

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ERIC LEICHTNAM

Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. n° 6,
p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992___A6_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Téléx 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LE PROBLEME DE CAUCHY RAMIFIE LINEAIRE POUR DES DONNEES A SINGULARITES ALGEBRIQUES

Eric LEICHTNAM

Exposé n° VI

26 Novembre 1991

Nous considérons le problème de Cauchy :

$$(0.1) \quad \begin{cases} a(x, D)u = v(x) \\ D_{x_0}^s u(x)|_S = u_s(x') \quad 0 \leq s < m \end{cases}$$

où $a(x, D)$ désigne un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients fonctions holomorphes de $x = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$; où l'hyperplan \mathcal{S} d'équation $x_0 = 0$ est non caractéristique pour $a(x, D)$. Posons $x' = (x_1, \dots, x_n)$. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, désignons par $D(x_1, x_2, \dots, x_k)$ le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$(0.2) \quad F(x, z) = z^{k+1} - x_k z^{k-1} - x_{k-1} z^{k-2} \dots - x_2 z - x_1 = 0$$

Posons en outre :

$$(0.3) \quad \Delta(x_2, \dots, x_k, z) = \Delta = \partial_z F(x, z)$$

Désignons par T l'hypersurface analytique (dite queue d'aronde) de \mathcal{S} d'équation $D(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$. Nous supposons que chaque fonction $u_s(x')$ ($0 \leq s < m$) est holomorphe ramifiée autour de T et de la forme : ($0 \leq s \leq m - 1$)

$$(0.4) \quad u_s(x') = \sum_{\ell=0}^k P_{s,\ell}(x' ; D')(z^\ell(x'))$$

où $x \rightarrow z(x')$ désigne une solution holomorphe ramifiée autour de T de l'équation (0.2), où ($-w$ étant un entier naturel donné) Les $P_{s,\ell}(x' ; D')$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $s - w$ à coefficients holomorphes sur un voisinage ouvert de $0 \in \{x' \in \mathcal{C}^k\}$. Indiquons - à titre d'exemple - qu'en différentiant l'équation (0.2) on obtient :

$$\partial_{x_1} z^\ell(x') = \frac{\ell z^{\ell-1}}{\Delta}$$

pour $0 \leq \ell \leq k$. Le second membre $v(x)$ sera précisé dans le théorème 0.2, à ce stade de la rédaction on peut supposer sans inconvénient - pour fixer les idées - que $v(x) \equiv 0$. En outre nous étudierons le problème (0.1) avec les hypothèses suivantes. Notons $a_m(x ; \xi)$ le polynôme caractéristique homogène en ξ de l'opérateur $a(x, D)$; nous supposons que $a(x, D)$ est à caractéristiques simples ce qui signifie que l'équation de degré m en ξ_0 :

$$(0.5) \quad a_m(0 ; \xi_0, 1, 0, \dots, 0) = 0$$

possède m racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Posons $m = 2p + \mathcal{S}$ où $\mathcal{S} \in \{0, 1\}$, un exemple simple de symbole $a_m(x ; \xi)$ est le polynôme suivant :

$$\xi_0^\delta \prod_{j=1}^p (j \xi_0^2 - \xi_1^2 \dots - \xi_n^2)$$

L'hypothèse à caractéristiques simples et en quelque sorte l'analogue holomorphe de la notion (réelle, C^∞) d'opérateurs strictement hyperbolique relativement à S .

Nous rappelons la définition d'une queue d'aronde :

Définition 0.0.— Une hypersurface analytique K de \mathcal{C}^{n+1} définie dans un voisinage ouvert connexe U de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ est appelée queue d'aronde de sommet 0 s'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ et k fonctions holomorphes sur U s'annulant en 0 $x \rightarrow g_j(x)$ $1 \leq j \leq k$ telles que les différentielles $dg_j(0)$ ($1 \leq j \leq k$) sont linéairement indépendantes et K est définie par l'équation :

$$D(g_1(x), \dots, g_k(x)) = 0$$

où $D(g_1, \dots, g_k)$ désigne le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$(0.6) \quad z^{k+1} = g_k z^{k-1} + \dots + g_2 z + g_1.$$

Nous définissons le conormal $N(K)$ de K comme étant l'adhérence dans $T^*U \setminus 0$ du conormal $N(K_{\text{reg}})$ de la partie lisse K_{reg} de K . Nous dirons que K est caractéristique pour $a(x, D)$ si la restriction du symbole principal $a_m(x; \xi)$ à $N(K)$ (ou $N(K_{\text{reg}})$) est identiquement nulle.

