Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Métivier

Non unicité de Hölmgren pour des problèmes non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n° 10, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A10_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

NON UNICITE DE HÖLMGREN POUR DES PROBLEMES NON LINEAIRES

G. METIVIER

Exposé n° X

17 novembre 1992

1. Introduction.

L'unicité du problème de Cauchy non caractéristique pour une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients analytiques, est un résultat classique (Hölmgren [Höl], John [J]).

THÉORÈME 1. *Soit* $P := D_t^m - \sum A_j(t,x,D_x)D_t^{m-j}$ *un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques sur un voisinage* Ω *de* $(0,x_0)\in\mathbb{R}^{1+d}$. *Si* $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ *est solution de* $Pu=0$ *et est nulle dans* $\Omega\cap\{t<0\}$, *alors u est nulle au voisinage de* $(0,x_0)$.

Une question naturelle était de savoir si un résultat analogue persiste pour les équations non linéaires analytiques. À ce niveau de généralité, la question de l'unicité doit être retreinte aux solutions assez régulières, le défaut d'unicité étant parfaitement connu pour les solutions faibles. Dans ce cadre, l'unicité des solutions C^2 du problème de Cauchy non caractéristique a été démontrée pour les équations scalaires non linéaires, analytiques, d'ordre un (Baouendi-Goulaouic-Treves [BGT], Métivier [M]).

THÉORÈME 2. *Considérons le problème de cauchy pour une équation non linéaire scalaire du premier ordre*

$$\partial_t u = f(t,x,u,\nabla_x u) \tag{1.1}$$

$$u_{|t=0} = u_0 \tag{1.2}$$

où $f(t,x,\zeta,\xi)$ *est une fonction analytique de ses arguments autour de* $(0,x_0,\zeta_0,\xi_0)$, $\zeta_0 := u_0(x_0)$, $\xi_0 := \nabla_x u_0(x_0)$. *Supposons que* $u^{(1)}$ *et* $u^{(2)}$ *soient deux solutions (à valeurs complexes) de* (1.1) (1.2) *de classe* C^2 *sur* $[0,T[\times\omega$, ω *voisinage réel de* x_0. *Alors* $u^{(1)}=u^{(2)}$ *autour de* $(0,x_0)$.

On pourra noter que ce résultat s'étend au cadre des systèmes intégrables (voir Treves [T]). La question restait donc entièrement ouverte pour les équations d'ordre supérieur ou les systèmes. Le principal objet de cet exposé est d'y apporter une réponse négative, en exhibant des exemples (simples) de problèmes pour lesquels l'unicité des solutions C^∞ est mise en défaut.

THÉORÈME 3. *Il existe des fonctions analytiques* $\mathcal{F}$ *et des données initiales* C^∞, u_k, *telles que le problème de Cauchy*

$$\begin{cases}\partial_t^m u = \mathcal{F}(t,x,\partial^A u)\\ \partial_t^k u_{|t=0} = u_k, \quad k=0,..m-1\end{cases} \tag{1.3}$$

possède sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$ *deux solutions* C^∞, $u^{(1)}$ *et* $u^{(2)}$, *distinctes sur tout voisinage de l'origine.*

Dans (1.3), $\partial^A u$ désigne l'ensemble des dérivées $\partial_t^k\partial_x^\alpha u$ pour $k+|\alpha|\le m$ et $k<m$. On renvoit au paragraphe 3 pour l'écriture d'exemples explicites.

Ce résultat n'est pas très surprenant, si l'on apparente les équations non linéaires aux équations linéaires à coefficients peu réguliers (penser à des équations semi ou quasi-linéaires où les coefficients dépendent de la solution). En effet, l'unicité de Cauchy n'est pas vraie en général pour les problèmes linéaires à coefficients C^∞ non analytiques (voir Plis [Pl], De Giorgi [D.G], Cohen [Co], Hörmander [Hör 3], Alinhac [Al] , Zuily [Zu] et leur références). De fait, la construction des exemples non linéaires justifie cet apparentement : une astuce permet de tranformer les exemples de non unicité pour les problèmes linéaires à coefficients

C^∞, en exemples non linéaires. Néanmoins cette analogie ne doit pas être pousseé trop loin : le cas des équations d'ordre 1 mais aussi le cas des équations elliptiques, le montre.

