B. Perthame

Remarques sur la formulation cinétique des lois de conservation scalaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n° 6, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A6_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

REMARQUES SUR LA FORMULATION CINETIQUE DES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRES

B. PERTHAME

Exposé n° VI

20 Novembre 1990

Introduction

Les résultats qui suivent ont été obtenus en collaboration avec P.L. LIONS et E. TADMOR [9].

Nous considérons une loi de conservation scalaire multidimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i(u)}{\partial x_i}=0 \quad t\geq 0\,, x\in \mathbf{R}^n\,, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\in L^1\cap L^\infty(\mathbf{R}^N)\,, \tag{2}$$

satisfaisant aux conditions d'entropie de Lax

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \eta_i(u)}{\partial x_i}\leq 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}' \tag{3}$$

pour toute fonction convexe S et avec

$$\eta_i'(\cdot)=S'(\cdot)a_i(\cdot), a_i(\cdot)=A_i'(\cdot)\in C^1(\mathbf{R}) \tag{4}$$

Dans [13], L.TARTAR montre grâce à la compacité par compensation que, en dimension $n=1$, des suites de données initiales (2) convergent faiblement dans $L^2(\mathbf{R})$ peuvent produire des solutions convergent fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$.

Ceci nécessite une hypothèse sur $A(u)$: il n'existe aucun intervalle de $\mathbf{R}$ sur lequel $a(\cdot)$ est constant. Nous allons montrer comment étendre ce résultat à une dimension n quelconque en s'appuyant sur une nouvelle formulation des lois de conservation (1).

Nous obtiendrons alors la compacité grâce aux lemmes de régularité en moyenne. Nous montrerons également des relations avec les effets régularisants hypoelliptiques. Enfin nous indiquerons quelques modèles de type "Boltzmann" susceptibles de donner, lorsque le libre parcours moyen tend vers 0, des systèmes de la dynamique des gaz.

I. Modèles cinétiques et lois de conservation scalaires.

I.1 Formulation cinétique.

Nous proposons la formulation suivante des lois de conservations (1)-(3). Soit $f(x,v,t)$, $x \in \mathbf{R}^N, v \in \mathbf{R}, t \geq 0$ solution du problème :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(v) \cdot \nabla_x f = \frac{\partial m}{\partial v} \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_v), \tag{4}$$

avec

$$f(x,v,t) = \chi_{u(x,t)}(v) \ , \ \int_{\mathbf{R}} f(x,v,t)dv = u(x,t) \tag{5}$$

$$m \quad \text{est une mesure positive bornée sur} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^{n+1}, \tag{6}$$

enfin $\chi_u(v)$ est définie par la formule

$$\chi_u(v) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad 0 \leq v \leq u \ , \\ -1 & \text{si} \quad u \leq v \leq 0 \ , \\ \ \ 0 & \text{sinon} \quad , \end{cases} \tag{7}$$

et $a(\cdot) = (a_1(\cdot), a_2(\cdot), \cdots, a_n(\cdot))$.

Pour une mesure m donnée on ne peut pas résoudre (6) dans L^∞, néanmoins nous avons équivalence entre (4)-(6) et (1)-(3).

Théorème 1.— *soit $u(x,t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \ ; L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^N))$ alors u est solution de (1)-(3) si et seulement si u est solution de (4)-(6).*

Nous renvoyons à [9] pour une démonstration rigoureuse et d'autres commentaires sur ce théorème et donnons l'idée de la démonstration.