Remarque : Soit $m_0 \in U \setminus K$. Considérons un germe holomorphe au point $(g_1(m_0), \dots, g_k(m_0))$ $(X_1, \dots, X_k) \rightarrow z(X_1, \dots, X_k)$ solution de l'équation :

$$z^{k+1} = X_k z^{k-1} + \dots + X_2 z + X_1.$$

On peut prolonger holomorphiquement ce germe $z(X_1, \dots, X_k)$ le long de tout chemin issu de $(g_1(m_0), \dots, g_k(m_0))$ ne rencontrant pas la queue d'aronde $D(X_1, \dots, X_k)^{-1}(0)$. Le germe en m_0 $x \rightarrow z(g_1(x), \dots, g_k(x))$ est alors prolongeable holomorphiquement le long de tout chemin issu de m_0 et tracé dans $U \setminus K$.

Le théorème suivant affirme qu'il existe (près de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$) m hypersurfaces analytiques (singulières) K^1, \dots, K^m de \mathcal{C}^{n+1} issues de T , caractéristiques pour $a(x, D)$. Les K^i sont des queues d'aronde de sommet 0 et - dans un voisinage de 0 - ce sont "essentiellement" les seules hypersurfaces analytiques vérifiant ces propriétés. Notons :

$$\Pi \left| \begin{array}{l} T^*\mathcal{C}^{n+1} \rightarrow \mathcal{C}^{n+1} \\ (x, \xi) \rightarrow x \end{array} \right.$$

la projection usuelle.

Théorème 0.1.— (Avec les notations du problème (0.1)). Soit λ_j ($1 \leq j \leq m$) l'une des racines de l'équation (0.5). Alors :

1] Il existe une lagrangienne holomorphe lisse homogène Λ_j définie dans un petit voisinage conique de $(0, \dots, 0 ; \lambda_j, 1, 0, \dots, 0) \in T^*\mathcal{C}^{n+1}$ et vérifiant les quatre propriétés suivantes :

a) $\Pi(\Lambda_j) \cap S = T$ (dans un voisinage de 0)

b) $(0, \dots, 0 ; \lambda_j, 1, 0, \dots, 0) \in \Lambda_j$

c) la restriction de $a_m(x ; \xi)$ à Λ_j est identiquement nulle

d) $\{(x', \xi') / \exists \xi_0, (0, x' ; \xi_0, \xi') \in \Lambda_j\}$ est une lagrangienne holomorphe lisse incluse dans $N(T)$ (voir def. 0.0) et contenant $(0, \dots, 0 ; 1, 0, \dots, 0)$.

Il existe un voisinage conique V_1 de $(0, \dots, 0 ; \lambda_j, 1, 0, \dots, 0)$ telle que toute lagrangienne incluse dans V_1 holomorphe lisse homogène vérifiant ces quatre propriétés coïncide avec Λ_j dans un petit voisinage conique de $(0, \dots, 0 ; \lambda_j, 1, 0, \dots, 0)$. Par ailleurs on peut construire Λ_j de sorte qu'il existe k fonctions $x \rightarrow g_\ell^j(x)$ ($1 \leq \ell \leq k$) définies et holomorphes sur un voisinage ouvert V de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ telles que $g_\ell^j(0, x') = x_\ell$ ($1 \leq \ell \leq k$) et que l'hypersurface $K^j = \Pi(\Lambda_j) \cap V$ soit une queue d'aronde caractéristique définie par l'équation $D(g_1^j, \dots, g_k^j)(x) = 0$ où $D(g_1^j, \dots, g_k^j)$ désigne le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$(0.7)_j \quad z^{k+1} = g_k^j(x) z^{k-1} + \dots + g_2^j(x) z + g_1^j(x).$$

2] Soit \mathcal{A} une hypersurface définie dans un voisinage de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ par une équation C-analytique $f(x_0, x') = 0$ telle que $\mathcal{A} \cap S = T$ (près de 0), $a_m(x ; \xi)$ s'annule sur le conormal de la partie lisse \mathcal{A}_{reg} de \mathcal{A} et que 0 adhère à $S \cap \mathcal{A}_{\text{reg}}$ (c'est le cas si $f(0, x') = D(x_1, \dots, x_k)$). Alors $\exists j \in \{1, \dots, m\}$ tel que \mathcal{A} et $\Pi(\Lambda_j) = K^j$ coïncident dans un petit voisinage de 0. De plus $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ il existe un voisinage ouvert U de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ tel que $N(K^i)$ (voir def. 0.0) et Λ_i coïncident dans $\Pi^{-1}(\sqcup) \simeq T^*\sqcup$. Enfin $(0, \dots, 0 ; \lambda_i, 1, 0, \dots, 0)$ appartient à $N(K^i)$.