Ce résultat de non unicité distingue donc les équations du premier ordre (ou les systèmes intégrables) du cas général des équations non linéaires. On tentera d'expliquer cette situation au prochain paragraphe, en reprenant les démonstrations de l'unicité et en constatant que les arguments de base du théorème de Hölmgren linéaire, s'étendent bien aux équations non linéaires d'ordre un, mais sont inapplicables à l'ordre supérieur.

On conclura cet exposé par un certain nombre de remarques et de questions ouvertes, sans toutefois se laisser aller à formuler des conjectures hasardeuses.

2. Quelques ingrédients de l'unicité.

Nous allons rappeler succintement trois méthodes de démonstration de l'unicité de Hölmgren qui fonctionnent dans les cas linéaires et non linéaires scalaires d'ordre un, et dont le point de départ est radicalement faux dans le cas général.

2.1. Les solutions sont analytiques à valeurs les fonctionnelles analytiques.

Lorsque u est solution du problème linéaire

(2.1) $$Pu := \partial_t u - \sum_{j=1}^{d} A_j(t,x)\partial_{x_j} u - A_0(t,x)u = 0$$

alors on peut écrire les dérivées en t à l'aide des dérivées en x, sous la forme

(2.2) $$\partial_t^k u = \sum_{|\alpha|\le k+1} \partial_x^\alpha \{A_{k,\alpha}(t,x)\, u\}.$$

En supposant que $u_0 = 0$ (ce qui n'est pas une restriction dans le cas linéaire) et que la surface initiale ait été préalablement convexifiée, on peut supposer que $u=0$ dans $t\le |x|^2$. On teste (2.2) contre une fonction $\varphi(x)$, ce qui donne

$$\partial_t^k \langle u(t), \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\le k+1} \langle u(t), A_{k,\alpha}(t,.)\ \partial_x^\alpha \varphi\rangle .$$

Lorsque les coefficients et φ sont analytiques, on vérifie que le membre de droite est $O(C^{k+1}k!)$ ce qui implique que $\langle u(t), \varphi\rangle$ est une fonction analytique de t. L'unicité en résulte.

Une formule du type de (2.2) reste vraie lorsque u est solution d'une équation non linéaire scalaire $\partial_t u = f(t,x,u, \nabla_x u)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier des formules du type

(2.3) $$\partial_t^{k+2} u = \sum_{|\alpha|\le k} \partial_x^\alpha \{f_{k,\alpha}(t,x,u, \nabla_x u, \nabla_x^2 u)\}$$

grâce à une relation du genre suivant (où l'on a omis les variables (t,x))

$$\partial_t F(u, \nabla_x u, \nabla_x^2 u) = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(u, \nabla_x u)\, F(u, \nabla_x u, \nabla_x^2 u)\right\} + G(u, \nabla_x u, \nabla_x^2 u).$$

Pour deux solutions u_1 et u_2 ayant la même donnée initiale sur $t=|x|^2$, on aboutit encore à l'analyticité de $\langle u_1(t) - u_2(t), \varphi\rangle$ et l'unicité suit.

Pour les équations ou systèmes non linéaires généraux, une formule du type (2.3) est sans espoir, puisque les solutions ne sont en général, même pas C^∞ à valeurs distributions. Par exemple, le système

(2.4) $$(\partial_t - \partial_x)a = 0, \quad (\partial_t + \partial_x)u = a\,u$$

a des solutions de la forme $a=a(t+x)$, $u=A(t+x)\,B(t-x)$. Pour A et B de classe C^k, u est au mieux de classe C^{2k} en t à valeurs les distributions en x.

