Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Patrick Gérard
Eric Leichtnam

Ergodicité de fonctions propres pour des problèmes aux limites

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. nº 14, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A14_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

ERGODICITE DE FONCTIONS PROPRES POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES

Patrick GERARD et Eric LEICHTNAM

Exposé n° XIV

21 Avril 1992

Introduction

En 1974, A.I. Shnirelman annonçait le résultat suivant [S1,2] :

"Si M est une variété riemannienne compacte sur laquelle le flot géodésique est ergodique (pour la mesure de Liouville λ sur le fibré unitaire), il existe une sous-suite (φ_{kj}) de fonctions propres du laplacien sur M telle que, pour tout opérateur pseudodifférentiel A d'ordre 0 sur M, on ait

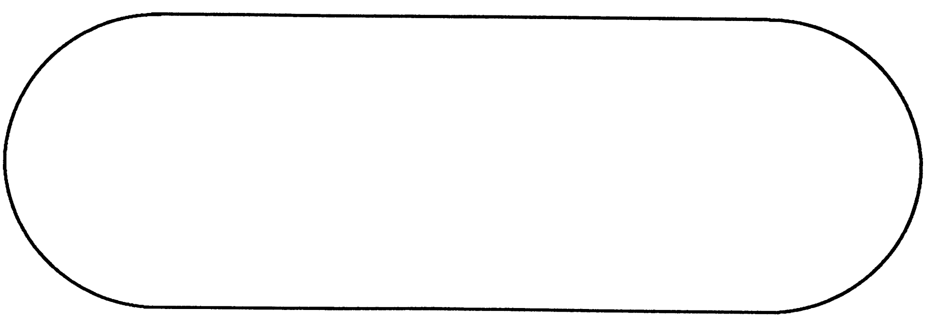
$$(A\varphi_{k_j}, \varphi_{k_j}) \to \int_{S^*M} \sigma_0(A) d\lambda \ ,$$

et telle que la suite (k_j) soit de densité 1 (i.e. $k_j \sim j$) ".

Ce résultat, dont une démonstration complète n'a été publiée que dix ans plus tard (par Zelditch [Z] dans le cas des surfaces à courbure négative constante, puis par Colin de Verdière [C] dans le cas général) se situe dans la problématique visant à traduire sur l'asymptotique des fonctions propres d'un opérateur elliptique le comportement chaotique du système dynamique associé. (voir notamment [D], [LV]).

Plus précisément, l'hypothèse d'ergodicité entraîne ici que "presque toutes" les fonctions propres se délocalisent asymptotiquement uniformément en espace et en fréquence. Signalons qu'un résultat analogue a été prouvé en 1987 par Helffer-Martinez-Robert [HMR] pour un opérateur de Schrödinger semi-classique.

Le but de ce travail est de généraliser le résultat cité plus haut au problème de Dirichlet sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$. Dans ce cas, le système dynamique associé est le "billard" sur Ω. Le premier exemple de billard ergodique a été introduit par Sinai [Si] et représente le mouvement d'un point matériel sur un tore avec réflexions élastiques sur des obstacles sphériques fixes. On retrouve dans cet exemple la plupart des propriétés du flot géodésique sur une surface à courbure négative, le caractère dispersif étant dû aux réflexions sur une frontière strictement concave. Mais il existe également des billards ergodiques convexes, comme l'a montré Bunimovitch [B]. L'exemple le plus célèbre en est le "stade",



ou, dans $\mathbf{R}^3$, la région obtenue par rotation du stade autour de son diamètre. Il était donc naturel de chercher à savoir si les propriétés ergodiques des fonctions propres restaient vraies pour de tels exemples, intuitivement "moins ergodiques" que les précédents. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.— *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ dont la frontière est $W^{2,\infty}$ (i.e. la normale varie de façon lipschitzienne). On suppose que le billard sur Ω est ergodique. Soit (φ_k) une base orthonormale de fonctions propres pour le laplacien de Dirichlet sur Ω. Alors il existe une suite extraite (φ_{k_j}) telle que $k_j \sim j$ et, pour tout opérateur pseudodifférentiel A d'ordre 0 sur $\mathbf{R}^n$,*

$$(A 1_\Omega \varphi_{k_j}, 1_\Omega \varphi_{k_j}) \to \int_{S^*\Omega} \sigma_0(A) d\lambda \ , \tag{1}$$

où $\sigma_0(A)$ désigne le symbole principal de A, et $\lambda = dx d\sigma(\xi)$ est la mesure de Liouville de masse 1 sur $S^*\Omega$.