Remarque : Le conormal à la queue d'aronde T n'a qu'une seule direction au-dessus de l'origine. Ce fait crucial et l'hypothèse faite sur l'équation (0.5) permettent (par la géométrie symplectique complexe) de construire $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ et donc $K^1 = \Pi(\Lambda_1), \dots, K^m = \Pi(\Lambda_m)$.

L'un des résultats principaux de cet article est le théorème suivant

Théorème 0.2.— (Avec les notations précédentes). Soient $-w$ un entier naturel et U [resp. W] un voisinage ouvert de l'origine dans \mathcal{C}^{n+1} [resp. \mathcal{C}^n]. Alors il existe un voisinage ouvert V inclus dans U de $0 \in \mathcal{C}^{n+1}$ vérifiant $V \cap S \subset W$ et tel que pour

tous opérateurs différentiels linéaires $P_{s,\ell}(x' ; D_{x'})$ d'ordre inférieur ou égal à $s - w$ (où $0 \leq s \leq m - 1$ et $0 \leq \ell \leq k$) à coefficients holomorphes sur W , pour tous opérateurs différentiels linéaires $Q_{j,\ell}(x ; D_x)$ d'ordre inférieur ou égal à $-w + m - 1$ (où $1 \leq j \leq m$ et $0 \leq \ell \leq k$) à coefficients holomorphes sur U , pour tout point $x^0 = (0, x'^0)$ de $S \cap V \setminus T$ et tout germe holomorphe en x'^0 $x' \rightarrow z(x')$ solution de l'équation (0.2), le problème (0.1) défini avec les données de Cauchy suivantes :

$$(0.8) \quad \begin{aligned} u_s(x') &= \sum_{\ell=0}^k P_{s,\ell}(x' ; D_{x'}) (z^\ell(x')) \quad 0 \leq s \leq m - 1 \\ v(x) &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=0}^k Q_{j,\ell}(x ; D_x) (z_j^\ell(x)) \end{aligned}$$

où $z_j(x) = z(g_1^j(x), \dots, g_k^j(x))$ est le germe holomorphe en $x^0 = (0, x'^0)$ solution de l'équation (0.7)_j du théorème 0.1 vérifiant $z_j(0, x') = z(x')$; le problème (0.1) admet pour solution un germe en x^0 holomorphe $u(x)$ qu'on peut prolonger holomorphiquement le long de tout chemin issu de $(0, x'^0)$ tracé dans $V \setminus \bigcup_{j=1}^m K^j$ et ne rencontrant pas les queues d'arondes caractéristiques K^1, \dots, K^m . En outre le germe solution $u(x)$ est de la forme :

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=0}^k R_{j,\ell}(x ; D_x) (z_j^\ell(x))$$

où les $R_{j,\ell}(x ; D_x)$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $-w$ à coefficients holomorphes sur V .

Remarque :

1] Les précisions sur les ordres des opérateurs $P_{s,\ell}, Q_{j,\ell}, R_{j,\ell}$ montrent que le théorème 0.2 précise la nature des singularités de la solution $u(x)$ en fonction des singularités des données.

2] La queue d'aronde T est définie dans un système de coordonnées locales x_1, \dots, x_k . Si (de manière plus intrinsèque) on considère une queue d'aronde $T' \subset S$ de sommet 0 telle que pour tout $(0 ; \xi') \in N(T') \setminus 0$ l'équation $a_m(0, \dots, 0 ; \xi_0, \xi') = 0$ possède m racines simples alors on obtient des résultats analogues aux théorèmes 0.1 et 0.2.

Dans [15] et [16] nous avons étudié divers types de problèmes de Cauchy Ramifié, à chaque fois nous appliquons le programme suivant (voir aussi [17]) composé de quatre points :

1] si $u(x)$ est holomorphe ramifiée autour d'une hypersurface analytique K de \mathcal{C}^{n+1} , les singularités (microlocales) de u vivent dans une lagrangienne complexe de $T^*\mathcal{C}^{n+1}$: le

conormal $N(K)$ de K . Lorsque K est singulière il faut préciser de quel conormal il s'agit et étudier sa géométrie.

