t}$ . Cette technique est expliquée au §3 (voir [3] pour les détails).

## 1. Temps de vie asymptotique.

### 1.1. Notations et hypothèses.

a. Dans  $\mathbf{R}^3$ , on note  $(x_0, x_1, x_2)$  les variables, en utilisant souvent la notation commode  $x_0 = t$ ,  $x = (x_1, x_2)$  ; les coordonnées polaires en  $(x_1, x_2)$  seront notées  $(r, \omega)$ , avec  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ ,  $x_1 = r \cos \omega$ ,  $x_2 = r \sin \omega$ ,  $\omega_1 = \cos \omega$ ,  $\omega_2 = \sin \omega$ ,  $\partial_\omega = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1$ .

On considère l'équation des ondes quasi linéaire à coefficients réels et constants

$$(1.1.1) \quad \square u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0 ,$$

où la sommation est étendue aux indices  $0 \leq i, j, k \leq 2$ ,  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ ,  $g_{ij}^k = g_{ji}^k$ , et  $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$ .

Avec  $\omega_0 = -1$ , on définit (comme dans [6])

$$(1.1.2) \quad g(\omega) = g_{ij}^k \omega_i \omega_j \omega_k .$$

On suppose données des fonctions  $u^0(x, \varepsilon) = \varepsilon u_1^0(x) + \varepsilon^2 u_2^0(x) + \dots$ ,  $u^1(x, \varepsilon) = \varepsilon u_1^1(x) + \varepsilon^2 u_2^1(x) + \dots$  réelles de classe  $C^\infty$ , supportées dans  $|x| \leq M$ , et on considère pour  $\varepsilon > 0$  le problème de Cauchy

$$(1.1.3) \quad \begin{cases} \square u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0 \\ u(x, 0) = u^0(x, \varepsilon), \quad \partial_t u(x, 0) = u^1(x, \varepsilon). \end{cases}$$

On note  $T_\varepsilon$  le temps de vie de la solution  $C^\infty$  de ce problème.

b. Rappelons (cf. [5],[6]) que le premier terme  $u_1$  d'approximation de  $u = \varepsilon u_1 + \dots$  est la solution de

$$\square u_1 = 0, \quad u_1(x, 0) = u_1^0(x), \quad \partial_t u_1(x) = u_1^1(x),$$

avec

$$(1.1.4) \quad u_1 \sim \frac{R(r-t, \omega)}{r^{1/2}}, \quad \text{pour}$$

$$R(\sigma, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{s \geq \sigma} \frac{1}{\sqrt{s-\sigma}} \{ \tilde{R}(s, \omega, u_1^1) - \partial_s \tilde{R}(s, \omega, u_1^0) \} ds,$$

$\tilde{R}(s, \omega, v)$  désignant la transformée de Radon  $\tilde{R}(s, \omega, v) = \int_{x \omega = s} v(x) dx$  de  $v$ .

Nous faisons ici l'hypothèse de "non dégénérescence" suivante :

(ND) Il existe un point  $(\sigma_0, \omega_0)$  tel que

$$i) \quad -g(\omega_0) \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0) < 0,$$

$$ii) \quad \forall A, \exists C > 0 \quad \text{avec, pour } |\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0| \leq A,$$

$$-g(\omega) \partial_\sigma^2 R(\sigma, \omega) \geq -g(\omega_0) \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0) + C(|\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0|)^2.$$

$$(1.1.5) \quad \text{On pose alors } A_0 = \frac{1}{g(\omega_0) \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0)}.$$

## 1.2. Le résultat principal.

Notre résultat principal est le suivant.

