

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SYLVIA DOBYNSKY

YVES MEYER

## **Lemme div-curl et renormalisation**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1991-1992), exp. n° 2, p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1991-1992\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992__A2_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Tél. 601.596 F

Séminaire 1991-1992

---

## EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

### LEMME DIV-CURL ET RENORMALISATION

Sylvia DOBYINSKY et Yves MEYER



## 1. Introduction.

L'énoncé suivant est dû à P.L. Lions et est démontré dans [ ]

**Théorème 1.**— Soient  $E(x) = (E_1(x), \dots, E_n(x))$ ,  $B(x) = (B_1(x), \dots, B_n(x))$  deux champs de vecteurs vérifiant les propriétés suivantes

$$(1.1) \quad E_j(x) \in L^p(\mathbf{R}^n) \text{ pour } 1 \leq j \leq n$$

$$(1.2) \quad B_j(x) \in L^q(\mathbf{R}^n) \text{ pour } 1 \leq j \leq n$$

$$(1.3) \quad 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1$$

$$(1.4) \quad \operatorname{div} E(x) = 0, \text{ au sens des distributions}$$

$$(1.5) \quad \operatorname{rot} B(x) = 0, \text{ au sens des distributions.}$$

Alors le produit scalaire  $E(x) \cdot B(x)$  appartient à l'espace  $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$  de Stein et Weiss.

Nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration de ce résultat. Cette nouvelle démonstration est basée sur l'opération de **renormalisation du produit**.

Pour simplifier l'exposition, nous commencerons par supposer que  $u(x)$  et  $v(x)$  sont deux fonctions scalaires, appartenant respectivement à  $L^p(\mathbf{R}^n)$  et à  $L^q(\mathbf{R}^n)$ . On notera  $uv$  le produit ponctuel usuel entre ces fonctions. Un **opérateur de renormalisation**  $R$  est un **opérateur bilinéaire et symétrique**  $R : L^p \times L^q \rightarrow \mathcal{H}^1$  tel que l'on ait, pour tout couple  $(u, v) \in L^p \times L^q$ ,

$$(1.6) \quad uv = P(u, v) + R(u, v)$$

où  $P(u, v)$  est le **plus petit possible**, au sens que  $v \mapsto P(u, v)$  est un opérateur compact dès que  $u$  appartient à la classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ .

En d'autres termes, le produit entre une fonction régulière et une fonction de  $L^q(\mathbf{R}^n)$  n'a pas besoin d'être renormalisé et  $P(u, v)$  est donc "négligeable" si  $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ .

L'opérateur bilinéaire de renormalisation  $R(u, v)$  possèdera d'autres propriétés intéressantes. Désignons par  $u_j$  et  $v_j$ ,  $j \geq 1$ , deux suites respectivement bornées dans  $L^p$  et  $L^q$  et supposons que  $u_j \rightarrow u$ ,  $v_j \rightarrow v$  ( $j \rightarrow +\infty$ ) où  $\rightarrow$  désigne la convergence au sens des distributions. Alors on aura  $R(u_j, v_j) \rightarrow R(u, v)$  ( $j \rightarrow +\infty$ ). Enfin le terme  $R(u, v)$  aura un sens dans des situations où ni  $uv$ , ni  $P(u, v)$  n'ont de signification. Si, par exemple,  $u \in L^p$ ,  $v \in L^q$  mais cette fois  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} > 1$ , on aura cependant  $R(u, v) \in \mathcal{H}^r$  (qui est maintenant un espace de distributions puisque  $0 < r < 1$ ). La définition de l'espace  $\mathcal{H}^r$  de Stein et Weiss se trouve dans [4].

L'opération de renormalisation consiste donc, dans ce dernier cas, à soustraire du produit  $uv$  une partie infinie  $P(u, v)$  de façon à obtenir le produit renormalisé oscillant  $R(u, v)$ . On voit l'analogie avec les parties finies de Hademard.

## 2. La construction de l'opérateur $R$ .

Tous les opérateurs bilinéaires  $T$  que nous allons construire ressembleront au produit ponctuel usuel au sens suivant. On demande que si  $\tau_x$  est l'opérateur de translation par  $x \in \mathbf{R}^n$ , on ait

$$(2.1) \quad T(f, g) = h \implies T(\tau_x f, \tau_x g) = \tau_x h .$$

Alors  $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \mapsto \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  est donné par

$$(2.2) \quad T(f, g)(x) = (2\pi)^{-2n} \int \int e^{i(\xi+\eta) \cdot x} \tau(\xi, \eta) \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) d\xi d\eta .$$

Nous supposerons dans tout ce qui suit que  $\tau(\xi, \eta) \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$  et cette condition est nécessaire si l'on veut que  $T$  se prolonge en un opérateur linéaire continu de  $L^2 \times L^2$  à valeurs dans  $L^1$ . Cette condition n'est évidemment pas suffisante, comme le montre le contre-exemple  $\tau(\xi, \eta) = m(\xi + \eta)$  où  $m(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}$ . La fonction  $\tau$  sera appelée le symbole de  $T$  et nous supposerons une fois pour toutes que

$$(2.3) \quad \tau(\xi, \eta) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0, 0\})$$

et

$$(2.4) \quad \tau(\lambda\xi, \lambda\eta) = \tau(\xi, \eta) \quad \text{pour tout } \lambda > 0 .$$

Alors on montre [1] que  $T$  est borné de  $L^2 \times L^2$  dans  $L^1$ . On aura besoin des deux énoncés précisant cette remarque