2] Le flot hamiltonien Φ du symbole principal $a_m(x; \xi)$ propage les singularités de $u(x)$ suivant des lagrangiennes caractéristiques (les conormaux des hypersurfaces caractéristiques sont invariants sous l'action de Φ).

3] On considère des régions où on a une représentation de $u(x)$ (i.e. une expression explicite du revêtement sur lequel $u(x)$ devient uniforme).

4] On résout l'équation $a(x; D)u(x) = v(x)$ en utilisant les représentations du 3] par la méthode de l'optique géométrique. Le choix des opérateurs d'intégration et des normes (pour établir la convergence des séries) dépend de manière cruciale de la géométrie de la lagrangienne $N(K)$ considérée au point 1].

Maintenant nous allons décrire la structure des preuves des théorèmes 0.1 et 0.2 en indiquant comment nous avons appliqué ce programme. Les détails de ces preuves sont donnés dans [18].

Une étude de la géométrie de la queue d'aronde T permet de voir que $N(T)$ admet une paramétrisation de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -kz^{k+1} + (k-2)x_k z^{k-1} + \dots + x_3 z^2 \\ x_2 = (k+1)z^k - (k-1)x_k z^{k-2} + \dots - 2x_3 z \\ x_3 = x_3 \\ \vdots \\ x_n = x_n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_1 = \lambda & \xi_{k+1} = 0 \\ \xi_2 = z\lambda & \vdots \\ \vdots & \xi_n = 0 \\ \xi_k = z^{k-1}\lambda & \end{array} \right.$$

où $(x_3, \dots, x_n, z, \lambda)$ décrit $\mathcal{C}^{n-2} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}^*$

Par ailleurs nous montrons qu'il existe des polynômes $N_i(x_2, \dots, x_k)$, $2 \leq i \leq k$ tels que $(z, z^2 - N_2(x_2, \dots, x_k), \dots, z^k - N_k(x_2, \dots, x_k))$ soit solution sur un voisinage de l'origine d'un \mathcal{D} -module holonôme dont la variété caractéristique est incluse dans la réunion de $N(T)$ et de la section nulle. $N(T)$ ne possède qu'une seule codirection au-dessus de l'origine : celle conormale à x_1 , il n'y a pas de phénomène d'étalement des singularités pour cette géométrie. Comme le laisse prévoir les points 1] et 4] du programme, l'opérateur de primitivation par rapport à x_1 jouera un rôle clef.

Pour prouver le théorème 0.1 nous construisons la lagrangienne caractéristique Λ_j (conformément au point 2] du programme) en propageant par le flot Φ le lieu caractéristique (pour $a(x ; D)$) constitué de points voisins de $(0, \dots, 0 ; \lambda_j, 1, 0, \dots, 0)$ et de la forme $(0, x' ; \xi_0, \xi')$ où $(x' ; \xi') \in N(T)$. Pour démontrer l'existence des fonctions $g_\ell^j(x)$ vérifiant $g_\ell^j(0, x') = x_\ell$ (ce qui est crucial pour notre objet) nous devons reprendre en les précisant certains résultats d'Arnold (voir [1], [2]) de la théorie des singularités.

Nous montrons que

$$\Pi(\Lambda_j(x_0)) = \{x' / (x_0, x') \in \Pi(\Lambda_j)\}$$

est la projection sur la base d'une legendrienne $\mathcal{L}(x_0)$ de $\{(x_1, \dots, x_n ; p_2, \dots, p_n)\}$ muni de la structure (complexe) de contact standard par la 1-forme $dx_1 - p_2 dx_2 \dots - p_n dx_n$.