Démonstration. Soit $u(x,t) \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \ ; L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}^N))$ et notons m la distribution définie par

$$\partial_t \chi_{u(x,t)}(v) + a(v) \cdot \nabla_x \chi_{u(x,t)}(v) = \frac{\partial m}{\partial v}.$$

Multipliant cette égalité par $S'(v)$, où $S(\cdot)$ est une fonction C^2 et intégrant en v nous obtenons

$$\partial_t \int_{\mathbf{R}} S'(v) \chi_{u(x,t)}(v) dv + \operatorname{div}_x \int_{\mathbf{R}} a(v) S'(v) \chi_{u(x,t)}(v) dv = \langle S'(v), \partial_v m \rangle,$$

ou encore

$$\partial_t S(u) + \operatorname{div}_x \eta(u) = -\langle S''(v), m \rangle \ .$$

(3) est donc réalisée pour tout S convexe si et seulement si $\langle S''(v), m\rangle \geq 0$ pour tout $S''(v)$ fonction positive, c'est à dire si et seulement si m est une mesure positive. ∎

Des bornes sur m s'obtiennent en choisissant $S''(v) = 1$ ou $\delta_w(v)$:

$$\int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^{N+1}} dm(x, v, t) \leq \frac{1}{2} \|u_o(X)\|_{L^2}^2 \ , \tag{8}$$

$$\int_{\mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x^N} dm(x, v, t) \leq \|u_0(X)\|_{L^1} \forall v \ , \tag{9}$$

$$m(\cdot, v, \cdot) = 0 \quad \text{si} \quad v \notin [\inf u_0, \sup u_0]. \tag{10}$$

I.2. Modèle de "Boltzmann" associé

Cette formulation (5)-(7) des lois de conservation peut être utilisée, en particulier, pour construire une **approximation hyperbolique semi-linéaire** de l'équation quasi-linéaire (1). Nous introduisons pour cela le modèle de type "Boltzmann"

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + a(v) \nabla_x f_\varepsilon + \left(f_\varepsilon - \chi_{u_\varepsilon(x,t)}(v) \right) / \varepsilon = 0, \\ f_\varepsilon(x, v, o) = \chi_{u_0(x)}(v) \ , \ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon(x, v, t) dv = u_\varepsilon(x, t) \ . \end{cases} \tag{11}$$

Nous montrons dans Perthame et Tadmor [11] que ce système admet une unique solution. En fait on peut refaire sur (11) la théorie de Kruzkov [8], pour les lois de conservation. D'autre part on voit, puisque $-1 \leq \chi_u(v) \leq +1$ et $v\chi_u(v) \geq 0$, que $f(\cdot, v, \cdot)$ a le même signe que v et que $-1 \leq f(\cdot, \cdot, \cdot) \leq +1$; on en déduit facilement que

$$m_\varepsilon(x, v, t) = \int_{-\infty}^{v} (\chi_{u_\varepsilon(x,t)}(w) - f_\varepsilon(x, w, t))/_\varepsilon dw \geq 0 \ , \tag{12}$$

et on retrouve donc (4) pour f_ε. Les bornes (8)-(10) sur m_ε s'en déduisent également.

Le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (11) est justifié dans [11] : $u_\varepsilon(x, t) \to u(x, t)$ dans $L^1([0, T] \times \mathbf{R}^{N+1})$ et on en déduit donc (4)-(6) très facilement.

Notons aussi que (12) est equivalent à un un principe variationnel dû à Y.Brenier [1] : pour toute fonction $\Sigma(v)$ croissante.

$$\inf \left\{ \int_{\mathbf{R}} \Sigma(v) f(v) dv \ ; -1 \leq f(v) \leq +1, v f(v) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} f(v) dv = u \right\} \tag{13}$$

est atteint par la fonction $f = \chi_u(v)$.

I.3. Généralisation

Considèrons maintenant l'équation macroscopique

$$\text{(1')} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i(u)}{\partial x_i} + G(x,u,t) = 0 \ ,$$

avec $G \in C_b^1(\mathbf{R}^{n+2})$ et

$$\text{(14)} \qquad g(\cdot,\cdot,u) = \frac{\partial G}{\partial u}(\cdot,\cdot,\cdot) \geq 0 \ , G(x,0,t) = 0 \ ,$$