2.2. Transposition du théorème de Cauchy Kovalevsky.

Si u est solution de (2.1) et Φ solution de

$$P^*\Phi := -\partial_t\Phi + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}(A_j^*\Phi) - A_0^*\Phi = 0\,, \quad \Phi_{|t=s} = \varphi, \tag{2.5}$$

en intégrant

$$\partial_t \langle u\,, \Phi\rangle - \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} \langle A_j(t,x)u, \Phi\rangle = 0 \tag{2.6}$$

on obtient (en supposant la surface initiale S_0 convexifiée) une représentation de u à l'aide de sa donnée de Cauchy

$$\langle u(s), \varphi\rangle = \langle u_0\,, B\Phi\rangle_{S_0}. \tag{2.7}$$

On arrive au même résultat en exprimant $\langle u(s), \varphi\rangle$ comme somme de sa série de Taylor et en utilisant (2.2). L'unicité résulte de (2.7) en résolvant (2.5) par le théorème de Cauchy Kovalevsky pour toutes les fonctions φ entières.

C'est cette méthode qui a été reprise dans [M] pour les équations scalaires d'ordre un. L'idée est de chercher des fonctions $F(t,x,u,v,w)$ et $G_j(t,x,u,v,w)$ telles que pour toute solution C^2 de (1.1) on ait, en analogie avec (2.6),

$$\partial_t F(t,x,u(t,x),\nabla_x u(t,x),\nabla_x^2 u(t,x)) - \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} G_j(t,x,u(t,x),\nabla_x u(t,x),\nabla_x^2 u(t,x)) = 0.$$

Après calculs, on constate qu'il suffit de prendre

$$G_j(t,x,u,v,w) = \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(t,x,u,v)\, F(t,x,u,v,w) \tag{2.8}$$

et F solution d'une équation linéaire holomorphe dans les variables (t,x,u,v,w),

$$\mathscr{L}(t,x,u,v,w,\partial_t,\partial_x,\partial_u,\partial_v,\partial_w)\,F = 0. \tag{2.9}$$

On renvoit à [M] pour une écriture explicite de $\mathscr{L}$, qui est en fait le transposé du Hamiltonien de l'équation obtenue pour $(u, \nabla_x u)$.

En résolvant (2.9) par le théorème de Cauchy-Kovalevsky pour les données

$$F^{\varphi}{}_{|t=s}(x,u,v,w) = u\,\varphi(x)$$

on obtient une représentation analogue à (2.7)

$$\langle u(s), \varphi\rangle = \int_{S_0} \widetilde{F}^{\varphi}(t,x,u_0,v_0,w_0)\, dS$$

où (v_0, w_0) désigne les données de Cauchy de $(\nabla_x u, \nabla_x^2 u)$.

Cette approche non plus ne peut pas se généraliser au cas des équations d'ordre supérieur. En effet, on est alors conduit à résoudre à la place de (2.8) (2.9) des systèmes surdéterminés qui n'admettent pas de solutions. Toutefois, dans le cas linéaire, on retrouve évidemment les fonctions $F(t,x,u) := \langle u, \Phi(t,x)\rangle$, $G_j(t,x,u) := \langle A_j(t,x)u, \Phi\rangle$ comme solutions particulières de ces systèmes lorsque Φ vérifie $P^*\Phi = 0$.

Par exemple, pour le système semi-linéaire $\partial_t u + A\partial_x u = f(u)$ on cherche $F(t,x,u)$ et $G(t,x,u)$ tels que $\partial_t F(t,x,u(t,x)) + \partial_x G(t,x,u(t,x)) = 0$ pour toute solution u. Cela conduit aux équations

$$F'_u A = G'_u \tag{2.10}$$

$$\partial_t F + \partial_x G + F'_u f(u) = 0. \tag{2.11}$$

On peut noter que (2.10) est un problème analogue à celui de la détermination des entropies. En général, les seules solutions sont linéaires $F(t,x,u)=\Phi(t,x)u$, $G(t,x) = \Phi(t,x)Au$. Mais alors, (2.11) ne peut avoir de solutions que si $\Phi f(u)$ est linéaire en u, c'est à dire en pratique, que si f est linéaire.

2.3. Méthodes microlocales.

Elles reposent sur deux ingrédients.

a) un argument de fonctions analytiques : si le support de u est contenu dans $\{t \leq 0\}$ et si $(0, x_0) \in supp\, u$, alors les points $((0,x_0)\ (\pm 1,0))$ sont dans le front d'onde analytique de u, $WF_a(u)$. (Sato-Kawai-Kashiwara [SKK]).

b) Un argument d'ellipticité microlocale. Pour une solution de (2.2), il s'exprime sous la forme

$$WF_a(u) \subset Car P \tag{2.12}$$

où *Car P* désigne la variété caractéristique de l'opérateur $P := \partial_t - \Sigma A_j \partial_j$. (Hörmander [Hör 1] , Sato [S]).