**Lemme 1.**— *Si outre (2.3) et (2.4), nous supposons  $\tau(\xi, -\xi) = 0$  pour tout  $\xi \in \mathbf{R}^n, \xi \neq 0$ , alors  $T$  est borné de  $L^p \times L^q$  dans  $\mathcal{H}^1$  si  $1/p + 1/q = 1$ ,  $1 < p < \infty$ .*

**Lemme 2.**— *Si les hypothèses du lemme 1 sont satisfaites et si l'on a, en outre,  $\tau(\xi, 0) = 0$  pour tout  $\xi \neq 0$  et  $\tau(0, \eta) = 0$  pour tout  $\eta \neq 0$ , alors  $T$  est borné de  $L^p \times L^q$  dans l'espace de Besov homogène  $\dot{B}_1^{0,1}(\mathbf{R}^n)$ .*

Une dernière observation essentielle est le fait que (2.1) implique la formule de Leibniz. A savoir, si  $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ,

$$(2.5) \quad \partial_j T(f, g) = T(\partial_j f, g) + T(f, \partial_j g) .$$

Pour clore cette section, indiquons la définition de  $P$  et  $R$  (opérateurs de renormalisation).

L'opérateur bilinéaire  $P$  est construit à l'aide d'un symbole  $\pi(\xi, \eta)$ , vérifiant (2.3) et (2.4) et tel que

$$(2.6) \quad \pi(\xi, \eta) = 1 \quad \text{si} \quad |\xi + \eta| \leq \frac{1}{10} (|\xi| + |\eta|)$$

$$(2.7) \quad \pi(\xi, \eta) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi + \eta| \geq \frac{1}{5}(|\xi| + |\eta|)$$

Il est clair qu'il est possible de construire une telle fonction  $\pi$  car sur la sphère unité de  $\mathbf{R}^{2n}$ , les compacts définis par  $|\xi + \eta| \leq \frac{1}{10}(|\xi| + |\eta|)$  et  $|\xi + \eta| \geq \frac{1}{5}(|\xi| + |\eta|)$  sont disjoints. On demandera également que  $\pi(\xi, \eta) = \pi(\eta, \xi)$ . Alors  $R$  est défini par un symbole bilinéaire  $\rho(\xi, \eta)$  et l'on a  $\rho = 1 - \pi$ . Donc  $\rho(\xi, -\xi) = 0$  si  $\xi \neq 0$  et  $R$  est borné de  $L^p \times L^q$  dans  $\mathcal{H}^1$  si  $1 < p < \infty$ ,  $1/p + 1/q = 1$ . Par ailleurs, changer le choix de  $\pi$  revient à ajouter à  $\rho$  un symbole vérifiant les conditions du lemme 2. C'est à dire que le résultat  $R(f, g)$  sera le même, modulo une fonction de  $\dot{B}_1^{0,1}$ .

**Si l'on raisonne modulo  $\dot{B}_1^{0,1}$ , tous les opérateurs de renormalisation que nous venons de construire sont équivalents.**

### 3. La preuve du lemme du div-curl.

On écrit chaque produit ponctuel  $E_j B_j$  sous la forme

$$(3.1) \quad E_j B_j = P(E_j, B_j) + R(E_j, B_j)$$

et l'on sait déjà que chaque terme  $R(E_j, B_j)$  appartient à  $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$ .

Il suffit donc de démontrer que  $P(E_1, B_1) + \dots + P(E_n, B_n) \in \mathcal{H}^1$ . Or on a mieux, à savoir

$$(3.2) \quad P(E_1, B_1) + \dots + P(E_n, B_n) = \sigma(x) \in \dot{B}_1^{0,1}.$$

Pour le démontrer, on observe que  $B_1 = \partial_1 V, \dots, B_n = \partial_n V$  où  $V$  vérifie  $\Lambda V \in L^q$  lorsque  $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$  (opérateur de Calderón).

Alors  $\sigma(x) = \partial_1 P(E_1, V) + \dots, \partial_n P(E_n, V)$  comme on le voit en appliquant la règle de Leibniz et en utilisant le fait que  $\text{div } E = 0$ .

Finalement le lemme 2 s'applique à chacun des opérateurs bilinéaires  $T_j(u, v) = \partial_j P(u_j, V)$ ,  $v = \Lambda V$ . En effet, le symbole de  $T_j$  est  $i(\xi_j + \eta_j)|\eta|^{-1}\pi(\xi, \eta) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0, 0\})$ . Ce symbole vérifie évidemment les hypothèses du lemme 2.

#### 4. Liens avec le paraproduit de J.M. Bony.

En revenant à (1.6), il est facile de vérifier que  $R(u, v)$  est, modulo une fonction de  $\dot{B}_1^{0,1}$  la somme du paraproduit de  $u$  par  $v$  et du paraproduit de  $v$  par  $u$ . On sait que l'opérateur bilinéaire définissant le paraproduit se prolonge au cas où  $u$  et  $v$  sont deux distributions tempérées. Ici nous avons privilégié la situation homogène où les fréquences tendant vers 0 sont traitées avec le même soin que les fréquences tendant vers l'infini ("infrared cutoff and ultraviolet cutoff").

#### Références

- [1] R. Coifman et Y. Meyer "Au delà..." Astérisque 57, SMF (1978)
- [2] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer and S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, à paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées
- [3] S. Dobyinsky, Thèse, CEREMADE (1992)
- [4] Ch. Fefferman and E. Stein, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

CEREMADE

Université Paris-Dauphine

Place du Mal de Lattre de Tassigny

75775 Paris cedex 16