Nous montrons qu'on peut paramétrer $\mathcal{L}(x_0)$ à l'aide d'une fonction génératrice $S(x_0, z, x_3, \dots, x_n)$ dépendant du paramètre x_0 . Le fait que $\Pi(\Lambda_j)$ soit une queue d'aronde repose alors sur un théorème qui affirme qu'on peut écrire $S(x_0, z, x_3, \dots, x_n) - zx_2$ sous la forme $Z^{k+1} - X_k Z^{k-1} \dots - X_1$ où Z [resp. $X_\ell, 1 \leq \ell \leq k$] est fonction de $(x_0, z, x_2, \dots, x_n)$ [resp. (x_0, x_2, \dots, x_n)]. La preuve de ce théorème reprend un argument de Martinet [19] (voir aussi [1] page 124) : nous utilisons la versalité infinitésimale du déploiement $S(0, z, x_3, \dots, x_n) - x_2 z - x_1$ de z^{k+1} et le théorème de préparation de Weierstrass. Les queues d'aronde K^j que nous avons construites sont définies sur de "très petits voisinages ouverts de 0", en utilisant les résultats de Hauser [9] on devait pouvoir construire des queues d'aronde K^j définies sur des ouverts beaucoup plus gros. Par ailleurs nous prouvons le 2] du théorème 0.1 (i.e. les K^j sont "essentiellement" les seules hypersurfaces analytiques caractéristiques issues de T) en utilisant des résultats de géométrie analytique locale et le fait que T et le discriminant $D(x_1, \dots, x_k)$ induisent en l'origine des germes irréductibles.

Pour démontrer le théorème 0.2 nous devons - au préalable - étudier la géométrie (qui est à la fois riche et compliquée) de l'algèbre $A = \mathcal{O}_X[z]$ où z est solution de l'équation (0.2) et \mathcal{O}_X désigne l'algèbre des germes $u(x)$ holomorphes en l'origine. Dans le cas simple de l'équation $z^2 = x_1$ les éléments de A qui sont de la forme $\sqrt{x_1}u(x)$ sont singuliers et leur somme suivant les deux racines est nulle. cette remarque nous conduit - dans le cas général - à poser pour $u(x, z) \in A$.

$$\Pi u(x, z) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} u(x, z_i)$$

où z_1, \dots, z_{k+1} désigne la liste des racines de l'équation (0.2), et à introduire l'ensemble φ des éléments u de A vérifiant $\Pi u \equiv 0$. φ et Π possèdent une interprétation géométrique agréable : notons \mathcal{R} le revêtement "uniformisant" la solution z de l'équation (0.2), le groupe σ_{k+1} des automorphismes de \mathcal{R} s'identifie au groupe des permutations d'un ensemble à $k+1$ éléments, pour une fonction holomorphe (uniforme) u sur \mathcal{R} on pose :

$$\Pi u = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{g \in \sigma_{k+1}} u \circ g$$

Si u provient d'un élément de A les deux définitions coïncident. Vu la deuxième définition il est clair que Π commute avec l'action des opérateurs différentiels en x et ainsi : $\Pi u = 0$ (i.e. $u \in \varphi$) entraîne $\partial_{x_j} u \in \varphi$ $1 \leq j \leq n$.

Par ailleurs en utilisant les relations entre coefficients et racines on montre (dans l'esprit des formules de Waring) qu'il existe des polynômes $N_\ell(x_2, \dots, x_k)$ $2 \leq \ell \leq k$ tels que les fonctions $e_1 = z$ et $e_\ell = z^\ell - N_\ell(x_2, \dots, x_k)$ $2 \leq \ell \leq k$ appartiennent à φ (i.e. leur somme suivant les $k+1$ racines de l'équation (0.2) est nulle). Ces fonctions e_1, e_2, \dots, e_k joueront un rôle fondamental dans notre étude.

Cela dit on a une décomposition $A = \mathcal{O}_X \oplus \varphi$ sur laquelle les dérivations ∂_{x_ℓ} opèrent de manière diagonale, de plus φ est un \mathcal{O}_X -module libre de rang k admettant (e_1, e_2, \dots, e_k) pour base. Un théorème montre que tout u de φ possède - dans φ - une unique primitive en x_1 notée $v = D^{-1}u$. De plus si pour $p \in \mathbb{N}$ on pose $A^p = \{u \in A / \partial_x^\alpha u \in A \text{ pour tout } \alpha \text{ de longueur } \leq p\}$ alors on montre que D^{-1} induit une bijection de $A^p \cap \varphi$ sur $A^{p+1} \cap \varphi$.