Pour les solutions C^2 des équations non linéaires scalaires du premier ordre, l'analogue de (2.12) a été démontré par Hanges-Treves ([HT]). On a

$$WF_a(u) \subset Car P_u \tag{2.13}$$

où P_u désigne ici l'opérateur linéarisé sur la solution u.

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (1.1), égales dans $t \leq 0$, les symboles des linéarisés coïncident au dessus des points $(0,x_0)$. Il en est donc de même des ensembles $Car P_{u_1}$ et $Car P_{u_2}$. Donc au dessus de ces points, $WF_a(u_1 - u_2) \subset Car P_{u_1}$. Comme l'équation est non caractéristique, $((0,x_0), (\pm 1, 0))$ n'est pas dans $Car\, P_u$ et donc pas dans $WF_a(u_1 - u_2)$. Donc $(0, x_0) \notin supp\ (u_1 - u_2)$.

Pour finir, rappelons que cette méthode a conduit à des extensions de l'unicité de Hölmgren à certains problèmes caractéristiques linéaires. (Bony [Bo1] [Bo2], Hörmander [Hör 2], Sjöstrand [Sjö]). Elles reposent sur une formulation intrinsèque de a), $N^*(supp\ u)$, le conormal au support de u est contenu dans $WF_a(u)$, et un théorème de stabilité du conormal à un fermé par le flot Hamiltonien des fonctions nulles sur ce conormal.

On notera que ces méthodes s'adaptent au cas des équations non linéaires du premier ordre, quitte à compter avec soin les régularités requises du symbole de P_u .

Notons pour terminer, que l'inclusion (2.13) est notoirement fausse dans le cas des équations d'ordre supérieur à 2, comme on peut le constater par exemple sur le système (2.4).

3. Exemples de non unicité.

3.1. Exemples de systèmes.

Le procédé de construction est le suivant. On part d'une équation (ou d'un système) linéaire à coefficients C^∞ pour laquelle (lequel) l'unicité du problème de Cauchy n'est pas vérifiée. On construit un exemple non linéaire analytique, en prenant les coefficients comme inconnues supplémentaires, et en ajoutant une variable pour écrire de nouvelles équations pour ces nouvelles inconnues.

Notons (t,x) les variables de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. On sait qu'il existe des systèmes

(3.1) $$L := \partial_t + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x)\,\partial_{x_j} + a_0(t,x)$$

où les a_j sont des matrices C^∞, vérifiant la condition suivante sur un voisinage ω de 0.

(*NU*) $$\exists\,\varphi \in C^\infty(\omega) \ :\ L\varphi = 0 \ \textit{sur}\ \omega\,,\ \ \varphi = 0 \ \textit{sur}\ \omega \cap \{t<0\} \ \ \textit{et}\ \ 0 \in \textit{supp}\ \varphi.$$

On ajoute une variable, notée s, et on définit sur un voisinage Ω de l'origine dans $\mathbb{R}^{d+2}$:

(3.2) $$u(t,x,s) := \chi(s)\,\varphi(t-s,x)$$

(3.3) $$v_j(t,x,s) := a_j(t-s,x)\ ,\ \ 0 \le j \le d$$

où χ est une fonction C^∞ nulle dans $s \le 0$ et $\chi(s)>0$ pour $s>0$. Alors

(3.4) $$u = 0 \ \ \textit{dans}\ \ t<0 \ \ \textit{et}\ \ 0 \in \textit{supp}\, u.$$

Comme χ et L commutent, on tire de l'équation $L\varphi = 0$ et de (3.2) (3.3), que $U^{(1)} := (u,v)$ est solution de

(3.5) $$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} v_j \partial_{x_j} u + v_0\, u = 0 \\ \partial_t v_j + \partial_s v_j = 0 \qquad\qquad 0 \le j \le d \end{cases}$$

Par ailleurs $U^{(2)} = (0, v)$ est une autre solution de (3.5) et (3.4) implique que $0 \in \textit{supp}\ (U^{(1)} - U^{(2)})$. On a donc démontré le résultat suivant.