Afin d'approcher (1'), on propose dans [11] l'équation cinétique

$$\text{(11')} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + a(v).\nabla_x f_\varepsilon + g(x,v,t) f_\varepsilon + (f_\varepsilon - \chi_{u_\varepsilon(x,t)}(v))/\varepsilon = 0 \ , \\ f_\varepsilon(x,v,o) = \chi_{u_0(x)}(v), u_\varepsilon(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon(x,v,t) dv. \end{cases}$$

On a encore $-1 \leq f_\varepsilon \leq +1$, $v f_\varepsilon(x,v,t) \geq 0$ et l'inégalité (12) (ou (13)) est donc encore réalisée et la formulation cinétique de (1') sera

$$\text{(15)} \qquad \partial_t f + a(v) \nabla_x f + g(x,v,t) f = \partial_v m \ , \ f = \chi_{u(x,t)}(v),$$

où m est encore une mesure positive. Néanmoins les conditions d'entropie pour (1') donnent plus précisément, pour toute fonction S convexe :

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \eta_i(u)}{\partial x_i} + S'(u) G(x,u,t) \leq 0 \ ,$$

donc pour (15) on trouve que

$$\int_{\mathbf{R}} S'(v)(g\chi_u - \partial_v m) dv = S'(u) G(x,u,t) - \int_{\mathbf{R}} S''(v)(G\chi_u - m) dv \geq S'(u) G(x,u,t)$$

c'est à dire que la mesure m vérifie

$$\text{(16)} \qquad m \geq G(x,v,t) \chi_{u(x,t)}(v).$$

En d'autres termes, une autre formulation cinétique de (15) est

$$\text{(15')} \qquad \partial_t f + a(v).\nabla_x f + G(x,u(x,t),t) \delta_{u(x,t)}(v) = \partial_v \tilde{m} \ , \ \tilde{m} \geq 0 \ .$$

Notons que (15') est equivalent à (1'), même sans faire la première des hypothèses (14).

II. Régularité par moyennisation - régularité L^P.

Une application de la formulation cinétique des lois de conservation scalaires consiste en l'utilisation des lemmes généraux pour les équations de transport afin d'obtenir des estimations sur la solution de (1).

II.1 Lemmes de régularité en moyenne.

Ces lemmes ont été obtenus pour la première fois dans F.Golse, B.Perthame et R. Sentis [5] et une version simple est la suivante, dûe à F.Golse, B.Perthame, P.L. Lions et R.Sentis [6].

Lemme 2.— *Soit $f \in L^2(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_v^n \times \mathbf{R}_t)$ solution de*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f = g(x,v,t) \in L^2(\mathbf{R}^{2n+1}) \tag{17}$$

alors pour tout ensemble V borné

$$\| \int_V f(x,v,t)dv \|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbf{R}^{n+1})} \leq C \|f\|_{L^2}^{1/2} \|g\|_{L^2}^{1/2}. \tag{18}$$

Nous avons utilisé la notation

$$\|u(y)\|_{\dot{H}^{1/2}} = \| \ |\xi|^{1/2} \hat{u}(\xi)\|_{L^2}$$

où $\hat{u}(\xi)$ est la transformée de Fourier de $u(y)_0$.

Les versions de R. Di Perna, P.L.Lions [2] et R.Di Perna, P.L.Lions et Y.Meyer [3] de ce lemme permet entre autre de traiter le cas où le second membre est de la forme $\text{div}_v g$ où $g \in (L^1(\mathbf{R}^{2n+1}))^n$ (en fait on pourrait mettre autant de dérivées en v que l'on veut). Le résultat de régularité s'exprime alors, non plus dans $H^{1/2}$, mais dans $W^{s,p}$ pour s et p, convenables. P.Gérard [4] a obtenu un résultat de compacité pour g compact dans H^{-1} et une version abstraite de ces résultats qui les relient aux arguments de compacité par compensation.