On notera que l'hypothèse sur la régularité de $\partial\Omega$ permet effectivement de prendre en compte les exemples précités, qui présentent des discontinuités de courbure, comme tous les billards étudiés dans [B]. On pourra comparer le théorème 1 avec les résultats d'expériences physiques et numériques réalisées sur le stade (voir [D] et sa bibliographie). Il est également intéressant de constater à quel point ce résultat est géométriquement instable : si Ω est un ouvert strictement convexe à bord suffisamment régulier, Lazutkin [L1,2] a montré la non-ergodicité du billard sur Ω - il existe sur Ω une famille de caustiques formant un ensemble de mesure de Lebesgue positive - et a construit une suite de fonctions propres de densité positive (i.e. $\underline{\lim} k_j/j > 0$) ne possédant pas la propriété (1), généralisant ainsi les exemples explicites sur le disque et sur l'ellipse.

Le principe de la démonstration du théorème 1 consiste, comme dans [S], [Z], [C] à se ramener à un résultat de propagation pour des mesures de défaut microlocales. Dans le cas d'une variété sans bord, ce résultat était une conséquence du théorème d'Egorov. Ici, la présence d'un bord peu régulier rend délicat le calcul des opérateurs intégraux de Fourier ; on préfère donc démontrer la version infinitésimale d'un théorème de propagation, c'est-à-dire une équation de transport. Celle-ci est discutée au paragraphe III ; l'ingrédient principal en est le calcul pseudodifférentiel semi-classique. Les détails apparaîtront dans [GL].

Les auteurs tiennent à remercier Y. Colin de Verdière qui leur a parlé de ce problème, et P. Pansu pour les discussions qu'ils ont eues avec lui sur les billards.

I. Mesures invariantes sur des billards convexes.

On se place dans $\mathbf{R}^n$, muni de sa métrique riemannienne canonique, et on identifiera chaque fois que cela est nécessaire vecteurs tangents et vecteurs cotangents à l'aide de cette métrique.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, à bord C^1 et soit $n = n(x)$ la normale unitaire sortante sur $\partial\Omega$. On note $\partial_+ S^*\bar{\Omega}$ (resp. $\partial_- S^*\bar{\Omega}$) l'ensemble des vecteurs cotangents (x,ξ) au-dessus de $\partial\Omega$ tels que $\langle \xi, n(x)\rangle > 0$ (resp. $\langle \xi, n(x)\rangle < 0$), et j l'involution de $\partial_- S^*\bar{\Omega} \cup \partial_+ S^*\bar{\Omega}$ échangeant un vecteur et son symétrique par rapport à l'espace tangent à Ω.

On note enfin $S^H\bar{\Omega} = S^*\Omega \cup \partial_- S^*\bar{\Omega} \cup \partial_+ S^*\bar{\Omega}$, et $B(\Omega) = S^H\bar{\Omega}/\sim$, où $\sim$ identifie un point et son image par j.

Si Ω est convexe, la trajectoire du billard issue de $(x,\xi) \in B(\Omega)$ est celle d'un point matériel partant à $t = 0$ du point x à la vitesse ξ, et se déplaçant dans Ω avec réflexions élastiques sur $\partial\Omega$. Hélas, contrairement à ce que l'on pourrait croire un peu rapidement, cette définition ne permet pas toujours de définir la position du point matériel à tout instant t ! En effet, pour certains ouverts convexes Ω, il existe des points (x,ξ) pour lesquels la série des temps successifs entre rebonds converge. (voir [Ha]). Pour un temps t supérieur à la somme de cette série, il n'est plus possible de définir naturellement la position du point. Néanmoins, on montre (voir [KS]) que de tels points (x,ξ) forment un ensemble négligeable pour la mesure de Liouville. On peut donc définir presque partout un flot (G_t) sur $B(\Omega)$, laissant invariante la mesure de Liouville λ (projetée sur $B(\Omega)$) et on dira que Ω est un billard ergodique si le système dynamique $(B(\Omega), (G_t), \lambda)$ l'est. Néanmoins, du fait que (G_t) n'est pas continu, cette définition ne permet pas de parler simplement de mesures de Radon invariantes par (G_t). On recourt alors à la définition suivante.

