Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J.-Y. Chemin

Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander (d'après un travail avec J.-M. Bony)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. nº 23, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A23_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

ESPACES FONCTIONNELS ASSOCIES AU CALCUL DE WEYL-HÖRMANDER

(D'après un travail avec J.-M. BONY)

J.-Y. CHEMIN

Exposé n° XXIII

17 Décembre 1991

Introduction

La quantification de Weyl permet d'associer un opérateur a^w agissant dans $\mathbf{R}^n$ à une fonction a, le symbole de a^w, définie sur l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}$. Pour des symboles appartenant aux classes très générales $S(M,g)$ introduites par Hörmander — classes associées à une métrique g et à un poids M sur l'espace des phases — les opérateurs correspondants jouissent de bonnes propriétés, de composition notamment, et on dispose d'un calcul symbolique très efficace décrit dans la section 18.5 de [Hö].

L'objet principal de cet article est d'associer aux mêmes données M et g des espaces de distributions $H(M,g)$ dans $\mathbf{R}^n$, dits 'espaces de Sobolev', dont les propriétés généralisent celles des espaces de Sobolev classiques : ces espaces sont hilbertiens et forment une famille stable par interpolation, les opérateurs pseudo-différentiels de poids M appliquent $H(M_1,g)$ dans $H(M/M_1,g)$, une distribution tempérée u appartient à $H(M,g)$ si et seulement si $a^w u \in L^2 = H(1,g)$ pour tous les symboles $b \in S(M,g)$ ou bien s'il existe $b \in S(M^{-1},g)$ et $v \in L^2$ tels que $u = b^w v$.

Ceci nous amènera à l'étude de trois problèmes ayant leur intérêt propre. Le premier est une caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels A de poids M ne faisant intervenir que le caractère borné sur L^2 de commutateurs localisés de A. Le deuxième est l'existence, pour chaque M, d'un groupe à un paramètres $(M_t)_{t\in\mathbf{R}}$ d'opérateurs pseudo-différentiels inversibles de poids M^t. Le troisième est l'appartenance à $S(1,g)$ de $(a^w)^{-1}$ lorsque a^w est inversible de L^2 dans L^2.

Plusieurs travaux ont été déjà consacrés à ces problèmes. A. Unterberger [Un], F. Bruyant [Br] et N. Lerner [Le] ont considéré le cas d'une métrique g symplectique (c'est-à-dire telle que $g = g^\sigma$, voir (4)), vérifiant en outre une propriété très voisine de la 'tempérance forte' que nous introduisons dans la section 4. Ces auteurs obtiennent alors, par des méthodes exploitant systématiquement le caractère symplectique de la métrique, toutes les propriétés que nous démontrons dans cet article.

Un article de R. Beals [Be] considère le cas de métriques 'presque' générales (la condition de tempérance de Hörmander est toutefois légèrement renforcée). Malheureusement, un des arguments de sa démonstration (le lemme 4.6) est incorrect, ce qui laisse une lacune dans la preuve d'une grande partie des résultats. Cela dit, ses démonstrations fournissent les résultats fondamentaux dans le cas symplectique. D'autre part, plusieurs idées sont très ingénieuses et, à plusieurs reprises, nous les reprendrons ou nous en inspirerons plus ou moins directement.

L'article est organisé de la façon suivante. La première section est consacrée aux rappels sur le calcul de Weyl-Hörmander : quantification de Weyl, opération # de composition des symboles, hypothèses faites sur la métrique et les poids, classes de symboles, ... Le concept de confinement des symboles, introduit dans [B&L], jouera un rôle crucial dans la suite de l'article. Nous définissons les espaces de symboles confinés dans une boule de la métrique g. Plus grands que les espaces de symboles à support dans la boule, ils jouissent de bien meilleures propriétés de stabilité par composition. Ils permettent de faire une étude aussi locale que possible dans l'espace des phases, compte tenu du principe d'incertitude.

Nous renvoyons le lecteur à [B&L] pour les démonstrations. Nous attirons l'attention du lecteur sur l'importance des arguments d'uniformité (par rapport à la boule et même par rapport à la métrique) dans la suite, ce qui exige de préciser avec soin de quelles quantités les 'constantes' (ne) dépendent (pas).

Dans la section 2, nous démontrons qu'un symbole a confiné dans une boule peut se décomposer en une série rapidement convergente $a = \sum b_\nu \# c_\nu$ de produits de symboles confinés dans une boule homothétique (avec bien entendu un contrôle uniforme des semi-normes). Ce résultat jouera un rôle essentiel par la suite, en permettant notamment d'écrire le symbole 1 comme une intégrale, Y parcourant l'espace des phases, de (sommes de) produits $\psi_{Y,\nu} \# \theta_{Y,\nu}$ de symboles confinés dans des boules centrées en Y.

Ceci nous permet alors de définir les espaces de Sobolev d'une manière qui rappelle la caractérisation classique des espaces H^s en théorie de Littlewood-Paley : une distribution tempérée u appartient à $H(M,g)$ si une intégrale à poids des $\|\theta_{Y,\nu} u\|_{L^2}^2$ est finie.

Nous démontrons ensuite que la définition ne dépend pas du choix de la décomposition de l'identité, que $H(1,g) = L^2$ et que les opérateurs pseudo-différentiels de poids M appliquent $H(M_1,g)$ dans $H(M_1/M,g)$. Nous obtenons également un résultat d'inclusion des espaces $H(M)$ dans des espaces L^p à poids qui généralise les théorèmes d'inclusion de Sobolev.

Dans la section 3, nous caractérisons les opérateurs A de la forme a^w avec $a \in S(M,g)$ par la propriété suivante : les opérateurs localisés $\theta_{Y,\nu}^w \circ A$, ainsi que leurs commutateurs itérés avec les opérateurs dont le symbole est linéaire, sont bornés sur L^2 avec une norme convenablement majorée en fonction de Y. D'apparence plus compliquée que la caractérisation classique des opérateurs des classes $S^m_{\rho,0}$, la propriété ci-dessus s'avérera en fait très maniable. Grâce à la souplesse de la notion de confinement, la démonstration se ramène à une relecture, avec contrôle des constantes, de la démonstration de R. Beals relative à la classe $S^0_{0,0}$.

Dans la section 4, nous abordons le problème des opérateurs inversibles. La définition classique des espaces de Sobolev H^s fait appel aux opérateurs $(I-\Delta)^{s/2}$. Le résultat principal relatif à ce problème est l'existence, pour tout poids M, d'un groupe à un paramètre $t \mapsto b_t$ avec $b_t \in S(M^t,g)$. Ces groupes sont obtenus en résolvant l'équation différentielle $db_t/dt = \alpha \# b_t$ où α est un symbole 'comparable' à $\log M$ et la caractérisation de la section précédente joue un rôle essentiel. Cela implique notamment l'existence de $a \in S(M,g)$ et $a' \in S(M^{-1},g)$ avec $a\#a' = a'\#a = 1$. On en déduit alors très facilement le théorème suivant :

Théorème 0.1

(a) *Soient M un poids admissible et $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $u \in H(M)$.