PROPOSITION 1. *Soit L un système de la forme* (3.1) *vérifiant la condition* (*NU*). *Alors le système analytique non linéaire* (3.5) *admet deux solutions* C^∞, $U^{(1)}$ *et* $U^{(2)}$ *sur un voisinage* Ω *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^{d+2}$, *telles que* $U^{(1)} = U^{(2)}$ *sur* $\Omega \cap \{t<0\}$ *et* $0 \in \textit{supp}\ \{U^{(1)} - U^{(2)}\}$.

En partant d'une solution non triviale de

(3.6) $$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + \partial_y^2)\,\psi = a\,\partial_y \psi, \qquad \psi_{|\,t<0} = 0,\ \ 0 \in \textit{supp}\ \psi.$$

(voir par exemple le paragraphe 13.6.3 de [Hör 3]), qu'on écrit sous forme d'un système en posant $\varphi_1 = \partial_y \psi$ et $\varphi_2 = (\partial_t + \partial_x)\,\psi$, on obtient un exemple de non unicité pour le sytème semi-linéaire à interaction quadratique suivant.

(3.7) $$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u - \partial_y v = 0 \\ \partial_t v - \partial_x v + \partial_y u = w\, u \\ \partial_t w - \partial_z w = 0 \end{cases}$$

De même, en partant d'une solution non triviale de

(3.8) $$\partial_t \varphi + a\,\partial_x \varphi = 0, \qquad \varphi_{|\,t<0} = 0,\ \ 0 \in \textit{supp}\ \varphi,$$

(voir par exemple [Hör 3], paragraphe 13.6.5), on obtient la non unicité pour le sytème quasilinéaire suivant.

(3.9) $$\begin{cases} \partial_t u + v\,\partial_x u = 0 \\ \partial_t v - \partial_y v = 0 \end{cases}$$

3.2. Exemples d'équations.

L'idée est un peu différente. On part d'une équation où un seul coefficient a est non analytique, on ajoute une variable pour rendre a solution d'une équation supplémentaire, qu'on utilise pour éliminer a de l'équation. Considérons dans in $\mathbb{R}^{1+d}$ un opérateur d'ordre m, $L(t,x,\partial_t,\partial_x)$, à coefficients analytiques, tel que sur un voisinage ω de l'origine, on ait :

(NU) $\quad \exists\, \varphi \in C^\infty(\omega), \exists\, a \in C^\infty(\omega) \;:\; L\varphi + a\varphi = 0 \; sur\; \omega,\; \varphi = 0 \; sur \; \omega \cap \{t<0\} \;\; et\; 0 \in supp\, \varphi.$

En outre, en réduisant ω au besoin, on suppose que

(S) $$\exists\, \psi \in C^\infty(\omega) \;:\; \psi(0) = 1 \;\; et\;\; L\psi + a\psi = 0 \quad sur \;\; \omega.$$

On ajoute à nouveau la variable s et on introduit les fonctions

(3.10) $$v_1(t,x,s) := \psi(t-s,x)\;,\; v_2(t,x,s) := \psi(t-s,x) + \chi(s)\varphi(t-s,x)$$

où $\chi \in C^\infty$ est nulle pour $s \le 0$ et strictement positive pour $s > 0$. Alors

(3.11) $$v_1 - v_2 = 0 \quad dans \;\; t<0 \;\; et \;\; 0 \in supp\,(v_1 - v_2),$$

(3.12) $$M\, v_k + b\, v_k = 0 \quad où\; b(t,x,s) := a(t-s,x) \;\; et \;\; M := L(t-s, x, \partial_t, \partial_x).$$

Puisque $v_k = 1$ à l'origine, on peut définir sur un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^{d+2}$, $u_k := Ln\; v_k \in C^\infty(\Omega)$. On a alors

(3.13) $$u_1 - u_2 = 0 \;\; dans \;\; t<0 \;\; et \;\; 0 \in supp\,(u_1 - u_2).$$

On a $M(e^u) = \mathcal{M}(\nabla^m u)\, e^u$, où $\mathcal{M}$ est un polynôme à coefficients analytiques en $(t-s,x)$ des dérivées d'ordre $\le m$ de u. Alors, (3.12) implique que