Pour $t \in \mathbf{R}, (x,\xi) \in S^*\mathbf{R}^n$, posons $F_t(x,\xi) = (x + t\xi, \xi)$.

Pour $\alpha \in S^H\bar{\Omega}$, on pose

$$\tau_\pm(\alpha) = \pm \min\{t > 0, F_{\pm t}(\alpha) \in \partial S^*\bar{\Omega}\} \quad \text{si} \quad \alpha \in S^*\Omega \cup \partial_\mp S^*\bar{\Omega}\ ,$$
$$\tau_\pm(\alpha) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \in \partial_\pm S^*\bar{\Omega}\ .$$

La convexité de Ω permet alors de montrer que $\tau_\pm$ est continue sur $S^H\bar{\Omega}$. On considère alors les applications continues propres suivantes

$$(2) \qquad \begin{array}{rll} p : S^H\bar{\Omega} & \to \partial_+ S^*\bar{\Omega}\ , & T : \partial_+ S^*\bar{\Omega} \ \to \partial \\ \alpha & \mapsto F_{\tau_+(\alpha)}\alpha & \qquad\qquad \alpha \mapsto p \circ j(\alpha) \end{array}$$

et, si μ est une mesure de Radon sur $S^H\bar{\Omega}$, on définit une nouvelle mesure de Radon sur $\partial_+ S^*\bar{\Omega}$ par

$$(3) \qquad b(\mu) = -\frac{1}{\tau_-} p(\mu)\ .$$

On note $\mathfrak{M}_\partial$ l'ensemble des mesures de Radon sur $\partial_+ S^*\bar{\Omega}$ invariantes par T, et $\mathfrak{M}_i$ l'ensemble des mesures de Radon μ sur $S^H\bar{\Omega}$ dont le prolongement μ^0 par 0 à l'ouvert $S^H\bar{\Omega} \cup S^*\bar{\Omega}^c$ de $S^*\mathbf{R}^n$ satisfait à :

(4) $\xi.\partial_x\mu^0$ est une mesure de Radon portée par $\partial_- S^*\bar{\Omega} \cup \partial_+ S^*\bar{\Omega}$, et $j(\xi.\partial_x\mu^0) = -\xi.\partial_x\mu^0$.

On montre alors facilement la

Proposition 2.— *L'application b réalise une bijection entre $\mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{M}_\partial$, d'inverse donné par*

$$\int f db^{-1}(m) = \int_{\partial_+ S^*\bar{\Omega}} \int_{\tau_-}^{0} f \circ F_s ds dm \ .$$

De plus, $b(\mu) = -\xi.\partial_x\mu^0_{|\partial_+ S^*\bar{\Omega}}$.

On notera que $b(\mu) \geq 0$ si $\mu \geq 0$. Voici un cas particulier d'élément de $\mathfrak{M}_i$; si λ^0 est le prolongement de la mesure de Liouville λ par 0 à $S^*\mathbf{R}^n$, on a

$$\xi.\partial_x\lambda^0 = -\xi.n(x)\delta_{\partial\Omega}(x)d\sigma(\xi)$$

Ainsi $\lambda \in \mathfrak{M}_i$, et $\ell = b(\lambda)$ est donnée par

$$\ell(dxd\xi) = \xi.n(x)\delta_{\partial\Omega}(x)d\sigma(\xi) \ .$$

De plus, il est facile de voir que Ω est un billard ergodique si et seulement si le système dynamique $(\partial_+ S^*\bar{\Omega}, T, \ell)$ est ergodique. (T est "l'automorphisme dérivé" du flot (G_t)).

II Réduction à un résultat de propagation des singularités.