**Théorème 1.2.**— *Considérons le problème de Cauchy (1.1.3) et faisons l'hypothèse (ND).*

*Alors il existe une fonction  $T_\varepsilon^a$  telle que*

*i) Pour tout  $N \geq 1$ ,  $T_\varepsilon \geq T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$  pour  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$ ,*

*ii) Il existe  $C > 0$  telle que, pour  $\frac{cte}{\varepsilon^2} \leq t \leq T_\varepsilon^a - \varepsilon^N$  et  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$ , on ait*

$$\frac{1}{C} \frac{1}{T_\varepsilon^a - t} \leq \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{T_\varepsilon^a - t}.$$

De plus,  $T_\varepsilon^a$  est de la forme  $T_\varepsilon^a = \frac{\tau_*(\varepsilon, \varepsilon^2 \log \varepsilon)}{\varepsilon^2}$ , où  $\tau_*$  est une fonction  $C^\infty$  de ses arguments avec  $\tau_*(0, 0) = A_0$ .

Nous appelons  $T_\varepsilon^a$  le “temps de vie asymptotique” de  $u$ .

Mentionnons qu'on a donné dans [3], II un résultat beaucoup plus précis, où la taille du reste  $\dot{u} = u - u_a$  (cf. introduction) est estimée. Ce résultat permet en particulier de localiser l’“explosion asymptotique” de  $|\nabla^2 u|$ .

Notons qu'il est, en principe, possible de calculer  $T_\varepsilon^a$  à une approximation arbitraire.

Dans [3], I, on a calculé les deux premiers termes de  $\tau_*$ ,

$$(1.2.1) \quad \tau_* = A_0 + A_1 \varepsilon + O(\varepsilon^2 \log \varepsilon).$$

Rappelons brièvement le calcul de  $A_1$  :

On considère la solution du problème

$$\square u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_1 = 0, \quad u_2(x, 0) = u_2^0(x), \quad \partial_t u_2(x, 0) = u_2^1(x),$$

pour laquelle on montre

$$u_2 - \frac{g(\omega)}{2} (\partial_\sigma R)^2 \sim \frac{L(r-t, \omega)}{r^{1/2}},$$

pour une certaine fonction  $L$  de classe  $C^\infty$ . La valeur de  $A_1$  est

$$(1.2.2) \quad A_1 = -A_0^2 g(\omega_0) \partial_\sigma^2 L(\sigma_0, \omega_0).$$

Remarquons enfin que le choix de la forme exacte de (1.1.1) est sans grande importance : notre méthode s'applique aussi bien à des équations plus générale du type  $g_{ij}(\nabla u) \partial_{ij}^2 u = 0$ .

Dans les paragraphes qui suivent, nous indiquons très sommairement les idées de la preuve, en renvoyant le lecteur à [2] et [3] pour les détails.

## 2. La solution approchée.

La construction se fait dans l'esprit des techniques de "matching et stretching" classiques pour les équations différentielles ordinaires (voir par exemple [17]).

a. L'équation des ondes n'ayant pas de lacune en dimension 2, l'étude du comportement de la solution à l'intérieur du cône de lumière (c'est-à-dire pour  $r - t \leq -cte$ ) est assez délicate. Néanmoins, comme l'essentiel a lieu au bord du cône de lumière, nous ne discuterons ici que cette dernière zone.

b. Remarquons que si l'on dispose, pour  $r - t \geq -cte$  seulement, d'une bonne solution approchée  $u_a$ , on peut utiliser des inégalités d'énergie dans un domaine  $\{r - t \geq -cte, T_1 \leq t \leq T_2\}$  (qui est un domaine d'influence de  $\square$ ) pour estimer  $\dot{u}$  dans cette zone.

c. On distingue dans la construction trois périodes : le "démarrage", où  $u_a$  se laisse décrire par une série en  $\varepsilon$ , les effets des interactions non linéaires ne se faisant encore guère sentir.

Une "période de transition" (jusqu'à  $t \leq \frac{cte}{\varepsilon^2}$ ) au cours de laquelle s'établit un équilibre entre les effets de propagation et les effets d'interactions, qui peut-être asymptotiquement décrit par des équations du premier ordre. Une troisième période au cours de laquelle les mécanismes de "focalisation" deviennent dominants et préparent la solution à l'explosion.