Ce type de lemme permet de donner, entre autres, des conditions de non-dégénérescence du problème (1). Introduisons la propriété

$$\forall (\tau, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \setminus \{0,0\}, \text{mes } \{v / \tau + a(v).\xi = 0\} = 0 \ . \tag{19}$$

Théorème 3.— *Sous l'hypothèse (19), si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de solutions de (1)-(3) bornées dans $L^\infty(0,\infty \ ; L^1 \cap L^\infty, (\mathbf{R}^n))$, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est relativement compacte dans $L^p_{\text{loc}}(0,\infty \times \mathbf{R}^n)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Ce théorème généralise le théorème de Tartar pour $n = 1$; la condition (19) est également une généralisation de la condition de Tartar indiquée dans l'introduction. On déduit en effet de (19) que

(19') la courbe $(v, a(v))$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ ne contient localement aucune partie d'hyperplan (pour des ensembles de mesure non nulle de v).

En fait, sous une hypothèse plus précise que (19), il est possible de donner un effet régularisant dans certains espaces de Sobolev.

Théorème 4.— *Sous l'hypothèse*

$$\forall R > 0, \exists \alpha, C > 0 \quad \textit{tels que pour tout} \quad \delta \in [0,1] \tag{20}$$

$$\sup[\text{mes}\{|v| \leq R, |\tau + a(v)\xi| \leq \delta\} \; ; |\xi|^2 + |\tau|^2 = 1] \leq C\delta^\alpha,$$

alors u vérifie pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $s \in]0$, $\frac{\alpha}{\alpha+2}[$

$$\|u\|_{W^{s,p}((\varepsilon \;,\; 1/\varepsilon) \times \mathbf{R}^n)} \leq C(s, \varepsilon \;, M, K,) \quad \text{où} \quad p = \frac{4+\alpha}{2+\alpha} \tag{21}$$

$$u \in C(0, \infty \;; W^{s,1}(\mathbf{R}^n)) \;,\; \sup_{t \geq \varepsilon} \|u(t,o)\|_{W^{s,1}} \leq C(s, \varepsilon \;, M, K) \tag{22}$$

où $M = \|u_0\|_{L^\infty}, K = \|u^0\|_{L^1}$ et α est donné par (20) pour $R = M$.

Pour l'equation de Burgers, $a(v) = v$, on sait (voir J. Smoller [12] par exemple) que (22) est vrai pour tout $s < 1$. Les exposants s obtenus ne sont donc pas optimaux.

Terminons avec un autre type de résultat, obtenus par la méthode des moments supérieurs (B. Perthame [10]).

Proposition 5.— *On suppose*

$$|v| \;\; |a'(v)| \leq C(|a(v)| + \sqrt{|a(v)|}) \tag{23}$$

alors pour tout $R \geq 0$

$$\int_0^T \int_{|x| \leq R} | \int_0^{u(x,t)} |v| \sqrt{|a(v)|} dv | dx \; dv \leq C \|u_0\|_{L^2}.$$

Si $|a(v)| \sim |v|^p$, à l'infini, pour $p > 0$, cette inégalité donne un effet régularisant dans $L^{\frac{p}{2}+2}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n)$ à partir d'une donnée initiale dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.

III. Effets régularisants hypoelliptiques

Revenant à la formulation cinétique (4)-(7), nous remarquons que

$$\partial_v^2(\chi_u) = -\partial_v(\delta_{u(x,t)}(v) - \delta_0(v)) \ .$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation (4) sous la forme d'une équation de type Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(v).\nabla_x f - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \partial_v p \tag{24}$$

où p est une mesure bornée (supérieure à $\delta_{u(x,t)}(v) - \delta_0(v)$). Sous certaines hypothèses sur $a(v)$, on pourrait également déduire des effets régularisants. En effet, (22) possède des propriétés de régularisation hypoelliptiques (L. Hörmander [7]) si $a(v)\cdot\nabla_x$ et $\frac{\partial}{\partial v}$, ainsi que leurs crochets successifs engendrent l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$. Cette condition s'explicite entièrement ici et signifie que pour tout v $\text{vect}(a(v), a'(v), a''(v), \cdots) = \mathbf{R}^n$. Elle entraîne (19') tout comme (19) mais nécessite plus de régularité sur $a(\cdot)$.