1. Mesures de défaut microlocales.

Si $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $L^2(\mathbf{R}^n)$ supportée dans un compact fixe K et convergeant faiblement vers 0, on montre (voir [H], [C], [G1], [T]) que les formes linéaires L sur $\Psi^0_{phg}(\mathbf{R}^n)$ telles que, pour un ensemble $S \subset \mathbf{N}$ infini,

(5) $$\forall A \in \Psi^0_{phg}(\mathbf{R}^n), (Au_k, u_k) \xrightarrow[k\to\infty, k\in S]{} L(A)$$

sont de la forme

(6) $$L(A) = \int \sigma_0(A) d\mu \ ,$$

où μ est une mesure de Radon ≥ 0 sur $S^*\mathbf{R}^n$ (portée par S^*K). De telles mesures sont appelées mesures de défaut microlocales (ou H-mesures) de la suite (u_k). Elles forment un ensemble compact pour la topologie vague. Plus précisément, en utilisant une quantification positive des symboles, on montre qu'il existe une suite (μ_k) de mesures ≥ 0 sur $S^*\mathbf{R}^n$, avec $\mu_k(S^*\mathbf{R}^n) = \|u_k\|^2$, telle que (5) et (6) équivalent à

$$\mu_k \underset{k\in S, k\to\infty}{\rightharpoonup} \mu \tag{7}$$

pour la convergence étroite sur $S^*\mathbf{R}^n$.

Soit maintenant Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{R}^n$, à bord $W^{2,\infty}$, et soit (φ_k) une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k \\ \varphi_{k|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

On note alors $u_k = \varphi_k 1_\Omega$. L'un des principaux ingrédients de la preuve du théorème 1 est la

Proposition 3.— *Si μ est une mesure de défaut microlocale associée à (u_k), alors* $\mathrm{supp}\mu \subset S^*\bar{\Omega}$, *et*

$$\xi.\partial_x\mu = \theta\ ,$$

où θ est une distribution portée par $S^*\mathbf{R}^n_{|\partial\Omega}$ dont la restriction à $S^H\bar{\Omega} \cup S^*\bar{\Omega}^c$ est une mesure vérifiant $j(\theta) = -\theta$.

En d'autres termes, si de plus Ω est convexe, la proposition 3 signifie que $\mu_{|S^H\bar{\Omega}}$ est un élément de l'espace $\mathfrak{M}_i$ défini au §I, ou encore que $b(\mu_{|S^H\bar{\Omega}})$ est invariante par T. Nous énoncerons au §III une version plus précise de la proposition 3, et donnerons une idée de la démonstration. Dans l'immédiat, nous montrons comment modifier les arguments de [C] pour accéder au théorème 1.

2. Convergence en moyenne.

On conserve les notations précédentes, et on choisit une suite (μ_k) de probabilités sur $S^*\mathbf{R}^n$ telle que (5) et (6) équivalent à (7). On a alors :

Proposition 4.— *La suite (μ_k) converge vaguement vers $\lambda^0 = 1_{S^*\Omega}dxd\sigma(\xi)$ au sens de Cesaro.*

Pour montrer la proposition 4, on commence par remarquer que puisque μ_k et λ^0 sont des probabilités et que $\lambda^0(S^*\Omega) = 1$, il suffit de montrer la convergence vague sur $S^*\Omega$. On peut alors appliquer comme dans [C] la méthode de l'équation de la chaleur. En effet, par le théorème taubérien de Karamata (voir par exemple [T]), il suffit de montrer que, pour tout $a \in C_c^\infty(S^*\Omega), a \geq 0$, on a

$$\text{(9)} \qquad \frac{\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_k t} \int a d\mu_k}{\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_k t}} \underset{t \to 0+}{\longrightarrow} \int_{S^*\Omega} a d\lambda \ .$$

Si $A \in \Psi^0_{phg}(\mathbf{R}^n)$ a pour symbole principal a, (9) s'écrit encore, notant Δ_D le Laplacien de Dirichlet sur Ω,

$$\text{(10)} \qquad \frac{Tr(A 1_\Omega e^{t\Delta_D})}{Tr(e^{t\Delta_D})} \underset{t \to 0+}{\longrightarrow} \int_{S^*\Omega} a d\lambda \ ,$$

où les traces s'entendent au sens des opérateurs sur $L^2(\Omega)$. Compte tenu de l'hypothèse faite sur le support du symbole de A, on a

$$Tr(A 1_\Omega e^{t\Delta_D}) = Tr(A\varphi e^{t\Delta_D}) = Tr(A\varphi e^{t\Delta_D \varphi} \varphi),$$

où $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vérifie en particulier $\varphi a = a$. Le principe de "ne pas sentir la frontière" de Kac [K] permet alors de montrer que, pour un $\varepsilon > 0$,

$$|Tr(A\varphi(e^{t\Delta_D} - e^{t\Delta})\varphi)| \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{t}}, t > 0 \ ,$$

tandis que

$$Tr(e^{t\Delta_D}) \sim \frac{\text{vol } \Omega}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