Conformément à ce que laissent prévoir les points 1] et 4] de notre programme, D^{-1} joue un rôle crucial. Si $h \in \mathbb{N}$ on pose $e_\ell^h = D^{-h}e_\ell$ et $e_\ell^{-h} = \partial_{x_1}^h e_\ell$; pour étudier les primitives itérées e_ℓ^h des e_ℓ ($h \in \mathbb{N}$) il est très commode de travailler avec des matrices et d'introduire la matrice carrée d'ordre k $P(x)$ telle que :

$$\begin{bmatrix} e_1^1 \\ e_2^1 \\ \vdots \\ e_k^1 \end{bmatrix} = P(x) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \end{bmatrix}$$

Une récurrence facile sur $h \in \mathbb{N}$ montre que

$$\begin{bmatrix} e_1^{h+1} \\ \vdots \\ e_k^{h+1} \end{bmatrix} = (Id + h\partial_{x_1}P)^{-1}P \begin{bmatrix} e_1^h \\ \vdots \\ e_k^h \end{bmatrix}$$

On peut alors facilement obtenir des majorations du type

$$|e_\ell^h| \leq \frac{C^{h+1}}{h!} r^h \text{ pour } |x| < r$$

Des théorèmes montrent alors qu'on peut décomposer chaque terme du type $\partial_x^\alpha e_\ell^{h+|\alpha|}$: suivant les e_i^{h+q} où $1 \leq i \leq k$ et $0 \leq q \leq |\alpha|$. On peut alors énoncer (et prouver) un théorème qui affirme que si $c(x ; D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre m caractéristique pour la queue d'aronde T alors les $c(x ; D_x)e_\ell^{m-1}$ s'expriment en fonction des e_1, e_2, \dots, e_k (et non pas de leurs dérivées). Ce théorème permet en outre de prouver que

sur un voisinage de 0, (e_1, e_2, \dots, e_k) est solution d'un \mathcal{D} -module holonome dont la variété caractéristique est incluse dans la réunion de $N(T)$ et de la section nulle.

On se ramène à une situation où les données de Cauchy et le second membre $v(x)$ du problème (0.1) admettent des représentations (cf. point 3] de notre programme) du type $(0 \leq s \leq m-1)$ suivant :

$$u_s(x') = \sum_{\ell=1}^k \sum_{h \geq w-m+1-s} u_{s,\ell}^h(x') e_\ell^{h+m-1}(x_1, \dots, x_k)$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^k \sum_{h \geq w+1-m} v_{j,\ell}^{h-m+1}(x) e_\ell^h(G_j(x))$$

où on a posé $G_j(x) = (g_1^j(x), \dots, g_k^j(x))$. Rappelons que dans le théorème 0.2 les opérateurs différentiels $P_{s,\ell}$ [resp. $Q_{j,\ell}$] avec lesquels on définit $u_s(x')$ [resp. $v(x)$] sont d'ordre $\leq -w+s$ [resp. $\leq -w+m-1$].

On définit - à l'aide de fonctions majorantes convenables - les espaces de Banach dans lesquels vivent les séries permettant de définir $v(x)$ et les $u_s(x')$.

Pour prouver le théorème 0.2, nous recherchons la solution $u(x)$ du problème (0.1) sous la forme :

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^k \sum_{h \geq w-m+1} b_{j,\ell}^h(x) e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))$$

Conformément au point 4] de notre programme nous construisons $u(x)$ par la méthode de l'optique géométrique. Le fait que la queue d'aronde K^j soit caractéristique pour l'opérateur $a(x; D)$ d'ordre m montre qu'on peut exprimer $a(x; D)[b_{j,\ell}^h(x) e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))]$ en fonction des $e_i^h(G_j(x)) (1 \leq i \leq k)$.

L'hypothèse "à caractéristiques simples" faite sur l'équation (0.5) montre que dans l'expression obtenue en développant $a(x; D)[b_{j,\ell}^h(x) e_\ell^{h+m-1}(G_j(x))]$ le coefficient de $\partial_{x_0} b_{j,\ell}^h(x) \times e_\ell^h(G_j(x))$ n'est pas nul pour $x = 0$.

On met alors en place un processus formel de résolution par la méthode de l'optique géométrique où $\partial_{x_0} b_{j,\ell}^h$ joue le rôle de terme pivot. Par ailleurs on ramène l'étude des données de Cauchy du problème (0.1) à l'étude d'une formule linéaire récurrente exprimant $b_{j,\ell}^h(0, x')$ après avoir inversé la matrice de Vandermonde définie par $\lambda_1, \dots, \lambda_m$; un procédé analogue a été utilisé par Wagschal dans [25]. On montre alors que le théorème 0.2 est conséquence d'un théorème qui établit l'existence - dans un espace de séries du type $\sum b_{j,\ell}^h e_\ell^{h+m-1}$ - d'une solution d'un gros système d'équations. Notre démonstration est effective : elle fournit un algorithme pour calculer de proche en proche les $b_{j,\ell}^h$.