On peut également, dans le cadre simple du Lemme 2, remarquer que

Lemme 6.— *Soit $f_0(x,v) \in L^2(\mathbf{R}^{2N})$, et $f \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \ ; L^2(\mathbf{R}^{2N}))$ la solution de*

$$\partial_t f + v.\nabla_x f - \Delta_v f = 0 \ , \ f(x,v,o) = f_0(x,v),$$

alors

$$f \in L^2(\mathbf{R}^+ \ ; H^{1/3}(\mathbf{R}^{2N})).$$

Démonstration. L'estimation $\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^{2N}} |\nabla_v f|^2 < +\infty$ permet de nous ramener à la régularité en x. Grâce à une transformation de Fourier en x, v nous obtenons

$$\partial_t \hat{f} - \xi.\nabla_\eta \hat{f} + |\eta|^2 \hat{f} = 0 \ ,$$

c'est à dire

$$\hat{f}(\xi,\eta,t) = \hat{f}_0(\xi, \eta + \xi t) e^{-\int_0^t |\eta+\xi s|^2 ds} \ .$$

Donc

$$I \ := \int_{\mathbf{R}^{2N}\times\mathbf{R}^+} |\hat{f}(\xi,\eta,t)|^2 |\xi|^{2/3} d\xi d\eta dt =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{2N}\times\mathbf{R}^+} |\hat{f}_0(\xi,\eta)|^2 e^{-2\int_0^t |\eta+\xi s|^2 ds} |\xi|^{2/3} d\xi d\eta dt \ .$$

Or on a $2|\eta|^2 t + 7|\xi|^2 t^3/12 \geq \int_0^t |\eta + \xi s|^2 ds \geq |\xi|^2 t^3/12$, et

$$\int_{\mathbf{R}^{2N}\times\mathbf{R}^+} e^{-(4|\eta|^2 t + 7|\xi|^2 t^3/6)} |\xi|^{2/3} |\hat{f}_0(\xi,\eta)|^2 \leq I \leq C \int_{\mathbf{R}^{2N}} |\hat{f}_0(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta \ . \tag{25}$$

Ceci montre le lemme.

Remarque. Choisissant $\hat{f}_0$ à support borné en η, (25) montre que le résultat est en fait optimal. On renvoie à [10] pour d'autres résultats de ce type.

IV. Modèles de type "Boltzmann" et dynamique des gaz.

L'écriture de la formulation cinétique (4)-(7) répond, dans un cas relativement simple, au problème de démontrer que lorsque le libre parcours moyen ε tend vers 0, certains modèles cinétiques convergent vers des équations fluides sous la forme de systèmes hyperboliques non-linéaires. Le cas le plus classique est bien entendu l'équation de Boltzmann mais d'autres modèles plus simples semblent convenir, et permettent d'obtenir différents systèmes de la dynamique des gaz. Ces modèles sont des modèles de type B.G.K. (Batnaghar, Gross, Krook) c'est à dire des modèles de relaxation vers des fonctions d'équilibre similaire à $\chi_u(v)$ dans (7) mais adaptées au modèle dèsiré. Nous nous limitons ici au cas de la dimension 1 d'espace.

IV.1 Dynamique monodimensionnelle des gaz isentropiques monoatomiques.

Le modèle macroscopique que nous considérons est ici

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \ , \\ \dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0 \ , \end{cases} \tag{26}$$

$$p(x,t) = \frac{\rho^3(x,t)}{12} \ . \tag{27}$$

Il s'agit du seul cas où nous ayons une démonstration complète de l'existence d'une limite pour $\varepsilon \to 0$ et une formulation cinétique convenable. Des effets régularisants s'en déduisent (voir [9]).