On est alors ramené au calcul direct de

$$\lim_{t \to 0+} \frac{(4\pi t)^{n/2}}{\text{vol}\Omega} Tr(A\varphi e^{t\Delta} \varphi),$$

qui ne pose pas de difficultés. (phase stationnaire).

3. Utilisation de l'ergodicité.

On suppose cette fois que Ω est convexe et que le billard est ergodique, et on utilise les notations du §I. Soit $\widetilde{S}$ l'ouvert $\bigcup_{t \in \mathbf{R}} F_t(\partial_+ S^*\bar{\Omega})$ de $S^*\mathbf{R}^n$. Notons que, si $\alpha \in \widetilde{S}$, il existe un unique $t = t(\alpha) \in \mathbf{R}$ tel que $F_t(\alpha) \in \partial_+ S^*\bar{\Omega}$, et l'application $\alpha \mapsto t(\alpha)$ est continue. On pose alors

$$\widetilde{p}(\alpha) = F_{t(\alpha)}(\alpha)$$

Alors $\widetilde{p} : \widetilde{S} \to \partial_+ S^*\bar{\Omega}$ est continue, prolonge $p : S^H\bar{\Omega} \to \partial_+ S^*\bar{\Omega}$, et pour tout compact $K \subset \partial_+ S^*\bar{\Omega}$ et tout compact K' de $\mathbf{R}^n, S^*K' \cap \tilde{p}^{-1}(K)$ est compact. Soit alors $\varphi \in C_c(\mathbf{R}^n), \geq 0$, valant 1 près de $\bar{\Omega}$. On pose

$$m_k = -\frac{1}{\tau_-}\tilde{p}(\varphi\mu_k) \tag{11}$$

Notons que si μ est une mesure de défaut pour (u_k) avec $\mu_k \underset{k\in S}{\rightharpoonup} \mu$, on a encore $\varphi\mu_k \underset{k\in S}{\rightharpoonup} \mu$, donc $m_k \underset{k\in S}{\rightharpoonup} b(\mu)$. Les propositions 2 et 3 permettent alors d'affirmer que

$$T(m_k) - m_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0 \ , \tag{12}$$

vaguement sur $X = \partial_+ S^*\bar{\Omega}$. De même, la proposition 4 entraîne

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} m_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \ell = b(\lambda) \ , \tag{13}$$

vaguement sur X.

Enfin, puisque μ_k est une probabilité, on a

$$\int_X h dm_k \leq \int_X h d\ell = 1 \ , \tag{14}$$

où $h = -\tau_-$ est continue > 0 sur X. Le théorème 1 est alors conséquence du lemme suivant.

Proposition 5.— *Soient X un espace localement compact, métrisable, dénombrable à l'infini, $T : X \to X$ une application continue, et ℓ une mesure de Radon ≥ 0 finie sur X, invariante par T. On suppose que le système dynamique (X, T, ℓ) est ergodique. Alors, pour toute suite (m_k) de mesures de Radon ≥ 0 sur X vérifiant (12), (13), (14), il existe une partie $S \subset \mathbf{N}$ telle que*

$$\frac{1}{N}\#S \cap [1, N] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1 \ , \tag{i}$$

$$m_k \underset{k\to\infty, k\in S}{\longrightarrow} \ell \quad \textit{vaguement sur} \quad X \ . \tag{ii}$$

Principe de la démonstration. On montre d'abord que, pour $f, g \in C_c(X), \varepsilon > 0$, l'ensemble $S = \{k, |\int g d\ell \int f dm_k - \int f d\ell \int g dm_k| \leq \varepsilon\}$ est de densité 1 : c'est là qu'intervient l'ergodicité de T. Puis par un procédé diagonal, et en utilisant (14), on en déduit l'existence d'un ensemble de densité 1 sur lequel

$$\forall f, g \in C_c(X), \int gh d\ell \int fh dm_k - \int fh d\ell \int gh dm_k \to 0 \ .$$

On conclut alors en réutilisant (13) et (14).