### 2.1. Le démarrage (période I).

- On définit les fonctions  $u_i(x, t) (i \geq 1)$  par

$$\square u_i + Q_i = 0, \quad u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad \partial_t u_i(x, 0) = u_i^1(x),$$

avec

$$Q_1 = 0, \quad Q_p = \sum_{\ell + \ell' = p} g_{ij}^k \partial_k u_\ell \partial_{ij}^z u_{\ell'} \quad \text{pour } p \geq 2.$$

On choisira tout simplement  $u_a = u_a^I = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i u_i$ ,  $k$  grand selon les besoins.

- Pour la suite, il importe d'avoir une idée du comportement des  $u_i$ .

On a (prop. 3.1 de [2])

$$u_1(x, t) = \frac{1}{r^{1/2}} L_1\left(r - t, \omega, \frac{1}{r}\right),$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{r^{1/2}} \left\{ \sqrt{t} R_2^1\left(r - t, \omega, \frac{1}{r}\right) + L_2\left(r - t, \omega, \frac{1}{r}\right) + \dots \right\},$$



$$u_3(x, t) = \frac{1}{r^{1/2}} \left\{ tR_3^2\left(r - t, \omega, \frac{1}{r}\right) + \sqrt{t}R_3^1\left(r - t, \omega, \frac{1}{r}\right) \right. \\ \left. + (\log t)L_3^1\left(r - t, \omega, \frac{1}{r}\right) + L_3\left(r - t, \omega, \frac{1}{r}\right) + \dots \right\}$$

etc ..., avec  $\square \frac{L_i}{r^{1/2}} \sim 0$ . Cette dernière propriété suggère d'appeler les  $L_i$  les "profils libres" de  $u$ .

On observe que  $R_2^1$  ne dépend que de  $L_1$ , tandis que  $L_2$  dépend à la fois des traces de  $u_2$  et d'un certain "résidu", très décroissant avec le temps, des interactions non linéaires de  $L_1$  avec lui-même (en dimension d'espace un, ce "résidu" serait à support compact un temps). De même,  $R_3^2, R_3^1$  et  $L_3^1$  dépendent des termes précédemment calculés tandis que  $L_3$  dépend des traces de  $u_3$  et d'un "résidu" d'interactions, etc...

L'existence et les propriétés de ces "profils libres" de  $u$  est étudiée dans [1]. Nous verrons que "le temps de vie asymptotique"  $T_\varepsilon^a$  de  $u$  est calculable à partir d'eux seuls (comme pour (1.2.2)).

## 2.2. La phase de transition (période II).

On observe que la série

$$\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots = \\ \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} \left\{ (L_1 + \varepsilon\sqrt{t}R_2^1 + \varepsilon^2 tR_3^2 + \dots) + \varepsilon(L_2 + \varepsilon\sqrt{t}R_3^1 + \dots) + \varepsilon^2 \log t L_3^1 + \varepsilon^2(L_3 + \dots) \right\}$$

qui définit  $u_a^I$  perd son caractère asymptotique (et donc son utilité) lorsque  $\varepsilon\sqrt{t}$  n'est plus petit. Comme par ailleurs elle apparaît formellement comme une fonction des variables supplémentaires  $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$  et  $\zeta = \varepsilon^2 \log t$ , on va maintenant chercher  $u_a$  sous la forme

$$(2.2.1) \quad u_a = u_a^{II} = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F(\sigma, \omega, z, \tau, \zeta), \sigma = r - t, z = \frac{1}{r}.$$

La variable  $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$  ("stretching") s'appelle traditionnellement le "temps lent" du problème (cf. [4], [16]) ; la variable  $\zeta = \varepsilon^2 \log t$  est un deuxième "temps lent" qui s'introduit ici du fait de la précision recherchée.

On fixe dorénavant  $0 < A < A_0$  (défini en (1.1.5)), et on limite la période II à  $\tau \leq A$ .