(3.14) $$b = \mathcal{M}(\nabla^m u_k) \quad pour \;\; k = 1, 2$$

Puisque $(\partial_t + \partial_s) b = 0$, on conclut que u_1 et u_2 sont deux solutions de

(3.15) $$(\partial_t + \partial_s)\mathcal{M}(\nabla^m u) = 0.$$

(3.15) est une équation semi-linéaire, de partie principale $(\partial_t+\partial_s)L_m(t-s, x, \partial_t, \partial_x)$, où L_m est la partie principale de L. En particulier, la surface $\{t=0\}$ n'est pas caractérisitique pour l'équation (3.15) dès qu'elle ne l'est pas pour L.

PROPOSITION.2. *Soit L un opérateur à coefficients analytiques qui vérifie les conditions (NU) et (S). Alors, l'équation* (3.15) *possède sur un voisinage Ω de l'origine, deux solutions C^∞, $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$, telles que $u^{(1)} = u^{(2)}$ dans $\Omega \cap \{t<0\}$ et $0 \in supp\; \{u^{(1)} - u^{(2)}\}$.*

Cette construction s'applique à l'opérateur

(3.16) $$L := \partial_t^2 + \partial_x^2 - \partial_y^2.$$

On sait qu'il vérifie (NU) (voir [A-B], [Ba]). En outre, la condition (S) est trivialement satisfaite, en résolvant le problème de Cauchy strictement hyperbolique pour $L+a$, avec y comme variable de temps.

(3.17) $$L\psi + a\psi = 0 \;,\; \psi_{|y=0} = 1,\; \partial_y \psi_{|y=0} = 0.$$

L'équation (3.15) que l'on obtient s'écrit

(3.18) $$(\partial_t + \partial_z)\,\{\, \partial_t^2 u + \partial_x^2 u - \partial_y^2 u + (\partial_t u)^2 + (\partial_x u)^2 - (\partial_y u)^2 \,\} = 0.$$

C'est une équation semi-linéaire, de partie principale $(\partial_t+\partial_z)(\partial_t^2+\partial_x^2-\partial_y^2)$, et $\{t=0\}$ est non caractéristique.

4. Commentaires.

4.1. Différents problèmes d'unicité.

L'unicité du problème de Cauchy (1.3) se pose soit de manière unilatérale (pour des solutions définies dans $\{t\geq 0\}$) soit de manière bilatérale (solutions définies sur tout un voisinage de $(0,x_0)$). Quitte à recoller une solution dans $\{t>0\}$ avec une solution dans $\{t<0\}$, ce second problème équivaut à l'unicité du prolongement des solutions à travers la surface $\{t=0\}$: si $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ sont au voisinage de $(0,x_0)$ deux solutions de $\partial_t^m u=\mathcal{F}(t,x,\partial^A u)$ qui coïncident dans $t<0$, coïncident-elles au voisinage de $(0,x_0)$?

L'unicité unilatérale implique évidemment l'unicité du prolongement. On remarquera que les propositions 1 et 2 donnent en fait des exemples de non unicité du prolongement.

Un autre question est l'unicité du problème (1.3) pour des données de Cauchy u_k analytiques. Compte tenu du théorème de Cauchy Kovalevsky, la question est alors de savoir si toutes les solutions C^k sont analytiques. Cela revient encore à savoir si on a propagation de l'analyticité à travers la surface $\{t=0\}$ pour les solutions analytiques jusqu'au bord dans $\{t\leq 0\}$.

On notera que pour les problèmes linéaires, toutes ces questions sont équivalentes. Par ailleurs, pour les problèmes non linéaires scalaires d'ordre un, l'unicité unilatérale apporte automatiquement une réponse positive à toutes ces questions.