III Le théorème de propagation.

Dans ce paragraphe, on donne une idée de la preuve de la proposition 3. Pour cela, on réinterprète d'abord les mesures de défaut microlocales de la suite (u_k) en termes de mesures semi-classiques.

1. Mesures semi-classiques

Soit (u_k) une suite bornée de $L^2(\mathbf{R}^n)$, supportée dans un compact fixe, et soit (h_k) une suite de réels > 0 tendant vers 0. Les distributions tempérées μ telles que, pour un ensemble $S \subset \mathbf{N}$ infini, on ait

$$\forall a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n),\ (a(x, h_k D)u_k, u_k) \underset{k\to\infty, k\in S}{\longrightarrow} \langle \mu, a\rangle \tag{15}$$

sont des mesures positives sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ de masses totales bornées par $\overline{\lim}_{k\in S}\|u_k\|^2$ (voir [G1], [GL]), appelées mesures semi-classiques associées à la suite (u_k). Bien sûr, si (15) a lieu, elle est vraie pour des symboles a moins réguliers, par exemple les $a \in C_0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ tels que

$$\sup_{|\alpha|\leq n+1} |\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-n-1}\ . \tag{16}$$

L'invariance par changements de variables C^1 des opérateurs pseudodifférentiels semi-classiques $a(x, hD)$ associés à de tels symboles permet de définir de la même manière les mesures semi-classiques associées à une suite bornée de $L^2(M, \rho)$ où M est une variété compacte C^1 munie d'une densité $\rho > 0$; ce sont alors des mesures de Radon sur T^*M.

2. Cas d'un problème au bord.

Si maintenant $u_k = \varphi_k 1_\Omega$, où les φ_k vérifient (8) et $\|\varphi_k\| = 1$, on désigne par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des mesures semi-classiques associées à (u_k) et à $h_k = \lambda_k^{-1/2}$. Par ailleurs, on a facilement

$$\|\varphi_k\|_{H^1} \leq Ch_k^{-1}, \|\varphi_k\|_{H^2} \leq Ch_k^{-2}, \tag{17}$$

et, si $v_k = h_k \frac{\partial u_k}{\partial n}$,

$$\|v_k\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\ . \tag{18}$$

La dernière estimation permet de définir l'ensemble $\mathcal{N}$ des mesures semi-classiques associées à (v_k), $M = \partial\Omega$ étant munie de la mesure de Lebesgue. L'équation (8) s'écrit encore

$$(-h_k^2\Delta - 1)u_k = h_k v_k \otimes \delta_{\partial\Omega}\ , \tag{19}$$

et on en déduit aisément que tout $\mu \in \mathfrak{M}$ vérifie

$$(|\xi|^2 - 1)\mu = 0\ . \tag{20}$$

En utilisant (17) et (20), on prouve le

Lemme 6.— *Si $\mu \in \mathfrak{M}$ satisfait à (15), alors*

$$\forall A \in \Psi^0_{phg}(\mathbf{R}^n), (Au_k, u_k) \xrightarrow[k\to\infty, k\in S]{} \int \sigma_0(A)(x,\xi)\mu(dxd\xi)$$

En d'autres termes, dans ce cas les deux notions de mesures coincident. La proposition 3 est alors conséquence de l'équation de transport suivante :

Théorème 7.— *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbf{R}^n$, à bord $W^{2,\infty}$. Avec les notations ci-dessus, toute $\nu \in \mathcal{N}$ est portée par $\overline{\mathcal{H}} = \{(x,\gamma) \in T^*\partial\Omega, |\gamma| \leq 1\}$. De plus, pour toute $\mu \in \mathfrak{M}$, il existe $\nu \in \mathcal{N}$ telle que*

$$\xi.\partial_x \mu = -\frac{1}{2} 1_{\partial\Omega}(x) \int_{|\gamma|\leq 1} \nu(x, d\gamma) \frac{\delta(\xi_-\xi_+(x,\gamma)) - \delta(\xi_-\xi_-(x,\gamma))}{\langle \xi_+(x,\gamma) - \xi_-(x,\gamma), n(x)\rangle}, \tag{21}$$

où, pour $\gamma \in T^*_x\partial\Omega, |\gamma| \leq 1, \xi_\pm(x,\gamma)$ sont les deux vecteurs de norme 1 se projetant orthogonalement sur γ.

