E. ANDRONIKOF

Intégrales de Nilsson et faisceaux constructibles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 3, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A3_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

INTÉGRALES DE NILSSON ET FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

par E. ANDRONIKOF

Exposé n°III

20 Novembre 1990

INTÉGRALES DE NILSSON ET FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

Emmanuel ANDRONIKOF

Université Paris-Nord
Département de Mathématiques
F 93430 VILLETANEUSE

0 - Introduction

Soient X et Y deux variétés analytiques complexes et $f : Y \to X$ une application lisse (i.e. une submersion holomorphe), S une hypersurface complexe de Y, $d = dim_{\mathbb{C}} Y - dim_{\mathbb{C}} X$, $x_0 \in X$, U un voisinage ouvert de S. On se donne un d-cycle relatif γ_{x_0}, représenté par une d-chaîne dans $(U \setminus S) \cap f^{-1}(x_0)$ de cobord nul, et une forme holomorphe relative de degré maximal d définie sur $U \setminus S$, éventuellement multiforme. On regarde γ_{x_0} comme le germe d'une famille continue Γ de d-cycles relatifs définie au voisinage de x_0, et on considére la fonction $h := \int_\gamma \omega$, qui est définie sur un voisinage de x_0. On se propose de montrer le

THÉORÈME 0. — *On fait les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} U \text{ est sous-analytique,} \\ f \text{ est propre sur } \overline{U}, \\ U \text{ n'a pas de contour apparent dans } X, \\ \omega \text{ est uniforme au voisinage de } \gamma_{x_0}. \end{cases}$$

Alors :

(i) h est holomorphe au voisinage de x_0 et il existe un sous-ensemble analytique complexe Z de codimension ≥ 1 dans X tel que h se prolonge en fonction holomorphe multiforme sur $X \backslash Z$.

(ii) Si ω est de détermination finie, il en est de même de h.

(iii) Si ω est de classe de Nilsson, il en est de même de h.

L'ouvert U étant dit sans contour apparent s'il existe une μ-stratification de ∂U telle que la projection sur T^*X de la réunion des conormaux aux strates soit incluse dans $T^*_X X$ (cf. paragraphe 5).
Ce type d'intégrale a une longue histoire, voir par exemple la bibliographie de [A-V-G] et le livre de Pham [P].
Dans le cas algébrique, ce théorème est bien connu : (ii) et (iii) sont démontrés par Nilsson dans [N1] (cf. aussi [N2]), (i) et (ii) par Leray dans [L] où (iii) est d'ailleurs énoncé sous forme de conjecture. Plus précisément on retrouve leurs énoncés en prenant $X = \mathbb{C}^n$,

$Y = X \times \mathbf{P}^d\mathbf{C}$, $f : Y \to X$ la projection et $U = X \times (\mathbf{P}^d\mathbf{C} \setminus H_\infty)$, H_∞ étant l'hyperplan à l'infini.
Le propos est ici d'étudier ce type d'intégrale dans un cadre plus général par des techniques différentes de celles de ces auteurs. On s'inspire de Deligne [D] pour interpréter les fonctions multiformes et on utilise, pour (i) et (ii), le morphisme résidu de Leray-Grothendieck et l'analyse microlocale des ensembles sous-analytiques de Kashiwara et Schapira, qui produisent le lieu de ramification Z de h comme un contour apparent dont on vérifie qu'il est en fait un ensemble analytique complexe. Pour (iii) on interprète et intègre les fonctions de classe de Nilsson à l'aide du foncteur de cohomologie à croissance de Kashiwara.
Ce qui suit est le résumé d'un article à paraître ([A1]).

1 - Notations

Précisons quelques notations pour lesquelles on suivra [K-S].

Les variétés que l'on considèrera seront toujours supposées paracompactes, et une variété complexe sera supposée orientée par le choix de $\sqrt{-1}$.