Partons du modèle

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v.\nabla_x f_\varepsilon + (f_\varepsilon - \xi_{\rho_\varepsilon}(v - u_\varepsilon))/\varepsilon = 0 \tag{28}$$

où

$$\begin{pmatrix} \rho_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon u_\varepsilon \end{pmatrix}(x,t) = \int_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} f_\varepsilon(x,v,t) dv \tag{29}$$

$$\xi_\rho(w) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |w| \le \rho/2 \ , \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{cases} \tag{30}$$

Les techniques de compacité utilisant les lemmes de moyenne permettent de résoudre facilement (28)-(30), avec $0 \le f_\varepsilon \le 1$ supposant que $0 \le f_\varepsilon(x,v,0) \le 1$. On montre, comme dans le cas des lois de conservation scalaires que :

$$(\xi_{\rho_\varepsilon}(v - u_\varepsilon) - f_\varepsilon)/\varepsilon = -\frac{\partial^2 m_\varepsilon}{\partial v^2}$$

avec m_ε mesure positive bornée uniformément en ε. Le passage à la limite donne donc, l'écrite équivalente à (26), (27).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f = -\dfrac{\partial^2 m}{\partial v}, \\ m \quad \text{mesure bornée positive,} \\ f = \xi_\rho(v-u). \end{cases}$$

L'entropie cinétique naturelle pour (28)-(30) est

$$H(f_\varepsilon) = |v|^2 f_\varepsilon, \ ,$$

on a en effet

$$\frac{\partial \int_{\mathbf{R}} H(f_\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbf{R}} vH(f_\varepsilon)dv \leq 0$$

car

$$S(\rho,u) = \min\left\{\int_{\mathbf{R}} |v|^2 f(v)dv \ ; 0 \leq f(v) \leq 1, \int_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} f(v)dv = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}\right\}$$

est atteint pour $f(v) = \xi_{\rho(v-u)}$ et $S(\rho,u) = \rho u^2 + \rho^3/12$ est l'entropie macroscopique "naturelle" de (26) -(27). En fait on trouve également que

$$H(f_\varepsilon) = \int_{\mathbf{R}} S(v) f_\varepsilon dv$$

est aussi une entropie cinétique pour toute fonction S convexe, associée à l'entropie macroscopique

$$S(\rho,u) = \int_{\mathbf{R}} S(v)\xi_\rho(v-u)dv \ .$$

IV.2 Dynamique des gaz isentropique.

Le système est alors (26) avec la loi de pression

(31) $$p(\rho) = \frac{\rho^\gamma}{\gamma} \quad , \quad 3 \geq \gamma > 1 \ .$$

Un modèle cinétique convenable semble être

(32) $$\partial_t f_\varepsilon + v\nabla_x f_\varepsilon + (f_\varepsilon - \xi^\gamma_{\rho_\varepsilon}(v-u_\varepsilon))/\varepsilon = 0$$

ρ_ε et u_ε sont toujours donnés par (29) et on prend maintenant

$$\xi^\gamma_\rho(w) = \alpha(\rho^{\gamma-1} - \beta w^2)^\lambda_+$$

avec

$$\lambda = \frac{(3-\gamma)}{2(\gamma-1)}$$

et

$$\int_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ w^2 \end{pmatrix} \alpha(1-\beta w^2)_+^\gamma dw = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\gamma \end{pmatrix} .$$

Multipliant (26) par 1 puis v et intégrant en v nous trouvons en effet le système

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\varepsilon u_\varepsilon}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x} = 0$$

$$F_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}} v^2 f_\varepsilon dv \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbf{R}} v^2 \xi_\rho^\gamma(v-u)dv = \rho u^2 + p(\rho)$$

si $f_\varepsilon \longrightarrow \xi_\rho^\gamma(v-u)$ faiblement, comme on s'y attend sans être capable de le montrer, où $\rho, \rho u$ sont les limites de ρ_ε , ρ_ε u_ε .