On peut alors montrer (prop. 4.1 de [2]) qu'il existe une solution de la forme (2.2.1) de  $\square u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u \sim 0$ , pour laquelle les fonctions  $\partial_\tau^{2\ell} \partial_z^\ell F(\sigma, \omega, 0, 0, 0)$  ( $\ell \geq 0$ ) sont prescrites ; cette solution est alors unique.

D'autre part on peut constater, pour la fonction  $F$  correspondant au choix de  $u_a^I$  en période I, que

$$F(\sigma, \omega, 0, 0, 0) = (L_1 + \varepsilon L_2 + \varepsilon^2 L_3 + \dots)(\sigma, \omega, 0), \partial_\tau^{2\ell} \partial_z^\ell F(\sigma, \omega, 0, 0, 0) = 0 (\ell \geq 1).$$

Le choix de ces “données initiales” pour  $u_a$  en période II garantira donc, grâce à l’unicité, le recollement correct (“matching”) des approximations. Pour des raisons techniques dues au comportement à l’intérieur, on choisit en fait d’effectuer ce recollement dans une zone  $t \sim \varepsilon^{-14/9}$ .

Autrement dit, on calcule  $u_a^{II} = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F$  en résolvant une équation non linéaire avec le “profil libre”  $\frac{\varepsilon}{r^{1/2}}(L_1 + \varepsilon L_2 + \dots)$  comme donnée initiale. Qu’a-t-on gagné à cette démarche, par comparaison avec (1.1.3) ? D’abord, les variables ne sont pas les mêmes, mais l’essentiel est que l’équation à résoudre est, asymptotiquement, du premier ordre (comme il convient dans une méthode d’“optique géométrique”). Indiquons notamment que le terme principal  $v(\sigma, \omega, \tau, \zeta) = F(\sigma, \omega, \tau, \zeta)$  de  $F$  est obtenu en résolvant l’équation  $\partial_\tau v - g/2(\partial_\sigma v)^2 = 0$ , pour une donnée initiale  $v_0(\sigma, \omega, \zeta) = L_1 + \varepsilon L_2 + \dots + 0(\zeta)$ .

Cela explique, compte tenu des propriétés de l’équation de Burger, le rôle fondamental joué par  $A_0$ , car le temps de vie de  $v$  vaut  $A_0 + 0(\varepsilon) + 0(\zeta)$ .

### 2.3. Optique géométrique à l’explosion.

**2.3.1** La phase de transition se termine à  $\tau = A$ . On constate qu’au voisinage de cet instant, les variables  $z = \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon^2}{r^2}(1 + \frac{\sigma\varepsilon^2}{r^2})^{-1}$  et  $\zeta = 2\varepsilon^2 \log \frac{r}{\varepsilon}$  sont devenues superflues ; on veut donc réécrire la fonction  $F(\sigma, \omega, z, \tau, \zeta)$  précédemment calculée sous la forme  $F(\sigma, \omega, \tau)$  (par abus).

Avec  $u = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F(r - t, \omega, \tau)$ , le calcul donne

$$(2.3.1) \quad \square u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{rt}} \left\{ -\partial_\tau \partial_\sigma F + g \partial_\sigma F \partial_\sigma^2 F + \varepsilon^2 \left[ -\frac{1}{\tau^3} \left( \frac{1}{4} + \partial_\omega^2 \right) F + \dots \right] \right\},$$

où les points désignent divers termes faisant intervenir les dérivées premières et secondes de  $F$  en  $\partial_\sigma, \partial_\omega, \partial_\tau$ .

D’autre part, la valeur de  $u_a^{II}$  pour  $\tau = A$ ,

$$u_a^{II}|_{\tau=A} = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F\left(\sigma, \omega, \frac{\varepsilon^2}{A^2} \left(1 + \frac{\sigma\varepsilon^2}{A^2}\right)^{-1}, A, 2\varepsilon^2 \log \frac{A}{\varepsilon}\right) \equiv \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F_A(\sigma, \omega),$$

fournit naturellement la trace sur  $\tau = A$  du nouveau  $F$ , solution de (2.3.1).