Si M est une variété analytique réelle on désigne par $w-\mathbf{R}-c(M)$ (resp. $\mathbf{R}-c(M)$) la catégorie des faisceaux faiblement $\mathbf{R}$-constructibles (resp. des faisceaux $\mathbf{R}$-constructibles) et, si X est une variété complexe, on désigne par $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural, par Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximum, par $\overline{X}$ la variété complexe conjuguée, par $X_\mathbf{R}$ la variété réelle sous-jacente et par $w-\mathbf{C}-c(X)$ (resp. $\mathbf{C}-c(X)$) la catégorie des faisceaux faiblement $\mathbf{C}$-constructibles (resp. des faisceaux $\mathbf{C}$-constructibles) sur X. On désigne par $D^b(M)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbf{C}$-vectoriels sur M et par $D^b_{w-\mathbf{R}-c}(M)$ (resp. $D^b_{w-\mathbf{R}-c}(M)$) la sous-catégorie pleine de $D^b(M)$ des objets à cohomologie dans $w-\mathbf{R}-c(M)$ (resp. dans $\mathbf{R}-c(M)$). Définitions analogues de $D^b_{w-\mathbf{C}-c}(X)$, $D^b_{\mathbf{C}-c}(X)$.

Une absence d'indice dans un symbole $\otimes$ ou $\mathcal{H}om$ sous-entendra que l'anneau de base est $\mathbf{C}$.

2 - Intégration des fonctions multiformes et prolongement analytique

Soit X une variété analytique complexe (paracompacte). Rappelons que si $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est un germe holomorphe en $x \in X$ tel que f se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin dans X issu de x, alors f définit (de manière non unique) une section holomorphe globale d'un revêtement universel de X (le choix de la section dépend du choix d'un point du revêtement qui se projette sur x).

Inversement, si $p : X^* \to X$ est un revêtement (non ramifié quelconque) et $f \in \Gamma(X^*; \mathcal{O})$ est donnée, tout choix d'un point $x^* \in X^*$ définit de manière unique un germe de fonction holomorphe $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, où $x = p(x^*)$, qui se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin dans X issu de x et on dira, comme c'est l'usage, que "f est une fonction holomorphe multiforme définie sur X". Remarquons qu'on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(X^*;\mathcal{O}_X) \simeq \Gamma(X;\mathcal{H}om(p_!\mathbb{C}_{X^*},\mathcal{O}_X)).$$

et on pose classiquement la

Définition 2.1. — *On appelle fonction holomorphe multiforme sur X la donnée de $f \in \Gamma(X,\mathcal{H}om,(L,\mathcal{O}_X))$, où L est un faisceau localement constant sur X, et on dit que f est une fonction holomorphe multiforme de détermination finie si de plus L est un système local (i.e. $\dim L_x < \infty \quad \forall x \in X$).*

Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse de variétés complexes, d la dimension complexe de la fibre. Un d-cycle dans $f^{-1}(x)$, où $x \in X$, est un élément de $H_d(f^{-1}(x);\mathbb{C}_{f^{-1}(x)}) \simeq H_c^d(f^{-1}(x);\mathbb{C}_{f^{-1}(x)}) = H^d(Rf_!\mathbb{C}_Y)_x$. Par (famille continue) de d-cycle(s) relatif(s) sur X, on entend une section globale $\gamma \in \Gamma(X;H^d(Rf_!\mathbb{C}_Y))$.
Soit $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion d'un ouvert de Y. On note $\tilde{f} = f \circ j$.
On a un morphisme canonique

$$\Gamma(X;H^d(R\tilde{f}_!\mathbb{C}_U)) \to \Gamma(X;H^d(Rf_!\mathbb{C}_Y)),$$

et si un cycle γ est dans l'image de ce morphisme on dira que γ est traçable dans U. On désigne par $\Omega_{Y/X}$ le faisceau sur Y des formes relatives de degré maximum d. Vu les notations précédentes une forme holomorphe multiforme de degré maximum définie dans U est une section $\omega \in \Gamma(U;\mathcal{H}om(L,\Omega_{U/X})) = \Gamma(Y;\mathcal{H}om(j_!L,\Omega_{Y/X}))$.

Proposition 2.2. — *Soit L un faisceau localement constant sur U.*

(i) On a un morphisme canonique

$$\Gamma(Y;\mathcal{H}om(j_!L,\Omega_{Y/X})) \otimes \Gamma(X;H^d(R\tilde{f}_!\mathbb{C}_U)) \longrightarrow \Gamma(X;\mathcal{H}om(\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)),$$

noté $\omega \otimes \gamma \mapsto \mathrm{Int}_\gamma(\omega)$.