L'entropie est maintenant donnée de la façon suivante. Soit

$$(33) \quad S(\rho,u) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}} [|v|^2 f(v) + \mu f(v)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}]dv \; ; f(v) \geq 0 \; , \int_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} f(v)dv = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} \right\}$$

où $\mu = \frac{\lambda}{\lambda+1} \frac{1}{\beta \alpha^{1/\lambda}}$. Cet Infimum est atteint par $\xi_\rho(v-u)$ et on obtient donc, pour f_ε solution de (32),

$$(34) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{R}} H(f_\varepsilon)dv + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbf{R}} vH(f_\varepsilon)dv \leq 0$$

où

$$H(f_\varepsilon) = |v|^2 f_\varepsilon + \mu f_\varepsilon^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} .$$

D'autre part $S(\rho,u)$ dans (33) est l'entropie macroscopique naturelle : $S(\rho,u) = \rho u^2 + \frac{2\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)}$ associée au flux d'entropie $q = \rho u^3 + \frac{2\rho^\gamma u}{\gamma-1}$. Si $f_\varepsilon \to \xi_\rho(v-u)$, (33)-(34) donnent la relation d'entropie

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \leq 0 \; .$$

L'analyse de ce passage à la limite est totalement ouvert

IV.3 Dynamique des gaz

Nous considérons le système d'Euler compressible

$$
(35)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\
\dfrac{\partial \rho u}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \ , \ p = \rho T = (\gamma - 1)\rho e \ , \ 1 < \gamma \leq 3, \\
\dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}[(E+p)u] = 0 \ , \ E = \dfrac{1}{2}\rho u^2 + \rho e \ .
\end{cases}
$$

Suivant B. Perthame [14], on peut l'obtenir, formellement, à partir du modèle cinétique suivant

$$
(36)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} + v.\nabla_x f_\varepsilon + (f_\varepsilon - M_\varepsilon)/\varepsilon = 0 \ , \\
\dfrac{\partial g_\varepsilon}{\partial t} + v.\nabla_x g_\varepsilon + (g_\varepsilon - \lambda T_\varepsilon M_\varepsilon)/\varepsilon = 0 \ ,
\end{cases}
$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}(3-\gamma)/(\gamma-1)$

$$
(37)\qquad (\rho_\varepsilon \ , \ \rho_\varepsilon u_\varepsilon, E_\varepsilon)(x,t) = \int_{\mathbf{R}} (f_\varepsilon, v f_\varepsilon, \frac{|v|^2}{2} f_\varepsilon + g_\varepsilon) dv
$$

$$
(38)\qquad E_\varepsilon = \frac{1}{2}\rho_\varepsilon u_\varepsilon^2 + \rho_\varepsilon e_\varepsilon \ , \ T_\varepsilon = (\gamma - 1) e_\varepsilon \ ,
$$

et enfin

$$
(39)\qquad M_\varepsilon(x,v,t) = \frac{\rho_\varepsilon}{\sqrt{T_\varepsilon}} \chi(\frac{v - u_\varepsilon}{\sqrt{t_\varepsilon}})
$$

où $\chi(\cdot)$ est une fonction réalisant

$$
(40)\qquad \chi(w) = \chi(-w) \geq 0, \int_{\mathbf{R}} (1, w^2)\chi(w) dw = (1,1) \ .
$$

L'exemple le plus classique d'une telle fonction χ est $\frac{e^{-|w|^{1/2}}}{\sqrt{2\pi}}$ qui donne lieu à la fonction M_ε appelée Maxwellienne locale. Une combinaison des équations (36) donne, après intégration en v,

$$
\partial_t \begin{pmatrix} \rho_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon u_\varepsilon \\ E_\varepsilon \end{pmatrix} + \partial_x \int_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} v f_\varepsilon \\ v^2 f_\varepsilon \\ \frac{v3}{2} f_\varepsilon + g_\varepsilon \end{pmatrix} dv = 0 \ ,
$$

ce qui permet bien de trouver le système (35) lorsque $f_\varepsilon \to M$, $g_\varepsilon \to \lambda T M$, pour M associée par (39) aux quantités ρ, u, T limites de $\rho_\varepsilon, u_\varepsilon, T_\varepsilon$ (ici encore une telle convergence n'est pas démontrée).

Donnons simplement des exemples de fonction χ conduisant à un principe variationnel, similaire à (13) et qui permet de construire une entropie cinétique. Soit $H(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}^{+*}, \mathbf{R})$, fonction convexe strictement telle que $H(0) = 0$, $H(f)/f \to +\infty$ lorsque $f \to +\infty$ et $H'(0) = 0$ où $H'(0) = -\infty$. Fixons également $\gamma = 3$ pour simplifier (g disparaît alors dans (36)).

Théorème [14].— *Le minimum*

$$S(\rho,T) = \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}} H(f(v))dv \ ; f(v) \geq 0, \int_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} s \\ v \\ |v|^2/2 \end{pmatrix} f(v)dv = \begin{pmatrix} s \\ \rho u \\ \rho u^2/2 + \rho^T/2 \end{pmatrix} \right\}$$

est atteint pour une unique fonction f de la forme (39) où χ est à support compact si et seulement si $H'(0) = 0$. $S(\rho,T)$ est une entropie du système ( ).

Exemples :

1. $H(f) = f \log f$ alors $\chi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|w|^2/2}$
2. $H(f) = f^2/2$ alors $\chi = \alpha(\beta - w^2)_+$; α et β réalisant (40).
3. Notons également que l'on peut choisir $H(\cdot)$ singulière telle que

$$H(f) \underset{f \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty \ .$$

Pour des données initiales convenables sur f_ε, on obtient alors $0 \leq f_\varepsilon(x,v,t) \leq 1$, ce qui semble être fondamental pour la méthode développée dans la section I.2, mais n'implique aucune estimation L^∞ pour le système (35).

Références.

[1] Y. Brenier, Résolution d'équations d'évolution quasilinéaires. J. Diff. Eq. **50** (3), (1986), 375-390.

[2] R. Di Perna, P.L. Lions, Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems. Comm. Pure Appl. Math. XLII (1989), 729-757.

[3] R. Di Perna, P.L. Lions, Y. Meyer, L^p regularity of velocity averages. A paraître dans Ann. IHP Anal. Non Lin., 1991.

[4] P. Gérard, Moyennisation et régularité deux microlocale. Preprint.

[5] F. Golse, B. Perthame, R. Sentis, Un résultat de compacité pour les équations de transport. C.R. Acad. Sc. Paris **301** (1985), 341-344.

[6] F. Golse, P.L. Lions, B. Perthame, R. Sentis, Regularity of the moments of the solution of a transport equation. J. Funct. Anal. **76** (1), (1988), 110-125.

[7] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119, 1967, 147-171.

[8] S. Kruzkov, First order quasi-linear equations with several space variables. Math. USSR Sb. 10 (1970), 217-273.

[9] P.L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, Article en préparation. Note C.R.A.S. t. Série 1 (1991).

[10] B. Perthame, Higher moments for kinetic equations ; Applications to Vlasov-Poisson and Fokker-Planck Equations. Math. Methods in the Appl. Sc. 13 (1990), 441-452.

[11] B. Perthame, E. Tadmor, A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. A paraître dans Comm. in Math. Phys.

[12] J. Smoller, Shock waves and reaction diffusion equations. Springer-Verlag New York, Heidelberg-Berlin, (1982).

[13] L. Tartar, In Research notes in Mathematics, 39, Henriot-Watt Symp. Vol.4 Pitman Press Boston, London (1975), 136-211.

[14] B. Perthame, Entropy Boltzmann schemes for gas dynamics equations SIAM J. Num. Anal. 28 (1), (1991).

B. Perthame
Département de Mathématiques
Université d'Orléans
B.P. 6759
45067 Orléans cedex 2