Si l’on trouve une solution régulière  $F$  de

$$(2.3.2) \quad \partial_\tau \partial_\sigma F + g \partial_\sigma F \partial_\sigma^2 F + \varepsilon^2 [\dots] = 0 \quad \text{satisfaisant}$$

$$(2.3.3) \quad F(\sigma, \omega, A) = F_A(\sigma, \omega),$$

que dire de la deuxième trace de  $F$  sur  $\tau = A$  ? on voit facilement qu’elle est en fait déterminée, à  $0(\varepsilon^\infty)$  près, par la première.

Ceci garantit que pour l'approximation  $u_a^{III} = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} F(r-t, \omega, \tau)$  obtenue à l'aide d'un tel  $F$ , on a aussi  $\partial_\tau(u_a^{III} - u)|_{\tau=A}$  petit si  $u_a^{II}$  est une approximation suffisamment bonne de  $u$ .

**2.3.2** Expliquons maintenant comment on peut trouver une solution de (2.3.2)/(2.3.3) (on translate ici  $\tau$  pour se ramener à une donnée initiale sur  $\tau = 0$ ).

Rappelons d'abord que les fonctions considérées sont toutes supportées pour  $\sigma \leq M$ .

• Soient alors  $h(x, \omega, \tau)$  et  $V(x, \omega, \tau)$  des fonctions à déterminer, supportées pour  $x \leq M$ , vérifiant  $h(x, \omega, 0) = 0, V(x, \omega, 0) = \partial_x F_A(x, \omega)$ .

Si  $\tau_*$  est assez petit pour que  $D = 1 + \partial_x h > 0$  lorsque  $\tau < \tau_*$  on définit pour  $0 \leq \tau < \tau_*$ ,  $X(\sigma, \omega, \tau)$  par

$$(2.3.4) \quad X(\sigma, \omega, \tau) + h(X(\sigma, \omega, \tau), \omega, \tau) = \sigma,$$

et l'on cherche la solution de (2.3.2) sous la forme

$$(2.3.5) \quad F(\sigma, \omega, \tau) = \int_M^\sigma V(X(s, \omega, \tau), \omega, \tau) ds.$$

• Calculons par exemple  $\partial_\omega^2 F$  : en posant  $x = X(s, \omega, \tau)$ , il vient  $F(\sigma, \omega, \tau) = \int_M^{X(\sigma, \omega, \tau)} (DV)(x, \omega, \tau) dx$ . D'où

$$\partial_\omega F(\sigma, \omega, \tau) = \int_M^{X(\sigma, \omega, \tau)} (D\partial_\omega V - \partial_\omega h \partial_\omega V)(x, \omega, \tau) dx,$$

puis  $\partial_\omega^2 F(\sigma, \omega, \tau) = \frac{\partial_x V}{D} (\partial_\omega h)^2 (X(\sigma, \omega, \tau), \omega, \tau) + \int_M^{X(\sigma, \omega, \tau)} (D\partial_\omega^2 V - \partial_\omega^2 h \partial_x V - 2\partial_\omega h \partial_\omega \partial_x V)(x, \omega, \tau) dx$ .

• Les différents termes de (2.3.2) se calculent de façon analogue, et l'on obtient

$$-\partial_\tau \partial_\sigma F + g \partial_\sigma F \partial_\sigma^2 F + \varepsilon^2 [\dots] = \frac{\partial_x V}{D} \{ \partial_\tau h + gV + \varepsilon^2 \mathcal{L}_1(h, V) \}$$

$+ (-\partial_\tau V + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2(h, V))$ , où  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont certaines expressions, non linéaires et intégrales de dérivées de  $h$  et  $V$ .

Ici le membre de gauche est évalué en  $(\sigma, \omega, \tau)$  tandis que le membre de droite l'est en  $(X(\sigma, \omega, \tau), \omega, \tau)$ .