Nous pensons (et espérons) que les méthodes développées dans [18] - notamment l'étude géométrique de $\mathcal{O}_X[z]$ - peuvent être utilisées pour construire des solutions ramifiées de certaines équations aux dérivées partielles venant de la physique (Euler, par exemple). A titre de motivation nous montrons dans [18] qu'il se produit pour l'équation de Burger un phénomène d'éclatement des singularités (typiquement non-linéaire) faisant apparaître des solutions algébriques ramifiées du type précédent.

Dans la théorie des singularités la queue d'aronde est appelée singularité (stable) de type A_k (voir [1], [2]). Il serait intéressant de généraliser les résultats de cet article aux singularités de type D_k ou E_k qui (elles aussi) sont stables.

Enfin il semble très probable que l'on puisse étendre les théorèmes 0.1 et 0.2 au cas d'un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité constantes, toutefois la solution $u(x)$ aura une structure beaucoup plus compliquée : elle ne sera plus (en général) à croissance lente et il faudra remplacer les opérateurs $R_{j,\ell}(x ; D_x)$ du théorème 0.2 par une somme "infinie" d'opérateurs différentiels.

Bibliographie

- [1] V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé *Singularités des applications différentiables*, tome 1 Editions Mir, Moscou.
- [2] D. Bennequin *Caustique mystique* Séminaire Bourbaki, Astérisque 133-134 (1986).
- [3] A. D'Agnolo, P. Schapira Problème de Cauchy ramifié dans le cadre de la théorie des faisceaux, à paraître.
- [4] R. et A. Douady *Algèbres et théories galoisiennes II* (Cedic/Fernand Nathan).
- [5] J. Frisch *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques*, Inventiones Math., 4, 2 (1967) page 118-138.
- [6] P. Griffiths, J. Harris *principes of algebraic geometry* (Pure and Applied Maths, Wiley-Interscience).
- [7] R. Gunning, H. Rossi *Analytic Functions of Several Complex Variables* (Prentice-Hall, INC).
- [8] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle* (J. Math. pures et appl. 1976).
- [9] H. Hauser *La construction de la déformation semi-universelle d'un germe de variété analytique complexe* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^o série, tome 18, 1985, p. 1 à 56.
- [10] L. Hörmander *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer.
- [11] C. Houzel *Géométrie analytique locale, I* Séminaire Henri Cartan 13^e année, 1960/61, n^o18.
- [12] M. Kashiwara, S. Schapira *Sheaves on manifolds*, (Springer Verlag).
- [13] L. Kaup, B. Kaup *Holomorphic Functions of Several Variables* (de Gruyter Studies in mathematics).
- [14] E. Leichtnam *Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires* ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^{ème} série, tome 20, 1987, p. 137-170.

- [15] E. Leichtnam *Le problème de Cauchy ramifié* ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^{ème} série, tome 23, 1990, p. 369-443.
- [16] E. Leichtnam *Le problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux* ; Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^{ème} série, tome 24, 1991, p. 189-214.
- [17] E. Leichtnam *Thèse d'habilitation à diriger des recherches* (Université Paris-Sud, 1990).
- [18] E. Leichtnam *Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques* à paraître.
- [19] J. Martinet *deploiements versels des applications différentiables et classifications des applications stables* Lecture Notes in Math. 535 p. 1-44, springer, berlin, 1976.
- [20] Z. Mebkhout *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les \mathcal{D}_X -modules cohérents* (travaux en cours, Editions Hermann).
- [21] R. Narashiman *introduction to the theory of analytic spaces* Lecture Notes in Math. 25 Heidelberg : Springer Verlag 1966.
- [22] Shatalov B. Sternin *On the solvability of the first cousin problem for a class of multivalued analytic functions* Math. USSR Izvestiga Vol 35 (1990) n° 2.
- [23] B. Teissier *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, Proceedings Real and complex singularities, Oslo 1976.
- [24] C. Wagschal *Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes* (J. Math. Pures et Appl., tome 53, 1974 p. 99).
- [25] C. Wagschal *Sur le problème de Cauchy ramifié* (J. Math. Pures et Appl., tome 53, 1974, p. 174-164).

Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05