(ii) *Pour tout $a \in S(M,g)$, on a $a^w u \in L^2$.*

(iii) *Il existe $a' \in S(M^{-1})$ et $v \in L^2$ tels que $u = a'^w v$*

(b) *L'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $H(M)$.*

(c) *Le dual de $H(M)$ s'identifie naturellement à $H(M)^{-1}$.*

Enfin, on cherche à savoir si un opérateur pseudo-différentiel inversible en tant qu'opérateur entre espaces de Sobolev est inversible dans l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels? Nous ne savons pas répondre en général à cette question, mais nous introduisons une condition portant sur la métrique qui garantit une réponse positive. Cette condition, plus forte que la tempérance, est notamment vérifiée dans le cas des métriques de type (ρ, δ).

Les détails des démonstrations sont très fréquemment omis. Le lecteur intéressé pourra consulter [B&C].

1 Rappel sur le calcul de Weyl-Hörmander

La quantification de Weyl associe un opérateur a^w à une fonction $a(X)$, définie sur l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}_X = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi$, par la formule

$$a^w u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y)\, dy\, d\xi/(2\pi)^n \ . \tag{1}$$

On note $[X,Y] = y\cdot\xi - x\cdot\eta$ la forme symplectique, et $\#$ l'opération de composition des symboles, définie par $(a\#b)^w = a^w \circ b^w$. On a

$$a\#b(X) = \pi^{-2n} \iint e^{-2i[X-Y_1, X-Y_2]} a(Y_1) b(Y_2)\, dY_1\, dY_2 \ . \tag{2}$$

Une *métrique de Hörmander* g est la donnée, pour chaque $X \in \mathbf{R}^{2n}$, d'une forme quadratique définie positive $g_X(\cdot)$ dépendant mesurablement de X et vérifiant les trois hypothèses ci-dessous.

Lenteur. Il existe $\overline{C} > 0$ tel que l'on ait

$$g_X(X-Y) \le \overline{C}^{-1} \Rightarrow \Big(g_Y(\cdot)/g_X(\cdot)\Big)^{\pm 1} \le \overline{C} \ . \tag{3}$$

Principe d'incertitude. On a $g_X(\cdot) \le g^\sigma_X(\cdot)$, où la métrique g^σ est définie par

$$g^\sigma_X(T) = \sup_{W \neq 0} \frac{[T,W]^2}{g_X(W)} \ . \tag{4}$$

Tempérance. Il existe $\overline{C} > 0$ et $\overline{N} \in \mathbf{N}$ tels que l'on ait

$$\Big(g_Y(\cdot)/g_X(\cdot)\Big)^{\pm 1} \le \overline{C}\Big(1 + g^\sigma_Y(Y-X)\Big)^{\overline{N}} \ . \tag{5}$$

Un *poids admissible* pour g est une fonction M strictement positive définie sur $\mathbf{R}^{2n}$ vérifiant, pour $\widetilde{C}$ et $\widetilde{N}$ convenables,

$$\Big(M(Y)/M(X)\Big)^{\pm 1} \ \le \ \widetilde{C} \quad \text{pour} \quad g_X(X-Y) \le 1/\overline{C} \ , \tag{6}$$

$$\Big(M(Y)/M(X)\Big)^{\pm 1} \ \le \ \widetilde{C}\Big(1 + g^\sigma_Y(Y-X)\Big)^{\widetilde{N}} \ . \tag{7}$$

Nous pouvons maintenant définir les *classes de symboles* $S(M,g)$ associées à une métrique de Hörmander et à un poids admissible. Une fonction $a(X)$ appartient à $S(M,g)$ si a est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{2n}$ et si les semi-normes suivantes sont finies,

$$\|a\|_{k\,;S(M,g)} = \sup_{\substack{l\leq k;\, X\in\mathbf{R}^{2n}\\ g_X(T_j)\leq 1}} |\partial_{T_1}\dots\partial_{T_l}a(X)| \big/ M(X) ,$$

en notant ∂_T la dérivée directionnelle $a \mapsto \langle da, T\rangle$.

Les hypothèses précédentes garantissent que, pour $a \in S(M,g)$, l'opérateur a^w est borné de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même, de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même et, si $M = 1$, de L^2 dans lui-même. En outre, l'adjoint formel de a^w est $\overline{a}^w$ et les classes $S(M,g)$ forment une algèbre graduée (par le groupe multiplicatif des poids M) pour l'opération $\#$. La remarque 1.8 ci-dessous précisera le caractère uniforme de ces résultats.

Nous rappelons maintenant le concept de confinement et ses propriétés fondamentales pour lesquelles nous renvoyons aux quatre premières sections de [B&L]. La métrique de Hörmander g étant fixée, on note $U_{Y,r}$ la boule $\{X \mid g_Y(Y-X) \leq r^2\}$. On supposera toujours $r^2 < \overline{C}^{-1}$, où $\overline{C}$ est la constante de lenteur figurant dans (3).

Définition 1.1 *L'espace des symboles confinés dans $U_{Y,r}$, noté* $\mathrm{Conf}(g,Y,r)$ *(ou* $\mathrm{Conf}(Y)$ *lorsque le contexte est clair) est l'espace* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ *muni de la famille de semi-normes suivantes*

$$\|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} = \inf\left\{C \;\middle|\; |\partial_{T_1}\dots\partial_{T_l}a(X)| \leq C\,(1+g_Y^\sigma(X-U_{Y,r}))^{-k/2}\right\} ,$$

où les vecteurs T_j vérifient $g_Y(T_j)\leq 1$ et où on a $l \leq k$.

Une famille de symboles $(a_{Y,\lambda})$, indexée par Y et (éventuellement) par un autre paramètre λ, sera dite *uniformément confinée* dans les $U_{Y,r}$ si les $\|a_{Y,\lambda}\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}$ sont majorées par des constantes C_k indépendantes de Y et de λ.

Par exemple, une famille de symboles (a_Y) à support dans $U_{Y,r}$ qui est bornée dans $S(1,g)$ est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$.

1.2 *Décomposition intégrale des symboles*

Nous rappelons l'existence de *g-partitions de l'unité* ([B&L] théorème 3.1.3). Il s'agit d'une famille bornée dans $S(1,g)$ de fonctions φ_Y à support dans $U_{Y,r}$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} \varphi_Y\, |g_Y|^{1/2}\, dY = 1 , \tag{8}$$

en notant $|g_Y|$ le déterminant de la forme quadratique g_Y.