Il suffit donc de choisir  $h$  et  $V$  solutions de

$$(2.3.6) \quad \begin{cases} \partial_\tau h + gV + \varepsilon^2 \mathcal{L}_1(h, V) = 0, \\ -\partial_\tau V + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2(h, V) = 0, \\ h(x, \omega, 0) = 0, \quad V(x, \omega, 0) = \partial_x F_A(x, \omega), \end{cases}$$

pour résoudre (2.3.2)/(2.3.3) pour  $0 \leq \tau < \tau_*$ .

Nous croyons qu'il est possible, dans certaines situations de résoudre (2.3.6) de façon exacte. Ici, nous nous contentons de choisir  $h = h^{(\ell)} = h_0 + \varepsilon^2 h_1 + \dots + \varepsilon^{2\ell} h_\ell$ ,  $V = V^{(\ell)} = V_0 + \varepsilon^2 V_1 + \dots + \varepsilon^{2\ell} V_\ell$ , où  $V_0 = \partial_x F_A$ ,  $h_0 = -\tau g \partial_x F_A$  correspondent à la solution de l'équation de Burger, tandis que les  $h_j, V_j$  sont déterminés successivement par (2.3.6) ( $\ell$  est grand selon les besoins).

On obtient ainsi une solution  $u_a = u_a^{(\ell)}$ , définie pour  $0 \leq \tau < \tau_*^{(\ell)}(\varepsilon, \varepsilon^2 \log \varepsilon)$  (car  $F_A, h^{(\ell)}, V^{(\ell)}, X^{(\ell)}, F^{(\ell)}$  dépendent de  $\varepsilon$  de cette façon), avec  $\tau_*^{(\ell)}(0, 0) = A_0$ .

C'est uniquement ici qu'intervient l'hypothèse (ND) faite sur  $g$  et le premier profil libre  $R$  ; cette hypothèse permet l'étude de  $D^{(\ell)}$  à l'aide du théorème des fonctions implicites.

### 3. Inégalités d'énergie et estimations des restes.

Une fois  $u_a$  construite, on pose  $u = u_a + \dot{u}$  et il vient

$$(3.1) \quad L\dot{u} \equiv \square\dot{u} + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 \dot{u} + g_{ij}^k \partial_{ij}^2 u_a \partial_k \dot{u} = -J_a,$$

où

$$J_a = \square u_a + g_{ij}^k \partial_k u_a \partial_{ij}^2 u_a.$$

L'opérateur  $L$  est essentiellement le linéarisé de l'équation sur  $u_a$ .

Il s'agit maintenant de contrôler  $\dot{u}$  à l'aide d'inégalités sur  $L$ , dans un domaine d'influence de  $L$ , très voisin de  $\{t_0 = \frac{A^2}{\varepsilon^2} \leq t \leq T, r-t \geq -\text{cte}\}$  (en effet, l'estimation de  $\dot{u}$  pour les deux premières périodes ne pose pas de problème, cf. par exemple [6]).

**3.1.** Dans le calcul habituel d'intégrations par parties de  $L\dot{u}\dot{u}_t$  qui mène à l'inégalité d'énergie standard (cf. par exemple prop. 6.3.2 de [7]), on voit apparaître des termes du type  $\nabla^2 u \nabla \dot{u} \nabla \dot{u}$ , auxquels s'ajoutent les termes du type  $\nabla^2 u_a \nabla \dot{u} \nabla \dot{u}$  provenant des termes d'ordre inférieur de  $L$ . Comme  $\|\nabla^2 u\|_{L^\infty} \sim \|\nabla^2 u_a\|_{L^\infty} \sim \frac{C_1 \varepsilon}{\sqrt{t}(\tau_* - \tau)}$  (nous omettons partout l'indice  $(\ell)$  de  $u_a = u_a^{(\ell)}$  pour alléger), le facteur correspondant d'amplification  $e^{C_0 \int_{t_0}^T \|\nabla^2 u\|_{L^\infty} dt}$  de l'énergie vaudra à peu près  $\frac{1}{(\tau_* - \varepsilon \sqrt{T})^{2C_0 C_1}}$ .

Pour obtenir des estimations précises du reste et de ses dérivées, nous allons mettre en évidence à l'aide d'inégalités à poids le caractère "quasi radial" du comportement de  $\dot{u}$  (et donc de  $u$ ), c'est-à-dire le fait que  $\partial_{x_i} \dot{u} \sim -\omega_i \partial_t \dot{u}$ .

**3.2.** Le principe de l'inégalité d'énergie à poids illustré sur un modèle.

Supposons pour simplifier  $Lv = \square v + a_0 \partial_t v + \sum a_i \partial_i v$ .

En introduisant le poids  $a = e^{B\varphi(r-t)}$  ( $\varphi$  croissante,  $B > 1$ ), on trouve  $a \square v v_t = aB \frac{\varphi'}{2} \sum_{i \geq 1} (\omega_i v_t + \partial_i v)^2 + \partial_t E + \sum_i \partial_i(\cdot)$ , avec  $E = \frac{a}{2} (v_t^2 + |\nabla_x v|^2)$ . Cela permet d'écrire

$$aLv v_t = aB \frac{\varphi'}{2} \sum (\omega_i v_t + \partial_i v)^2 + \partial_t E + \sum \partial_i(\cdot) + a(a_0 - \sum a_i \omega_i) (v_t)^2 + a \sum a_i (\partial_i v + \omega_i v_t) v_t$$

d'où, pour tout  $\eta > 0$ ,

$$E(T) \leq E(t_0) + \int_{t_0}^T aLv v_t dt + 2(\eta + \sum a_i \omega_i - a_0) \int_{t_0}^T E(t) dt$$

pour  $B$  choisi assez grand (dépendant de  $\eta$ ).

### 3.3. Le cas de l'opérateur $L$

L'opérateur  $L$  défini par (3.1) n'a pas pour partie principale  $\square$  ; on doit donc modifier l'exemple du §3.2 en prenant  $\varphi'$  de l'ordre de  $\nabla^2 u$ .

Voici les choix opérés :

$a = e^{B \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} (\psi g V_0)(X, \omega)}$  où  $V_0 = \partial_x F_A$  (voir §2.3.2),  $\psi(x, \omega)$  ( $0 \leq \psi \leq 1$ ) étant une troncature telle que  $g \partial_x V_0 \geq \text{cte} > 0$  sur  $\text{supp } \psi$  et  $D \geq \text{cte} > 0$  sur  $\text{supp } (1 - \psi)$  pour  $\tau < \tau_*$ .

En posant

$$d = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} \frac{\partial_x V_0}{D}(X, \omega, \tau) \text{ et } E = \frac{1}{2} \int a [(\partial_t v)^2 + |\nabla_x v|^2 - g_{ij}^k \partial_k u \partial_i v \partial_j v] dx,$$

on a alors l'inégalité d'énergie suivante (voir [3]) :

**(3.3.1)** Pour tout  $B \geq 1$ , il existe une fonction  $\alpha_B \geq 0$ , vérifiant  $\int_{t_0}^T \alpha_B(t) dt \leq C(1 + B)$ , et pour tout  $\eta > 0$ , une constante  $C_\eta$  telles que, pour tout  $\lambda \leq 10$ , on ait

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t_0}^T a \psi dg \left\{ (B - C_\eta) \sum_{i \geq 1} (\partial_i v + \omega_i \partial_t v)^2 + 2(\lambda - \frac{1}{2} - \eta) (\partial_t v)^2 \right\} dx dt \\ & + E(T) \leq E(t_0) + \int_{t_0}^T aLv \partial_t v dx dt + \int_{t_0}^T \left\{ \alpha_B(t) + \frac{\varepsilon \lambda}{\sqrt{t}(\tau_* - \varepsilon \sqrt{t})} \right\} E(t) dt. \end{aligned}$$

Si, pour  $\lambda > \frac{1}{2}$ , on néglige le premier terme du membre de gauche, on obtient pour  $E(T)$  par application du lemme de Gronwall, une amplification de  $E(t_0)$  par un facteur  $\frac{1}{(\tau_* - \varepsilon\sqrt{t})^{2\lambda}}$ .

Ce résultat, quelque peu surprenant au vu des considérations du §3.1, s'obtient en utilisant le procédé expliqué au §3.2 et le fait très simple suivant : pour une solution  $v(x, \tau)$  de l'équation de Burger de temps de vie  $\tau_*$ , on a  $\|\partial_x v\|_{L^\infty} \leq \text{cte} + \frac{1}{\tau_* - \tau}$ .

**3.4.** Une fois que l'on dispose de l'outil (3.3.1), il est aisé de l'utiliser pour estimer  $v = \dot{u}$  et ses dérivées par rapport à  $x, t$  et  $\omega$ .

La preuve suit alors le chemin habituel d'un raisonnement par induction sur le temps (cf. [6], [7]).

Finalement, on définit le temps  $\tau_*$  du théorème 1.2 par la propriété  $\tau_* \sim \tau_*^{(0)} + \sum_{\ell \geq 1} (\tau_*^{(\ell+1)} - \tau_*^{(\ell)})$ , ce qui est loisible car  $\tau_*^{(\ell+1)} - \tau_*^{(\ell)} = O(\varepsilon^{2\ell+2})$ .

## Bibliographie :

- [1] Alinhac S. *Une solution approchée en grands temps des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux*, Comm. in PDE, **17** (3 et 4), (1992), 447-490.
- [2] Alinhac S. *Approximation près du temps d'explosion des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux* Preprint, Paris-Sud/Orsay (1992).
- [3] Alinhac S. *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux I et II*, Preprint, Paris-Sud/Orsay (1992 et 1993).
- [4] Di Perna R. et Majda A. *The validity of geometrical optics for weak solutions of conservation laws* Comm. Math. Phys. **98** (1985), 313-347.
- [5] Friedlander G. *On the radiation field of pulse solutions of the wave equation I, II*, Proc. Roy. Soc. A, **269** (1962), 53-65 et **279** (1964), 386-394.
- [6] Hörmander L. *The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations*, Mittag Leffler report n° 5 (1985).
- [7] Hörmander L. *Non linear hyperbolic differential equations*, Lectures, (1986-87).
- [8] John F. *Non linear wave equations, formation of singularities* Pitcher lectures in the Math. Sciences AMS (1990).

- [9] John F. *Solutions of quasilinear wave equations with small initial data ; the third phase, non linear hyperbolic equations* Proceedings, Bordeaux (1988), Lecture notes in mathematics 1402, Springer Verlag, 155-184.
- [10] John F. *Blow up of radial solutions of  $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$  in three space dimensions* Math. Aplicada e Comp. **4** (1985), 3-18.
- [11] John F. *Existence for large times of strict solutions of non linear wave equations in three space dimensions for small initial data*, Comm. in Pure Appl. Math. **40**, (1987), 79-109.
- [12] John F. et Klainerman S. *Almost global existence to non linear wave equations in three space dimensions* Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984) 443-55.
- [13] Klainerman S. *Weighted  $L^\infty$  and  $L^1$  estimates for solutions to the classical wave equation in three space dimensions* Comm. Pure Appl. Math **37** (1984) 269-88.
- [14] Klainerman S. *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985) 321-332.
- [15] Majda A. *Compressible fluid flows and systems of conservation laws* Springer Appl. Math. Sc. **53** (1984).
- [16] Majda A. et Rosales R. *Resonantly interacting weakly non linear hyperbolic waves I. A single space variable*, Stud. Appl. Math. **71** (1984) 149-179.
- [17] Wasow W. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations* Krieger, New York (1976).

Département de Mathématiques  
 Bât. 425  
 Université Paris-Sud  
 91405 Orsay cedex, France