4.2. Cas où l'unicité est connue.

A) Comme conséquence d'estimations d'énergie, en particulier dans le cas d'équations hyperboliques. Si u et v sont deux solutions de (1.3), alors $w:=u-v$ est solution d'une équation de la forme

$$Pw=0 \tag{4.1}$$

où P est un opérateur différentiel linéaire d'ordre m dont les coefficients dépendent de (u,v) et de leurs dérivées. Dans certains cas, il peut être plus intéressant de voir (4.1) sous la forme

$$|P_m w| \leq C|\partial^B w| \tag{4.2}$$

$\partial^B\subset\partial^A$ étant un sous ensemble de dérivations, dépendant de l'équation considérée. Si l'équation est hyperbolique, ou plus généralement si l'on dispose pour (4.1) ou (4.2) d'inégalités de Carleman convenables qui impliquent l'unicité (cf par exemple le chapitre 18 de [Hör 3]), on obtient l'unicité pour le problème de Cauchy (1.3). On notera que cette procédure n'a strictement rien à voir avec l'analyticité de l'équation.

B) Comme conséquence de l'ellipticité ou de la propagation de l'analyticité. Lorsque l'équation (1.3) est elliptique, alors toutes les solutions de classe C^m au voisinage de $(0,x_0)$ sont analytiques (Morrey [Mo], Petrowski [Pe]). On en déduit immédiatement l'unicité du prolongement à travers $\{t=0\}$. Ce cas particulier montre que les réponses au problème de l'unicité se sont pas les mêmes dans le cas linéaire C^∞ et le cas non linéaire analytique, ce que pouvait laisser supposer les constructions du paragraphe 3 et le point A) ci dessus.

Plus généralement, si l'équation (1.3) est de type principal réel, on sait que l'analyticité dans $\{t<0\}$ se propage à travers $\{t=0\}$ pourvu que $\{t=0\}$ coupe transversalement les caractéristiques réelles (Alinhac-Métivier [AM]). On en déduit l'unicité du prolongement à travers $\{t=0\}$ des solutions analytiques dans $\{t<0\}$.

Sous ces hypothèses d'ellipticité ou de type principal réel, l'unicité du problème (1.3) à données u_k analytiques est donc vérifiée.

4.3. Quelques questions.

A) Unicité pour des données analytiques.

Ce problème équivaut à celui de la propagation des zéros à travers $\{t=0\}$ pour une solution u d'une équation non linéaire analytique $\partial_t^m u = \mathcal{F}(t,x,\partial^A u)$.

B) A-t-on l'unicité pour les problèmes unilatéraux elliptiques, à données non analytiques?

C) Cas où l'on peut construire suffisamment d'"entropies".

Considérons un système du premier ordre, qu'on peut écrire sous forme de système de Pfaff

$$\omega_j := du_j - p_j\, dx - F_j(t,x,u,p)\, dt = 0. \tag{4.3}$$

On introduit l'idéal différentiel engendré par les ω_j, $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1 \oplus .. \oplus \mathcal{A}_n \oplus ...$ La méthode de transposition du paragraphe 2.2 consiste à rechercher les formes α de degré d telles que $d\alpha \in \mathcal{A}_{d+1}$. Soit u une solution. Au dessus du domaine de $\mathbb{R}^{1+d}$ limité par la surface initiale S_0 et une surface S_a, $\pi_u := (u, \nabla_x u)$ définit une surface Σ. En intégrant $d\alpha$ sur Σ, on en déduit que

$$\int_{S_a} \pi_u^* \alpha = \int_{S_0} \pi_{u_0}^* \alpha . \tag{4.4}$$

La question est alors de trouver suffisamment de formes α pour que (4.4) détermine u.

L'avantage de la présentation ci-dessus, est qu'elle met clairement en évidence le caractère intrinsèque des formes α , indépendemment du choix des variables dépendentes et indépendantes (t,x,u,p). En particulier, il existe des systèmes linéarisables par changement de variables-inconnues (par exemple par transformation de l'hodographe). Pour de tels systèmes on sait donc construire tout un ensemble de formes α. La question reste de savoir si les relations (4.4) correspondantes déterminent complètement les solutions.

D) Cas de la dimension 2 et de l'ordre 2.

Les exemples de non unicité produits se situent tous en dimension ≥ 3. Cela tient à la méthode même d'addition de variable. Y-a-t-il des résultats particuliers en dimension deux ?

De même, l'exemple (3.18) est d'ordre trois. En effet, on ne peut avoir en même temps les condition (NU) et (S) pour un champ de vecteurs analytique. Peut-on construire des exemples de non unicité pour des équations du second ordre?