En posant $a_Y = M(Y)^{-1}a\varphi_Y$, pour $a \in S(M,g)$, on peut ainsi écrire a comme une intégrale

$$a(X) = \int M(Y)a_Y(X)\, |g_Y|^{1/2}\, dY \tag{9}$$

où les a_Y soient uniformément confinés. Plus précisément, on a

$$\forall k,\ \exists C,\ \forall Y, \qquad \|a_Y\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq C\, \|a\|_{k\,;S(M,g)} . \tag{10}$$

Réciproquement, si a_Y est une famille de symboles uniformément confinée, l'intégrale (9) est convergente et définit un élément de $S(M,g)$. On a en outre

$$\forall k,\ \exists C,\ \exists l \qquad \|a\|_{k\,;S(M,g)} \leq C \sup_Y \|a_Y\|_{l\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} . \tag{11}$$

1.3 *La fonction Δ_r*

Nous noterons $\Delta_r(X,Y)$ la quantité suivante, qui exprime l'éloignement (pour g^σ) de deux g-boules,

$$\Delta_r(X,Y) = 1 + \sup\{g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r})\ ,\ g_Y^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r})\}\ .$$

en posant

$$g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}) = \inf\{g_X^\sigma(X' - Y')\ |\ X' \in U_{X,r}\ ,\ Y' \in U_{Y,r}\}\ .$$

Une conséquence facile de la tempérance est que Δ_r est logarithmiquement équivalente à la quantité obtenue en remplaçant sup par inf dans sa définition : il existe C et N tels que l'on ait

$$\Delta_r(X,Y) \leq C\,(1 + \inf\{g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r})\ ,\ g_Y^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r})\})^N\ . \tag{12}$$

La métrique étant définie sur tout $\mathbf{R}^{2n}$, la fonction Δ_r est aussi logarithmiquement équivalente à la fonction $\delta_r(X,Y)$ introduite dans [B&L] (voir les formules (3.1.11) et (3.2.3) ainsi que la remarque 3.1.2), si bien que l'on a

$$\exists C,\ \exists N,\ \forall X, \qquad \int_{\mathbf{R}^{2n}} \Delta_r(X,Y)^{-N}\,|g_Y|^{1/2}\,dY \leq C\ . \tag{13}$$

Remarque **1.4** Il résulte de la lenteur et de la tempérance que l'on peut remplacer $(1 + g_Y^\sigma(Y - X))$ par $\Delta_r(X,Y)$, quitte à modifier les constantes, dans les membres de droite de (5) et de (7).

1.5 *Estimations de composition*

L'intérêt principal du concept de confinement est sa stabilité par composition, 'avec gain de Δ_r ', exprimée par le théorème suivant (voir [B&L], théorème 3.2.1).

Théorème 1.6 (de biconfinement) *On a l'estimation suivante, où a et b sont des éléments quelconques de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$,*

$$\forall k,\ \forall N,\ \exists l,\ \exists C, \qquad \|a\#b\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq C\,\|a\|_{l\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}\,\|b\|_{l\,;\mathrm{Conf}(g,Z,r)}\,\Delta_r(Y,Z)^{-N}\ . \tag{14}$$

En particulier, si (a_Y) et (b_Y) sont deux familles de symboles uniformément confinées dans les $U_{Y,r}$, pour chaque entier N, la famille des $\Delta_r(Y,Z)^N a_Y \# b_Z$ est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ et dans les $U_{Z,r}$.

On a également les estimations suivantes sur le composé d'un élément de $S(M,g)$ avec un symbole confiné ou avec un élément de $S(M',g)$ (voir le théorème 4.2.2 (c) et la remarque 4.2.6 de [B&L]).

$$\forall k,\ \exists C,\ \exists l, \qquad \|a\#b\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq CM(Y)\,\|a\|_{l\,;S(M,g)}\,\|b\|_{l\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \tag{15}$$

$$\forall k,\ \exists C,\ \exists l, \qquad \|a\#b\|_{k\,;S(MM',g)} \leq C\,\|a\|_{l\,;S(M,g)}\,\|b\|_{l\,;S(M',g)}\ . \tag{16}$$

1.7 *Estimations L^2*

Nous utiliserons enfin les propriétés suivantes (voir [B&L] Proposition 2.4.1 et Théorème 4.2.2 (b))

$$\exists C,\ \exists k, \qquad \|a^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C\,\|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}\ , \tag{17}$$

$$\exists C,\ \exists k, \qquad \|a^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C\,\|a\|_{k\,;S(1,g)}\ . \tag{18}$$

1.8 Remarque importante

Les constantes intervenant dans (12), (13), (14), (17) et (18) ne dépendent de g que par l'intermédiaire des constantes $\overline{C}$ et $\overline{N}$ de (3) et (5). Cela résulte directement des énoncés de [B&L] où leurs expressions sont explicitées.

En particulier, pour la famille des métriques constantes (c'est-à-dire telles que les g_X ne dépendent pas de X), on a $\overline{C} = \overline{N} = 1$, et les constantes peuvent être choisies indépendamment de g.

De même, les constantes intervenant dans (10) (à condition de choisir la partition de l'unité définie par le procédé systématique du théorème 3.1.3 de [B&L]), dans (11), (15) et (16) ne dépendent que de $\overline{C}$, $\overline{N}$ et des constantes $\widetilde{C}$ et $\widetilde{N}$ de (6) et (7) relatives aux poids qui y figurent.

2 Théorie de Littlewood-Paley

Comme le lecteur pourra s'en rendre compte en lisant la démonstration de la proposition (2.4) et du théorème (2.7) , décomposer un symbole confinés en série de produits de symboles confinés est très important. Un résultat de R. Beals [Be] assure que tout $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ peut se décomposer sous la forme $a = b\# c$, où b et c appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. En outre, dans le cas où la métrique g est symplectique ($g = g^\sigma$), on déduit facilement de sa démonstration un contrôle des semi-normes de confinement de b et c à partir de celles de a.

Nous allons dans le cas général, en précisant les arguments de [B&L] (proposition 6.1.1), obtenir une décomposition des symboles confinés un peu plus compliquée, mais qui nous rendra les mêmes services.

Théorème 2.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout r assez petit et toute famille (a_Y) uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$, il existe des fonctions $b_{Y,\nu}$ et $c_{Y,\nu}$ appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, pour $Y \in \mathbf{R}^{2n}$ et $\nu \in \mathbf{N}$, telles que l'on ait*

$$a_Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{Y,\nu}\# c_{Y,\nu}\ ,$$

et que, pour tout $N \in \mathbf{N}$, les familles $(1+\nu)^N b_{Y,\nu}$ et $(1+\nu)^N c_{Y,\nu}$ soient uniformément confinées dans les $U_{Y,Cr}$.

En notant que les espaces $\mathrm{Conf}(g,Y,r)$ et $\mathrm{Conf}(g_Y,Y,r)$ sont identiques par définition, on voit qu'il suffit de démontrer un résultat de décomposition pour une métrique fixe ($\gamma = g_Y$) et une boule de cette métrique (que l'on pourra supposer centrée à l'origine), à condition d'avoir un contrôle des semi-normes indépendant de γ. C'est ce qu'exprime le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Il existe une constante $C > 1$ et, pour tout $r > 0$ et toute suite (M_k) de nombres positifs, des suites $M'_{k,N}$, $N \in \mathbf{N}$ telles que l'on ait la propriété suivante. Soit γ une forme quadratique définie positive sur $\mathbf{R}^{2n}$ vérifiant $\gamma \leq \gamma^\sigma$ et soit $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ vérifiant $\|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(\gamma,0,r)} \leq M_k$ pour tout k. Il existe alors des b_ν et des c_ν appartenant à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ tels que l'on ait $a = \sum_\nu b_\nu \# c_\nu$ et*

$$(1+\nu)^N \|b_\nu\|_{k\,;\mathrm{Conf}(\gamma,0,Cr)} \leq M'_{k,N} \qquad (1+\nu)^N \|c_\nu\|_{k\,;\mathrm{Conf}(\gamma,0,Cr)} \leq M'_{k,N} \,.$$

La formule (2) peut s'interpréter ainsi : l'application $\#$ qui au couple (b,c) fait correspondre $b\#c$ se décompose de la manière suivante

$$\# = \rho \circ V \circ \tau$$

où τ est l'application de produit tensoriel de $(\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n}))^2$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$, où V est l'opérateur unitaire appliquant $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$ dans lui-même défini par

$$Vf(X_1,X_2) = \pi^{-2n} \iint e^{-2i[X_1-Y_1,X_2-Y_2]} f(Y_1,Y_2)\,dY_1\,dY_2 \,,$$

et où ρ est l'application de restriction à la diagonale, appliquant $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$.

La stratégie de démonstration du lemme 2.2 est alors claire : on choisit une fonction $\Phi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, à support dans $]-1,1[$ et égale à 1 au voisinage de l'origine ; un symbole a tant donné, on pose

$$g(X_1,X_2) = a\Big(\frac{X_1+X_2}{2}\Big)\Phi\Big(\frac{\gamma(X_1-X_2)}{r^2}\Big) \,.$$

On pose ensuite

$$f(X_1,X_2) = V^* g(X_1,X_2) = \pi^{-2n} \iint e^{2i[X_1-Y_1,X_2-Y_2]} g(Y_1,Y_2)\,dY_1\,dY_2 \,,$$

Il est facile de voir que l'on a des estimations du type suivant, en posant $r' = 2r$,

$$|\partial_{T_1} \dots \partial_{T_l} g(X_1,X_2)| \leq \overline{M_k}\big(1+\gamma^\sigma(X_1-U_{r'})\big)^{-k}\big(1+\gamma^\sigma(X_2-U_{r'})\big)^{-k} \quad \text{pour } l \leq k \,, \tag{19}$$

où les T_j sont des vecteurs de $\mathbf{R}^{2n}_{X_1}$ ou de $\mathbf{R}^{2n}_{X_2}$ vérifiant $\gamma(T_j) \leq 1$, les constantes $\overline{M_k}$ ne dépendant que de r et des M_k. Des intégrations par parties assurent que l'opérateur V^* respecte les estimations (19). Ensuite, il ne reste plus qu'à décomposer f sous la forme $f(X_1,X_2) = \sum_\nu b_\nu(X_1)c_\nu(X_2)$ pour avoir le résultat, en contrôlant bien entendu les semi-normes de confinement indépendamment de γ.

Nous allons donner maintenant donner une définition 'à la Littlewood-Paley' des espaces de Sobolev associés à une métrique de Hörmander g, ainsi que leurs premières propriétés.

Soit (φ_Y) une g-partition de l'unité (voir (8)) à support dans des boules de rayon r/C, et soient $\varphi_Y = \sum_\nu \psi_{Y,\nu} \# \theta_{Y,\nu}$ les décompositions en symboles confinés dans les $U_{Y,r}$ fournies par le théorème 2.1.

Définition 2.3 *Soit M un poids admissible. L'espace de Sobolev noté $H(M,g)$ (ou $H(M)$ lorsque le contexte est clair) est l'espace des $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ vérifiant*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int M(Y)^2 \left\|\theta^w_{Y,\nu} u\right\|^2_{L^2} |g_Y|^{1/2}\,dY < \infty \,.$$

C'est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u \mid v)_{H(M)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int M(Y)^2 \left(\theta^w_{Y,\nu} u \;\middle|\; \theta^w_{Y,\nu} v\right)_{L^2} |g_Y|^{1/2}\, dY < \infty .$$

La proposition suivante montre que la définition des $H(M)$ ne dépend pas des choix des $\varphi_Y, \psi_{Y,\nu}, \theta_{Y,\nu}$.

Proposition 2.4 *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Pour que u appartienne à $H(M)$, il faut et il suffit que pour toute famille $(a_{Y,\nu})$ de symboles indexée par $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{N}$ qui vérifie pour tout k*

$$\sup_Y \sum_\nu \|a_{Y,\nu}\|^2_{k;\mathrm{Conf}(Y)} < \infty , \tag{20}$$

on ait

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int M(Y)^2 \left\|a^w_{Y,\nu} u\right\|^2_{L^2} |g_Y|^{1/2}\, dY < \infty . \tag{21}$$

La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. En écrivant u comme l'intégrale des $\varphi^w_S u$, on obtient

$$\left\|a^w_{Y,\nu} u\right\|^2_{L^2} \leq \sum_\mu \sum_\lambda \iint \left\|\overline{\psi}^w_{T,\mu} \overline{a}^w_{Y,\nu} a^w_{Y,\nu} \psi^w_{S,\lambda}\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \left\|\theta^w_{S,\lambda} u\right\|_{L^2} \left\|\theta^w_{T,\mu} u\right\|_{L^2} |g_S|^{1/2}\, dS\, |g_T|^{1/2}\, dT . \tag{22}$$

La norme dans $\mathcal{L}(L^2)$ de a^w étant majorée d'après (17) par $C_0 \|a\|_{k;\mathrm{Conf}(g,Y,r)}$ avec des constantes C_0 et k universelles, le terme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ ci-dessus est majoré, d'après le théorème 1.6, par

$$C \Delta_r(S,Y)^{-N} \Delta_r(T,Y)^{-N} (1+\lambda)^{-N} (1+\mu)^{-N} \|a_{Y,\nu}\|^2_{p;\mathrm{Conf}(Y)} , \tag{23}$$

pour tout N avec $p = p(N)$ et $C = C(N)$.

En notant R le membre de gauche de (21), on déduit donc de (22) et de (23)

$$R \leq \sum_\mu \sum_\lambda \iint K(S,\lambda;T,\mu) M(S) \left\|\theta^w_{S,\lambda} u\right\|_{L^2} M(T) \left\|\theta^w_{T,\mu} u\right\|_{L^2} |g_S|^{1/2}\, dS\, |g_T|^{1/2}\, dT ,$$

où on a l'estimation

$$K(S,\lambda;T,\mu) \leq C' \sum_\nu \int M(Y)^2 M(S)^{-1} M(T)^{-1} \Delta_r(S,Y)^{-N} \Delta_r(T,Y)^{-N} (1+\lambda)^{-N} (1+\mu)^{-N} \|a_{Y,\nu}\|^2_{p;\mathrm{Conf}(Y)} |g_Y|^{1/2}\, dY . \tag{24}$$

D'après le lemme de Schur, il suffit de prouver que l'on a la relation

$$\sup_{S,\lambda} \sum_\mu \int K(S,\lambda;T,\mu)\, |g_T|^{1/2}\, dT \tag{25}$$

ainsi que la relation symétrique pour obtenir l'estimation

$$R \leq \mathrm{C^{te}} \sum_\mu \int M(T)^2 \left\|\theta^w_{T,\mu} u\right\|^2_{L^2} |g_T|^{1/2}\, dT = \mathrm{C^{te}} \|u\|^2_{H(M)} < \infty .$$

La relation (24) entraîne facilement (25) pourvu que l'on ait choisi $N = P + Q$ assez grand pour que Δ^P_r absorbe les rapports $M(\cdot)/M(\cdot)$ (voir la remarque 1.4) et que Δ^{-Q}_r soit sommable (voir (13)). Cela achève la démonstration.

Corollaire 2.5 *Soient M et M_1 des poids admissibles. Pour tout $a \in S(M,g)$, l'opérateur a^w applique continûment $H(M_1)$ dans $H(M_1/M)$.*

Il s'agit de prouver que l'on a

$$R = \sum_\nu \int M_1(Y)^2/M(Y)^2 \left\|\theta^w_{Y,\nu} a^w u\right\|^2_{L^2} |g_Y|^{1/2}\, dY < \infty .$$

D'après (15), l'application $b \mapsto M(Y)^{-1} b\#a$ est continue de $\mathrm{Conf}(g,Y,r)$ dans lui-même avec des semi-normes indépendantes de Y. La famille des $b_{Y,\nu} = M(Y)^{-1}\theta_{Y,\nu}\#a$ vérifie donc la condition (20), et la finitude de

$$R = \sum_\nu \int M_1(Y)^2 \left\|b_{Y,\nu} u\right\|^2_{L^2} |g_Y|^{1/2}\, dY$$

résulte de la proposition 2.4.

On démontre de manière analogue que l'espace $H(1)$ est identique à l'espace L^2 ce qui est rassurant.

2.6 Inclusion dans les espaces L^p

Nous dirons que la métrique g est *scindée* si on a $g_X(t,\tau) = g_X(t,-\tau)$, ce qui équivaut à dire qu'il existe des formes quadratiques définies positives $g_{1,X}$ et $g_{2,X}$ sur $\mathbf{R}^n$ avec $g_X(t,\tau) = g_{1,X}(t) + g_{2,X}(\tau)$. Pour de telles métriques, on peut énoncer l'analogue des théorèmes d'inclusion de Sobolev.

En admettant le point (b) du thérème 4.2, qui sera bien sur démontré ultérieurement, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.7 *Supposons la métrique g scindée. Soient M un poids admissible et $p \in]2,+\infty]$. Nous noterons Ω_p l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que la quantité*

$$h_p(x) = \left\|M^{-1}(x,\xi)\right\|_{L^{2p/(p-2)}(d\xi)} \tag{26}$$

soit finie.

(a) *Pour tout $x \in \Omega_\infty$, l'application $u \mapsto u(x)$ définie sur $\mathcal{S}$ se prolonge en une application linéaire continue, notée encore $u \mapsto u(x)$, définie sur $H(M)$, et on a*

$$|u(x)| \leq C \left\|u\right\|_{H(M)} h_\infty(x) , \tag{27}$$

la constante C ne dépendant pas de $x \in \Omega_\infty$. En outre, dans tout ouvert $\omega \subset \Omega_\infty$ où la fonction h_∞ est localement bornée, la restriction d'une distribution $u \in H(M)$ est une fonction continue.

(b) *Soit $2 < p < \infty$ et supposons que la mesure de Ω_p soit > 0. Alors l'application $u \mapsto h_p^{-1} u_{|\Omega_p}$ définie sur $\mathcal{S}$ se prolonge en une application définie sur $H(M)$ qui vérifie*

$$\left\|\frac{u}{h_p}\right\|_{L^p(\Omega_p)} \leq \mathrm{C^{te}} \left\|u\right\|_{H(M)} .$$

En particulier, dans tout ouvert ω où la fonction h_p est localement bornée, la restriction d'une distribution $u \in H(M)$ est une fonction de $L^p_{\mathrm{loc}}(\omega)$.

La condition obtenue ne dépend que du poids M et non de la métrique. Dans le cas où $M(x,\xi) = \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2}$, on retrouve les inclusions de Sobolev classiques.

Le point essentiel de la démonstration est à nouveau une propriété relative à une métrique fixe. Des intégrations par parties adaptées à la métrique γ démontre facilement que, pour tout $r > 0$ et tout entier N, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que pour toute fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ et toute forme quadratique scindée $\gamma = \gamma_1(dx^2) + \gamma_2(d\xi^2)$ vérifiant $\gamma \leq \gamma^\sigma$, on a

$$\left(1+\gamma_2^{-1}(x-U_1)\right)^N |\theta^w u(x)| \leq C \, \|\theta\|_{k;\mathrm{Conf}(\gamma,0,r)} |\gamma_2|^{-1/4} \|u\|_{L^2} \ ,$$

en notant U_1 la boule de $\mathbf{R}^n$ définie par $\gamma_1(x) \leq r^2$. On utilise alors la décomposition suivante

$$u = \sum_\nu \int \psi^w_{Y,\nu} \theta^w_{Y,\nu} u \, |g_Y|^{1/2} \, dY \ .$$

La propriété ci-dessus, la relation de tempérance et le lemme de Schur, assurent le résultat annoncé pour $p = \infty$. Losque p est strictement compris entre 2 et ∞, on procède par interpolation.

3 Caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels

Le résultat le plus important de cette section est le théorème 3.3 qui caractérise les opérateurs pseudo-différentiels a^w en termes de norme dans $\mathcal{L}(L^2)$ de commutateurs de localisés de a^w. L'essentiel de la démonstration réside dans le lemme 3.2 et consiste en l'étude du cas d'une métrique constante γ, c'est-à-dire d'une forme quadratique définie positive vérifiant $\gamma \leq \gamma^\sigma$.

Définition 3.1 *On note* $\mathrm{Op}\, S(1,\gamma)$ *l'espace des opérateurs* A *de* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ *pour lesquels les semi-normes suivantes sont finies :*

$$|||A|||_{k;\gamma} = \sup_{p\leq k\,;\,\gamma(T_j)\leq 1} \|(\mathrm{ad}\, L_1)\circ\cdots\circ(\mathrm{ad}\, L_p)\cdot A\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

où les opérateurs L_j *sont les quantifiés de Weyl des formes linéaires* $X \mapsto [T_j, X]$.

On a utilisé la notation classique $\mathrm{ad}\, L \cdot A$ du commutateur $[L, A]$. Remarquons que l'on a $\mathrm{ad}\, L_j \cdot a^w = (\partial_{T_j} a)^w$.

Il est clair que $a \in S(1,\gamma)$ entraîne $a^w \in \mathrm{Op}\, S(1,\gamma)$, et il résulte facilement de (18) et de la remarque 1.8 que l'on a un contrôle uniforme en γ des semi-normes de a^w à partir de celles de a. La réciproque est exprimée par le lemme suivant.

Lemme 3.2
(a) *Un opérateur* A *appartient à* $\mathrm{Op}\, S(1,\gamma)$ *si et seulement si on a* $A = a^w$ *avec* $a \in S(1,\gamma)$. *En outre, pour tout entier* k, *il existe* C *et* l *indépendants de* γ *tels que l'on ait*

$$\|a\|_{k;S(1,\gamma)} \leq C \, |||a^w|||_{l;\gamma}$$

(b) *Quels que soient $k \in \mathbf{N}$ et $\theta \in]0,1[$, il existe C et l indépendants de γ tels que l'on ait*

$$\|a\|_{k;S(1,\gamma)} \leq C\,\|A\|^{\theta}_{\mathcal{L}(L^2)}\,|||A|||^{1-\theta}_{l;\gamma}\ .$$

Rappelons (voir par exemple le théorème 18.5.9 de [Hö]) qu'à toute transformation linéaire symplectique χ de $\mathbf{R}^{2n}$, on peut associer un opérateur unitaire U sur L^2 tels que $(a \circ \chi)^w = U^{-1}a^wU$. L'énoncé du lemme étant invariant par de telles transformations, cela nous permettra de supposer que l'on a

$$\gamma = \sum \frac{dx_j^2 + d\xi_j^2}{a_j^2}\ ,$$

où l'hypothèse $\gamma \leq \gamma^\sigma$ se traduit par $a_j \geq 1$. Nous noterons $\gamma_1 = \sum dx_j^2/a_j^2$ la composante selon $\mathbf{R}^n$ de γ.

Pour un γ donné, la partie (a) du lemme 3.2 se réduit à la caractérisation classique des opérateurs de la classe $S^0_{0,0}$. Il suffit de suivre la démonstration de la caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels de la classe $S^0_{0,0}$, due à R. Beals (voir par exemple [He] p. 52), en contrôlant soigneusement l'uniformité par rapport à γ. Le résultat d'interpolation (b) résulte d'une d'interpolation dans l'échelle des espaces de Sobolev. Grâce à la décomposition démontrée au paragraphe précédent, on déduit de ce lemme le théorème suivant :

Théorème 3.3
Posons

$$|||A|||_{k;\mathrm{Op}\,S(M,g)} = \sup_{\substack{p\leq k;\,Y,\nu\\ g_Y(T_j)\leq 1}} M(Y)^{-1}\left\|(\mathrm{ad}\,L_1)\circ\cdots\circ(\mathrm{ad}\,L_p)\cdot(\theta^w_{Y,\nu}\circ A)\right\|_{\mathcal{L}(L^2)}\ , \qquad (28)$$

où les opérateurs L_j sont comme ci-dessus. L'opérateur A est de la forme a^w avec $a \in S(M,g)$ si et seulement si ces semi-normes sont finies, et on a les relations

$$\begin{array}{lrcl} \forall k,\ \exists C,\ \exists l, & \|a\|_{k;S(M,g)} & \leq & C\,|||a^w|||_{l;\mathrm{Op}\,S(M,g)}\ , \\ \forall k,\ \forall\theta \in]0,1[,\ \exists C,\ \exists l, & \|a\|_{k;S(M,g)} & \leq & C\,|||a^w|||^{\theta}_{0;\mathrm{Op}\,S(M,g)}\,|||a^w|||^{1-\theta}_{l;\mathrm{Op}\,S(M,g)}\ . \end{array}$$

Remarque **3.4** Dans le même esprit, une caractérisation des opérateurs de classe $S^0_{1/2,1/2}$ a été donnée dans [C&M] et pour les opérateurs de la classe $S^0_{\rho,\rho}$ dans [Ue].

4 Autour des opérateurs inversibles

Nous allons démontrer, pour tout poids admissible M, l'existence d'un groupe à un paramètre de symboles $b_t \in S(M^t, g)$, ce qui implique l'existence de symboles inversibles de tout ordre.

Définition 4.1 *On dit qu'une fonction α de classe C^∞ définie sur $\mathbf{R}^{2n}$ est un symbole comparable à $\log M$ si on a*

$$\sup_X |\alpha(X) - \log M(X)| \ <\ \infty \qquad (29)$$

$$\sup_{X,T_j} |\partial_{T_1}\ldots\partial_{T_k}\alpha(X)| \ <\ \infty \qquad (30)$$

pour chaque $k \geq 1$, les vecteurs T_j vérifiant $g_X(T_j) \leq 1$.

On voit facilement qu'une telle fonction appartient à $S(L,g)$, où L est le poids admissible $L(X) = 1 + |\log M(X)|$.

Remarque **4.2** Il est bien connu qu'il existe des $a \in S(M,g)$ équivalents à M, c'est-à-dire vérifiant $(M(Y)/a(Y))^{\pm 1} \leq \mathrm{C^{te}}$ (on dit que a est un poids régulier). On peut prendre par exemple $a = \int M(Y)\varphi_Y\, |g_Y|^{1/2}\, dY$ où (φ_Y) est une g-partition de l'unité. La fonction $\log a$ est alors comparable à $\log M$.

Il est facile de vérifier que l'espace des fonctions comparables à $\log M$ est l'espace affine $\log a + S(1,g)$.

Le théorème clef pour la démonstration du théorème est le suivant :

Théorème 4.3 *Soit M un poids admissible et α comparable à* $\log M$.
(a) *Soit m un poids admissible et $b_0 \in S(m,g)$. Il existe une unique application $(t,X) \mapsto b_t(X)$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{2n}$, égale à b_0 pour $t = 0$, telle que l'on ait $b_t \in S(mM^t, g)$ pour tout t et*

$$\partial b_t/\partial t = \alpha \# b_t \ . \tag{31}$$

(b) *Dans le cas $m = b_0 = 1$, l'unique solution de (31) vérifie également $\partial b_t/\partial t = b_t \# \alpha$ et on a*

$$b_t \# b_s = b_{t+s} \quad , \quad b_t \in S(M^t, g) \ ,$$

quels que soient s et t.

La résolution de cette équation différentielle linéaire (autonome) nécessite une localisation dans l'espace des phases. L'idée de base est la suivante. Soit b_t une solution vérifiant les conditions de la partie (a). Nous avons vu que $\alpha \in S(1 + |\log M|)$, et il résulte alors facilement de l'équation (31) que l'application $t \mapsto b_t$ est de classe C^1 sur l'intervalle $[-T,T]$ à valeur dans l'espace de Fréchet $S(\widetilde{M}, g)$ avec $\widetilde{M} = m(1 + |\log M|)(M + M^{-1})^T$. Posons

$$c_{t,Y,\mu} = m(Y)^{-1} M(Y)^{-t} \theta_{Y,\mu} \# b_t \ .$$

Les $c_{t,Y,\mu}$ constituent une famille uniformément confinée pour chaque t, sont de classe C^1 par rapport à t, et vérifient l'équation

$$\frac{\partial c_{t,Y,\mu}}{\partial t} = m(Y)^{-1} M(Y)^{-t} \theta_{Y,\mu} \# (\alpha - \log M(Y)) \# b_t \ .$$

En intercalant une partition de l'unité, on obtient une équation différentielle linéaire (non automone) sur la famille des $c_{t,Y,\mu}$. Le fait que α soit un symbole comparable à $\log M$ permet de démontrer une estimation de confinement uniforme. Nous ignorons si, pour une métrique de Hörmander générale, un symbole a est inversible au sens du calcul symbolique dès que a^w est inversible en tant qu'opérateur entre espaces de Sobolev. Nous donnons ci-dessous deux conditions portant sur la métrique g pour qu'il en soit bien ainsi. La première d'entre elles remédie au fait que la fonction $\Delta_r(Y,Z)$, qui mesure dans tout le calcul l'éloignement de Y et Z, ne satisfait pas à l'inégalité triangulaire.

Définition 4.4
(a) *On dit que la métrique g est* fortement tempérée *s'il existe une fonction positive* $(X,Y) \mapsto d(X,Y)$, *définie sur* $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$, *vérifiant l'inégalité triangulaire, telle qu'il existe* $C > 0$, $N \geq 0$ *et* $r > 0$ *avec*

$$\begin{aligned} \left(g_X/g_Y\right)^{\pm 1} &\leq C\left(1 + d(X,Y)\right)^N && (32) \\ 1 + d(X,Y) &\leq C\Delta_r(X,Y)^N . && (33) \end{aligned}$$

(b) *On dit que la métrique g est* dominée par une métrique fortement tempérée *s'il existe une métrique de Hörmander fortement tempérée* $\tilde{g}$ *telle que l'on ait*

$$\begin{aligned} g_X(\cdot) &\leq \tilde{g}_X(\cdot) && (34) \\ \left(g_Y(\cdot)/g_Z(\cdot)\right)^{\pm 1} &\leq C\left(1 + \tilde{g}_Y^{\sigma}(Y - Z)\right)^N && (35) \end{aligned}$$

Remarque **4.5** La majoration (33) par $\Delta_r(X,Y)$ et non pas par $g_X^{\sigma}(X-Y)$ est plus restrictive qu'il ne paraît : pour $g_X(X-Y) \leq r$ cela impose $d(X,Y) \leq \mathrm{C^{te}}$, et la distance d doit donc être majorée, à une constante près, par la distance géodésique pour g. Dans le cas d'une métrique symplectique, la condition de forte tempérance coïncide essentiellement avec l'hypothèse faite dans [Un], [Br] et [Le].

Exemple **4.6** *Métriques de type* (ρ, δ)
Ces métriques, définies par

$$g_X = \langle\xi\rangle^{2\delta} dx^2 + \langle\xi\rangle^{-2\rho} d\xi^2 \qquad , \qquad \langle\xi\rangle = \left(1 + |\xi|^2\right)^{1/2} ,$$

sont des métriques de Hörmander pour $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$. On vérifie aisément que, pour $0 \leq \delta \leq \rho < 1$, la métrique g est fortement tempérée , la distance $d(X,Y) = |\langle\xi\rangle^{1-\rho} - \langle\eta\rangle^{1-\rho}|$ satisfaisant (32) et (33). Dans le cas général ($0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$), la métrique est dominée par une métrique fortement tempérée, la métrique de type (δ, δ) par exemple.

Le théorème principal relatif à cette question est le suivant :

Théorème 4.7 *Supposons que g soit (dominée par une métrique) fortement tempérée. Soit* $a \in S(1,g)$ *tel que* $(a^w)^{-1}$ *existe dans* $\mathcal{L}(L^2)$. *Il existe alors* $a' \in S(1,g)$ *tel que* $a\#a' = a'\#a = 1$.

Il suffit de l'obtenir pour une métrique g fortement tempérée. En effet, il résulte de l'hypothèse (35) que les poids du type $M_T(Y) = g_Y(T)^{1/2}$, où T est un quelconque élément non nul de l'espace des phases $\mathbf{R^{2n}}$.Il résulte de l'hypothèse (35) que les M_T constituent une famille de poids pour la métrique $\tilde{g}$, dont les constantes de lenteur et de tempérance sont uniformes en T. D'autre part, la fonction $\partial_T a$ appartient à $S(M_T, g) \subset S(M_T, \tilde{g})$ avec des semi-normes majorées uniformément en P et T.Si l'on suppose le théorème d.'emontré dans le cas d'une métrique fortement tempérée, $\tilde{g}$, il existe $a' \in S(1, \tilde{g})$ tel que $a\#a' = a'\#a = 1$.

Pour T appartenant à $\mathbf{R}^{2n}$, on applique (16), assorti de la remarque 1.8, à la formule

$$\partial_T a' = -a'\#\partial_T a\#a' ,$$

il en résulte que les $\|\partial_T a'\|_{k\,;S(M_T,\widetilde{g})}$ sont majorés par des constantes C_k indépendantes de T. En particulier, pour $k=0$, on obtient $|\partial_T a'(Y)| \leq C_0 g_Y(T)^{1/2}$ d'où la conclusion par une itération évidente.

Lorsque la métrique g est fortement tempérée, on peut démontrer l'existence de constantes C_0 et k_0 ne dépendant que de g, et pour chaque entier k des constantes C_1, k_1 et N_1 telles que l'on ait, pour $b \in S(1,g)$,

$$|||(b^w)^p|||_{k\,;\mathrm{Op}\,S(1,g)} \leq C_1(p+1)^{N_1}\Big(C_0\,\|b\|_{k_0\,;S(1,g)}\Big)^{p-2k}\Big(C_1\,\|b\|_{k_1\,;S(1,g)}\Big)^{2k} \qquad (36)$$

Nous allons nous commencer par démontrer que $1-b$ est inversible dans $S(1,g)$ lorsque $b \in S(1,g)$ avec $\|b^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} < 1$. Pour chaque entier k, et pour un $\theta < 1$ à déterminer ultérieurement, il existe d'après le théorème 3.3 (b) des constantes C et κ telles que

$$|||(b^w)^p|||_{k\,;\mathrm{Op}\,S(1,g)} \leq C\,|||(b^w)^p|||_{0\,;\mathrm{Op}\,S(1,g)}^{1-\theta}\;|||(b^w)^p|||_{\kappa\,;\mathrm{Op}\,S(1,g)}^{\theta}\;.$$

En majorant $|||(b^w)^p|||_{\kappa\,;\mathrm{Op}\,S(1,g)}$ grâce à l'inégalité (36) et en utilisant la relation suivante

$$|||(b^w)^p|||_{0\,;\mathrm{Op}\,S(1,g)} = \sup\left\|\theta^w_{Y,\nu}\big(b^w\big)^p\right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C'\,\|b^w\|^p_{\mathcal{L}(L^2)}\ ,$$

on obtient

$$|||(b^w)^p|||_{k\,;\mathrm{Op}\,S(1,g)} \leq CC'^{1-\theta}C_1^{\theta}(p+1)^{N_1\theta}\Big(C_0\,\|b\|_{k_0\,;S(1,g)}\Big)^{(p-2\kappa)\theta}$$
$$\Big(C_1\,\|b\|_{k_1\,;S(1,g)}\Big)^{2\kappa\theta}\,\|b^w\|^{p(1-\theta)}_{\mathcal{L}(L^2)}\;.$$

Nous pouvons maintenant choisir θ assez petit pour que l'on ait

$$\|b^w\|^{(1-\theta)}_{\mathcal{L}(L^2)}\Big(C_0\,\|b\|_{k_0\,;S(1,g)}\Big)^{\theta} < 1\ ,$$

ce choix ne dépendant que de C_0 et k_0 et pouvant donc être fait indépendamment de k. La série de terme général $|||(b^w)^p|||_{k\,;\mathrm{Op}\,S(1,g)}$ converge alors pour tout k.

La série $\sum b^{\#p}$ converge donc dans $S(1,g)$ ce qui montre que $1-b$ est inversible dans $S(1,g)$.

Si maintenant $a \in S(1,g)$ est inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$, il suffit de montrer l'inversibilité dans $S(1,g)$ de $\bar{a}\#a$. L'opérateur $\mathcal{A} = \bar{a}^w a^w$ est autoadjoint, inversible et positif dans L^2 et on a donc

$$c\,\|u\|^2_{L^2} \leq (\mathcal{A}u\mid u)_{L^2} \leq C\,\|u\|^2_{L^2}$$

avec $0 < c < C$. On peut écrire $\mathcal{A} = C(I-b^w)$ avec $\|b^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq (C-c)/C$ et on est ramené au cas précédent. Cela achève la démonstration du théorème.

Lorsque la métrique g est (dominée) par une métrique fortement tempérée, on peut donner des espaces de Sobolev une définition 'à la Littlewood-Paley' plus agréable que celle que nous avons donnée dans la section 2.

Théorème 4.8 *Supposons la métrique g (dominée par une métrique) fortement tempérée, et soit φ_Y une g-partition de l'unité à support dans les $U_{Y,r}$.*

(a) *Il existe une famille* ψ_Y *uniformément confinée dans les* $U_{Y,r}$ *telle que l'on ait* $\int \psi_Y \# \varphi_Y \, |g_Y|^{1/2} \, dY = 1$.
(b) *Pour que* u *appartienne à* $H(M)$*, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int M(Y)^2 \, \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 \, |g_Y|^{1/2} \, dY < \infty \, .$$

Il est clair que (a) entraîne (b), le premier membre de la relation ci-dessus étant un cas particulier de la définition 2.3 de $\|u\|_{H(M)}^2$, en choisissant $\psi_{Y,0} = \psi_Y$, $\theta_{Y,0} = \varphi_Y$ et $\psi_{Y,\nu} = \theta_{Y,\nu} = 0$ pour $\nu \geq 1$. La démonstration de la partie (a) résultera du fait que l'opérateur $A = \int (\varphi_Y^w)^2 \, |g_Y|^{1/2} \, dY$ est inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$ ce qui se démontre à l'aide d'une variante du lemme de Cotlar. D'après le théorème 4.7, l'inverse de A est de la forme c^w avec $c \in S(1, g)$. On a donc

$$1 = \int c \# \varphi_Y \# \varphi_Y \, |g_Y|^{1/2} \, dY \, .$$

Il suffit de poser $\psi_Y = c \# \varphi_Y$, cette famille étant uniformément confinée d'après (15), pour achever la démonstration du théorème.

References

[Be] R. Beals, Weighted distribution spaces and pseudodifferential operators *J. An. Math.* **39** (1981) 130–187.

[B&C] J.-M. Bony et J.-Y. Chemin, Espaces fonctionnels associs au calcul de Weyl-Hörmander *Prépuplication de l' Ecole Polytechnique* (1992)

[B&L] J.-M. Bony et N. Lerner, Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur I, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 4^e série **22** (1989) 377–433.

[Br] F. Bruyant, Estimations pour la composition d'un grand nombre d'opérateurs pseudo-différentiels et applications, *Thèse Univ. Reims* (1979).

[C&M] R. R. Coifman et Y. Meyer, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque* **57**, S.M.F. (1978).

[He] B. Helffer, Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques, *Astérisque* **112**, S.M.F. (1984).

[Hö] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer-Verlag (1985).

[Le] N. Lerner, Sur les espaces de Sobolev généraux associés aux classes récentes d'opérateurs pseudo-différentiels, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, **289** (1979) 663–666.

[Ue] J. Ueberberg, Zur Spektralinvarianz von Algebren von Pseudodifferentialoperatoren in der L^p-Theorie, *Manuscripta Mathemetica* **61** (1988) 459–475

[Un] A. Unterberger, Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels, *Ann. Inst. Fourier*, **29-3** (1979) 201–221.