3. Démonstration du théorème 7.(abrégée)

Elle suit d'assez près la preuve du théorème de propagation des singularités pour des problèmes au bord (voir par exemple [MS]). On commence par écrire une identité à partir de la formule (19) ; si $A_k = a(x, h_k D)$, $a \in \mathcal{S}$, on a

$$(\frac{i}{h_k}[A_k, P_k]u_k, u_k) = i(A_k(v_k \otimes \delta_{\partial\Omega}), u_k) - i(A_k u_k, v_k \otimes \delta_{\partial\Omega}) . \tag{22}$$

Si on prend $\mu \in \mathfrak{M}$ associée à un ensemble d'indices S, le premier membre de (22) converge, quand $k \to \infty, k \in S$, vers $2\langle \xi\partial_x\mu, a\rangle$. Il s'agit donc d'identifier le second membre en termes de (v_k) uniquement, et on devra donc encore utiliser l'équation (19).

On se ramène alors localement au cas d'un demi-espace $\Omega = \{(t,y), t \geq 0, y \in \mathbf{R}^{n-1}\}$. Bien sûr, le changement de variables nous oblige à travailler avec des symboles a seulement lipschitziens en y, mais très réguliers en t et dans les variables duales (τ, η). Les restes du calcul symbolique donnent alors des opérateurs bornés en norme L^2 par h_k. Comme ces opérateurs sont pseudodifférentiels "réguliers" en (t,τ), ce gain "d'une dérivée" permet de compenser la singularité $H^{-1/2-\varepsilon}$ de $\delta_{t=0}$ dans des termes du type $(A_k(v_k \otimes \delta_{t=0}), u_k)$, et de négliger ces restes à la limite.

Si maintenant $a = a(t,y,\tau,\eta)$, on écrit

$$a = a_0(t,y,\eta) + a_1(t,y,\eta)\tau + a_2(t,y,\tau,\eta)p(y,\tau,\eta) , \tag{23}$$

où p est le symbole principal de P_k, en vertu du théorème de préparation de Weierstrass.

La contribution du troisième terme, une fois quantifiée (ce qui nécessite l'usage du calcul symbolique cité plus haut et de la première estimée (17), car $p(\tau, \eta)$ ne tend pas vers zéro à l'infini), s'élimine par symétrie en utilisant l'équation (19).

Il reste à identifier les contributions des deux premiers termes, ce qui se fait à l'aide des conditions aux limites $u_{k|t=0} = 0, h_k \frac{\partial u_k}{\partial t}|_{t=0} = -v_k(1 + |\phi'|^2)^{-1/2}$, où $x_n = \phi(x')$ est une équation de $\partial\Omega$.

Dans ces manipulations, il faut de plus prendre garde que les opérateurs dans le second membre de (23) ne sont plus régularisants en t à h fixé, ce qui rend délicate à interpréter l'expression $(B_k(v_k \otimes \delta_{t=0}), u_k)$, où B_k est un tel opérateur.

On résout cette difficulté en réintroduisant une troncature spectrale en τ (ce qui est possible car le premier membre est à décroissance rapide en τ), mais qui approche beaucoup mieux l'unité, i.e. $\psi(h_k^N D_t)$ avec $N >> 1$ ($N = 3$ suffit). L'usage de la seconde estimée (17) permet de montrer que

$$(\psi(h_k^N D_t) h_k \partial_t u_k)_{|t=0^+} \sim \frac{1}{2} h_k \partial_t u_{k|t=0^+},$$

et d'en déduire que seul le second terme dans (23) a une contribution dans (22), à savoir

$$\langle 2\xi \partial_x \mu, a \rangle = \int a_1(0, y, \eta) \nu(dy d\eta), \tag{24}$$

où $\nu \in \mathcal{N}$ est associée à S.