5. Références.

[A] S.ALINHAC : *Uniqueness and non–uniqueness in the Cauchy problem.* Contemporary Mathematics, 27 (1894), pp 1-22.

[AB] S.ALINHAC - S.BAOUENDI : *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal.* Séminaire de L'École Polytechnique, année 1978-79, exposé 22.

[AM] S.ALINHAC, G.MÉTIVIER : *propagation de l'analyticité des solutions d'équations non-linéaires de type principal.* Comm. in Partial Diff. Equ., 9 (1984) pp 523-537.

[BGT] S.BAOUENDI, C.GOULAOUIC, F.TREVES : *Uniqueness in certain first order nonlinear complex Cauchy problems.* Comm. in Pure and Applied Math., 38 (1985), pp 109-123.

[Ba] H. BAHOURI : *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel.* Comm. in Partial Diff. Equ., 8 (1983), pp 1521-1547.

[Bo 1] J.M.BONY : *Une extension du théorème de Hölmgren sur l'unicité du problème de Cauchy.* C.R. Acad. Sci. Paris, 268 (1969) pp 1103-1106.

[Bo 2] J.M.BONY : *Extensions du théorème de Hölmgren.* Sém. Goulaouic-Schwartz, École Polytechnique, Année 1975-76.

[Co] P. COHEN : *The non uniqueness of the Cauchy problem.* O.N.R. Techn. Report 93, Stanford 1960.

[D.G] E. DE GIORGI : *Un esempio di non unicita della soluzione del problema di Cauchy relativo ad una equazione differentiale lineare a derivati parziali di typo parabolico.* Rend. Mat. 14 (1955) pp 382-387.

[HT] N.HANGES, F.TREVES : *On the analyticity of solutions of first order nonlinear PDE.* Trans. of the Amer. Math. Soc., 331 (1992), pp 627-638.

[Höl] E.HÖLMGREN : *Uber Systeme von linearen partialen Differentialgleichtungen.* Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Foh 58 (1901), pp 91-105.

[Hör 1] L. HÖRMANDER : *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients.* Comm. on Pure and Appl. Math., 24 (1971) pp 671-704.

[Hör 1] L. HÖRMANDER : *A remark on Hölmgren's uniqueness theorem.* J. Diff. Geom., 6 (1971), pp 129-134.

[Hör 3] L. HÖRMANDER : *The analysis of linear partial differential operators.* Springer Verlag, Berlin (1983).

[J] F. JOHN : *On linear differential equations with analytic coefficients. Unique continuation of data.* Comm. on Pure and Appl. Math., 2 (1949) pp 209-253.

[M] G.MÉTIVIER : *Uniqueness and approximation of solutions of first order non linear equations.* Invent. Math., 82 (1985) pp 263-282.

[Mo] C.B.MORREY : *On the analyticity of the solution s of analytic nonlinear systems of partial differential equations.* Tech. Report No 8, Univ .of Calif., Berkeley (1957). *Multiple integrals in the calculus of variations.* Berin-Heidelberg-New York, Springer 1966.

[Pe] I. PETROWSKI : *Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles.* Ree. Math. N.S. Math Sbornick 5 (1939), pp 3-70.

[Pl] A. PLIS : *The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations.* Bull. Acad. Pol. Sci. 2 (1954) pp 55-57.

[Sa] M.SATO : *Hyperfunctions and partial differential equations.* Proc. Int. Conf. on Funct. Anal. and Rel. Topics., Tokyo University Press, Tokyo (1969), pp 91-94.

[SKK] M.SATO, T.KAWAI, M.KASHIWARA : *Microfunctions and pseudodifferential equations.* Springer Lectures Notes in Mathematics, 287 (1973).

[Sjö] J.SJÖSTRAND : *Singularités analytiques microlocales.* Astérisque 95, (1982) pp 1 - 166.

[T] F. TREVES : *Hypo-analytic structures.* Princeton Univ. Press. (à paraître).

[Z] C.ZUILY : *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem.* Progress in Math., vol 33, Birkhäuser, Boston (1983).

Guy METIVIER
Université de Rennes
Département de Mathématiques
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX