

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. BOURDAUD

Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n° 4, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991___A4_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LE CALCUL FONCTIONNEL
DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

G. BOURDAUD

0. Introduction

Nous allons caractériser, de façon fort simple, les fonctions d'une variable réelle qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$, pour chaque entier $m \geq 0$ et tout $p \in [1, +\infty]$.

Cette caractérisation était connue pour le seul cas $m = 1$ (en évitant la valeur critique $p = n \geq 2$) [MM].

On connaissait par ailleurs des classes de fonctions "raisonnables" opérant sur $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ pour $m \geq \sup(n/p, 2)$ ([A], [P]), ainsi que sur $W^{2,1}(\mathbf{R}^n)$ ([D], [B1]).

Enfin, Dahlberg avait noté que les seules fonctions régulières opérant sur $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$, pour $1 + 1/p < m < n/p$, sont les fonctions linéaires $t \mapsto ct$.

Quand l'exposant m est remplacé par un réel positif non entier $s > 0$, le calcul fonctionnel reste encore mystérieux. Seul le cas $0 < s < 1$ a fait l'objet d'une description complète.

Après avoir étendu au cas fractionnaire le résultat de Dahlberg, on pouvait se demander si le calcul fonctionnel est trivial pour $1 \leq s < \inf(1 + 1/p, n/p)$. En montrant récemment que $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ est un treillis pour $0 < s < 1 + \frac{1}{p}$ - quelle que soit la valeur de n - Y. Meyer et l'auteur ont établi qu'il n'en est rien.

Avant d'entrer dans les détails, rappelons que, à l'exception du cas $p = +\infty$, les espaces $W^{m,p}$ ne contiennent pas de constante autre que 0 ; la condition $F(0) = 0$ sera dès lors toujours nécessaire pour que la fonction F y opère ; elle est sous-entendue dans tout l'exposé.

Les résultats sans référence précisée sont dus à l'auteur.

1. Le cas des exposants entiers

1.1. $m = 0$.

Pour $p < +\infty$, la condition $|F(t)| \leq C|t|$ est suffisante (évident !) et nécessaire (folklorique ?) pour que F opère sur L^p .

La condition $F \in L_{\text{loc}}^\infty$ est clairement nécessaire et suffisante pour que F opère sur L^∞ .

1.2. $m = 1$.

Pour $1 < \frac{n}{p}$, ainsi que pour $n = p > 1$, la condition $F' \in L^\infty$ est suffisante [S] et nécessaire ([MM], [B2]) pour que F opère sur $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$. Pour $1 > \frac{n}{p}$, ainsi que pour $n = p = 1$, la condition $F' \in L_{\text{loc}}^\infty$ est nécessaire et suffisante [MM]. Ces résultats s'étendent à l'espace de Hardy-Sobolev $F_1^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ [J].

1.3. $m = 2, p = 1$.

Pour $n > 2$, la condition $F'' \in L^1$ est suffisante et nécessaire pour que F opère sur $W^{2,1}(\mathbf{R}^n)$. Pour $n \leq 2$, la condition $F'' \in L_{\text{loc}}^1$ est nécessaire et suffisante.

1.4. $m = 2, 1 < p < n/2$.

La condition

$$F' \in L^\infty \quad \text{et} \quad \sup_{t>0} t^{p-1} \int_t^{2t} |F'''(s)|^p ds < +\infty$$

est nécessaire et suffisante pour que F opère sur le cône positif $(W^{2,p})^+$ ([MA], [B2]).

1.5. $m = n/p \geq 2, 1 < p$.

Pour que F opère sur $W^{m,n/m}(\mathbf{R}^n)$ (où $n > m \geq 2$), il faut et il suffit que $F' \in L^\infty$ et que $F^{(m)}$ appartienne à L^p localement-uniformément (autrement dit, il existe $C > 0$ tel qu'on ait

$$\int_I |F^{(m)}(t)|^p dt < +\infty$$

pour tout intervalle I de longueur 1).

1.6. $m > n/p$ (ou $m = n$ et $p = 1$).

La condition $F^{(m)} \in L^p_{\text{loc}}$ est alors nécessaire et suffisante pour que F opère sur $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$.

1.7. $1 + \frac{1}{p} < m < \frac{n}{p}$.

Le calcul fonctionnel est trivial : seules les fonctions $t \mapsto Ct$ opèrent ([D], [B2]).

1.8. Pour $2 + \frac{1}{p} < m < \frac{n}{p}$, le calcul fonctionnel est trivial sur le cône $(W^{m,p})^+$ [D].

1.9. Question

Le calcul fonctionnel est-il trivial sur $(W^{3,1}(\mathbf{R}^n))^+$, pour $n \geq 4$?

2. Le cas des exposants "fractionnaires".

Les espaces étudiés sont ceux de Besov $B_p^{s,q}(p, q \in [1, +\infty])$ et de Triebel-Lizorkin $F_p^{s,q}(p \in [1, +\infty[, q \in [1, +\infty])$. Le lecteur trouvera dans le livre de Triebel les définitions précises. Rappelons que $B_2^{s,2}$ est l'espace de Sobolev usuel H^s et que $F_p^{s,2}$ est l'espace des "potentiels de Bessel" $(I - \Delta)^{-s/2} L^p$.

2.1. $0 < s < 1$.

Si $s \leq n/p$ (ou $s = n/p$, avec $q > 1$ dans le cas Besov), la condition $F' \in L^\infty$ est nécessaire et suffisante pour que F opère sur $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ ou $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$. Si $s > n/p$ (ou $s = n/p$ et $q = 1$ dans le cas Besov), la condition $F' \in L^\infty_{\text{loc}}$ est nécessaire et suffisante pour que F opère.

Ces résultats sont dus à Igari ($n = 1, p = 2, s \neq 1/2$) et à Bourdaud-Kateb (autres cas).

2.2. $1 \leq s < 1 + 1/p$.

M.E.D. Kateb, Y. Meyer et l'auteur ont prouvé que toute fonction dont la dérivée est à variation bornée opère sur $B_p^{s,q}$ et sur $F_p^{s,2}$.

On en déduit que, **dans le cas** $p > 1$, la condition

$$F' \in L^\infty \quad \text{et} \quad \sup_{t>0} t^{p-1} \int_{|s|\geq t} |F''(s)|^p ds < +\infty$$

suffit pour que F opère sur $B_p^{s,q}$.

2.3. $1 \leq s < 2$.

La condition $F'' \in L^1$ est suffisante - mais non nécessaire - pour que F opère sur $B_1^{s,q}$. La condition 1.4 suffit pour que F opère sur $(B_p^{s,q})^+$, pour $p > 1$ [BM].

2.4. $1 + 1/p < s < \frac{n}{p}$.

Le calcul fonctionnel est alors trivial ([B1] pour les espaces de Besov, [R] pour ceux de Triebel).

2.5. $2 + \frac{1}{p} < s < \frac{n}{p}$.

Le calcul fonctionnel est trivial sur les cônes $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)^+$ et $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)^+$.

2.6. $s \geq n/p$.

Pour que F opère sur $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$, il suffit que F possède des dérivées bornées ou localement bornées - suivant que $s = \frac{n}{p}$ ou $s > \frac{n}{p}$ - jusqu'à l'ordre N , où $N - 1 \leq s < N$ [P]. Le même résultat est sans doute vrai pour les $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$, mais la seule preuve connue se fait par paralinéarisation ([ME], [R]), ce qui oblige à remplacer N par $N + 1$.

2.7. Questions

Le calcul fonctionnel est-il trivial sur $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ et sur $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ pour $s = 1 + \frac{1}{p}$ et $p < n - 1$? sur $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)^+$ et sur $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)^+$ pour $2 \leq s \leq 2 + \frac{1}{p}$ et $s < \frac{n}{p}$?

BIBLIOGRAPHIE

- [A] D.R. Adams, On the existence of capacity strong type estimates in \mathbf{R}^n . Arkiv för Mat. 14, 1 (1976), 125-140.
- [B1] G. Bourdaud, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. Sém. Anal. Harm., Orsay (1980-81), 6-17.
- [B2] G. Bourdaud, Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev. Invent. Math. (à paraître) (version abrégée au Sém. Anal. Harm. Orsay, 1989-90).
- [B3] G. Bourdaud, Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique (en préparation).
- [BK1] G. Bourdaud et D. Kateb, Fonctions qui opèrent sur certains espaces de Besov. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 40,1 (1990) 153-162.

- [BK2] G. Bourdaud et D. Kateb, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov. Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).
- [BK3] G. Bourdaud et M.E.D. Kateb, Calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev fractionnaire (en préparation).
- [BM] G. Bourdaud et Y. Meyer, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. Journal Funct. Anal. (à paraître).
- [D] B.E.J. Dahlberg, A note on Sobolev spaces. Proc. Symp. Pure Math. 35,1 (1979), 183-185.
- [I] S. Igari, Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace \widehat{A}^2 . Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15,2 (1965), 525-536.
- [J] S. Janson, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (El Escorial, 1987), 193-201, Lecture Notes in Math. 1384, Springer (1989).
- [MA] V. Maz'ya, Sobolev Spaces Springer (1985).
- [ME] Y. Meyer, Régularité des solutions des E.D.P. non linéaires, d'après J.M. Bony. Sémin. Bourbaki, 560 (1979-80).
- [MM] M. Marcus et V.J. Mizel, Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev Spaces. Trans. A.M.S. 251 (1979), 187-218.
- [P] J. Peetre, Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces. Mathematica (Cluj) 12 (35),2 (1970), 325-334.
- [R] T. Runst, Mapping properties of non-linear operators in spaces of Triebel-Lizorkin and Besov type. Analysis Mathematica 12 (1986), 313-346.
- [S] G. Stampacchia, Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Univ. Montréal Press., Québec (1966).
- [T] H. Triebel, Theory of Functions Spaces, Birkhauser (1983).

Université Paris VII
 CNRS U.A. 212
 Tour 45-55, 5ème étage
 2, place Jussieu
 75251 Paris cedex 05