Partant maintenant de $b = b(y, \eta)$ régulier à support disjoint de $\bar{\mathcal{H}}$ (c'est à dire supporté dans la zone elliptique $p \neq 0$), on peut écrire

$$0 = b\tau - b_2 p$$

et en quantifiant cette formule comme précédemment, on obtient $\int b d\nu = 0$. Il en résulte la première assertion du théorème. La seconde résulte alors de (24) et de l'expression de a_1 en fonction de a et des deux racines en τ de $p(y, \tau, \eta) = 0$.

Remarque : L'équation de transport (21) dit en fait beaucoup plus que ce que l'on utilise dans la démonstration du théorème 1. Ainsi, si le bord est plus régulier, on trouve que, dans la partie "glancing", ν ne charge que la zone "gliding", et on obtient un théorème de propagation le long des rayons glissants.

IV Extensions.

- Il serait intéressant de généraliser le théorème 1 à des ouverts à coins, au problème de Neumann. Dans ces deux cas, la difficulté principale sera d'établir une version de l'équation de transport (21).

- On peut également se demander sous quelles hypothèses le théorème 1 reste vrai pour des suites de fonctions propres approchées. Dans ce cas, pour un second membre $0(h_k)$, l'équation de transport reste vraie ; en revanche, la proposition 4 (convergence en moyenne) nécessite beaucoup plus de rigidité.

Bibliographie

[B] L.A. Bunimovitch, On the Ergodic properties of Nowhere Dispersive Billiards, Commun. Math. Phys. 65, 295-312 (1979).

[C] Y. Colin de Verdière, Ergodicité et fonctions propres du laplacien, Commun. Math. Phys. 102, 497-502 (1985).

[D] D. Delande, in "Chaos and Quantum Physics" (Les Houches, 1989) eds. M.J. Giannoni, A. Voros et J. Zinn-Justin, North-Holland (1991).

[G1] P. Gérard, Microlocal Defect Measures, Commun. Partial Diff. Equations 16 (11), 1761-1794 (1991).

[G2] P. Gérard, Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, 1990-1991, exposé n° XVI, Ecole Polytechnique.

[GL] P. Gérard, et E. Leichtnam, à paraître.

[Ha] B. Halpern, Strange billiards table, Trans. AMS 232, 297-305 (1977).

[HMR] B. Helffer, A, Martinez et D. Robert, Ergodicité et limite semi-classique, Commun Math. Phys. 109, 313-326 (1987).

[H] J.W. Helton, An operator algebra approach to partial differential equations..., Indiana Univ. Math J. 26, 997-1018 (1977).

[Kac] M. Kac, Can one hear the shape of a drum, Amer. Math. Monthly 73, 1-23 (1966).

[KS] A. Katok, J.-M. Strelcyn, Invariant Manifolds, Entropy and Billiards...., Lecture Notes in Math. 1222, Springer (1986).

[L1] V.F. Lazutkin, On the asymptotics of the eigenfunctions of the Laplacian, Soviet Math Dokl. 12, 1569-1572 (1971).

[L2] V.F. Lazutkin, The KAM theory and Asymptotics of Spectrum of elliptic operators, Springer (1991).

[LV] P. Lebœuf et A. Voros, Multiplicative formulation of Quantum Mechanics : a new setting for Semi-classical Analysis, actes du Colloque Franco-Japonais : "Analyse algébrique des perturbations singulières", CIRM, Luminy, 21-26 oct.1991.

[Si] Ya G. Sinai, Dynamical systems with elastic reflections..., Russ. Math. Surveys 25, 137-189 (1970).

[S1] A.I. Shnirelman, Ergodic Properties of Eigenfunctions, Usp. Mat. Naouk 29, 181-182 (1974).

[S2] A.I. Shnirelman, On the asymptotic properties of eigenfunctions in the regions of chaotic motions, appendice à [L2].

[T] L. Tartar, H-measures, a new approach..., Proc. Roy. Soc. Ed., 115 A (1990), 193-230.

[Tay] M. Taylor, Pseudodifferential Operators, Princeton (1981).

[Z] S. Zelditch, Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces, Duke Math. J. 55, 919-941 (1987).

Patrick Gérard

Université Paris-Sud

Département de Mathématiques

Bât. 425

91405 Orsay cedex

Eric Leichtnam

Ecole Normale Supérieure

45, rue d'Ulm

75230 Paris cedex 05