(ii) $\mathrm{Int}_\gamma(\omega)$ *est indépendant de l'ouvert U dans lequel γ est traçable et se calcule fibre à fibre.*

(iii) Si $L = \mathbb{C}_U$ (i.e. ω est uniforme sur U) alors $\iota\mathrm{Int}_\gamma(\omega) = \int_\gamma \omega$.

On a désigné par $\iota : \Gamma(X;\mathcal{H}om(\tilde{f}_*\mathbb{C}_U,\mathcal{O}_X)) \to \Gamma(X;\mathcal{O}_X)$ le morphisme induit par $\mathbb{C}_X \to \tilde{f}_*\mathbb{C}_U$.
La proposition se déduit d'opérations standard sur les faisceaux en utilisant le morphisme résidu de Leray-Grothendieck

$$Rf_!\Omega_{Y/X}[d] \to \mathcal{O}_X.$$

Dans la situation du théorème 0 on se fixe une forme $\omega \in \Gamma(Y;\mathcal{H}om(j_!L,\Omega_{Y/X}))$ et on veut prolonger $\int_\gamma \omega$ à partir d'un germe de d-cycle : le prolongement analytique le long des cycles relatifs va être le morphisme de faisceaux $\mathrm{Int}(\omega)$ sur X défini de la manière suivante :
pour tout ouvert V de X, appliquant la proposition précédente à $f^{-1}(V)$ au lieu de Y on obtient un morphisme

$$\Gamma(V;H^d(Rf_!\mathbb{C}_U)) \to \Gamma(V;\mathcal{H}om(\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)),$$

et ce morphisme est compatible aux restrictions, i.e. on a un morphisme de faisceaux sur X

$$\mathrm{Int}(\omega) : H^d(Rf_!\mathbb{C}_U) \to \mathcal{H}om(\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X), \tag{2.1}$$

et on identifie $\mathrm{Int}(\omega)$ à un élément de

$$\mathrm{Hom}(H^d(Rf_!\mathbb{C}_U),\mathcal{H}om(\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)) \simeq \Gamma(X;\mathcal{H}om(H^d(Rf_!\mathbb{C}_U)\otimes\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)). \tag{2.2}$$

Remarquons que ce morphisme est défini indépendamment de toute hypothèse de propreté et que de la proposition on tire la conclusion suivante :
soit V un ouvert de X tel que

$$\begin{cases} 1) & H^d(Rf_!\mathbb{C}_U)\otimes\tilde{f}_*L \text{ est un faisceau localement constant sur } V, \\ 2) & x_0 \in V, \quad \gamma_{x_0} \text{ est traçable dans } U \text{ et } \omega \text{ est uniforme au voisinage de } \gamma_{x_0}, \end{cases}$$

alors $h := \int_\gamma \omega$ se prolonge en la fonction holomorphe multiforme sur V donnée par la restriction de $\mathrm{Int}(\omega)$ à V.
La géométrie microlocale assurera l'existence et le contrôle de tels ouverts dans le cas propre sur $\overline{U}$, mais auparavant on construit un formalisme qui rend compte des conditions de croissance.

3 - Fonctions holomorphes à croissance et foncteur RH de Kashiwara

Soit M une variété analytique réelle (paracompacte), $\mathcal{D}b_M$ le faisceau des distributions sur M. Pour tout faisceau $\mathbf{R}$-constructible F sur M, Kashiwara ([K1], [K2]) a défini le sous faisceau $T-\mathcal{H}om(F,\mathcal{D}b_M)$ des sections modérées de $\mathcal{H}om(F,\mathcal{D}b_M)$, noté également $TH_M(F)$, qui est caractérisé par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} TH_M(\mathbb{C}_M) = \mathcal{D}b_M, \\ \forall Z \text{ fermé sous-analytique } TH_M(F_Z) = \Gamma_Z TH_M(F), \\ TH_M(\bullet) : \mathbf{R}-c(M) \longrightarrow Mod(\mathcal{D}_M) \text{ est un foncteur exact,} \end{cases}$$

où $\mathcal{D}_M$ désigne le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques sur M.
En particulier, pour tout ouvert sous-analytique $U \subset M$ et tout ouvert $\Omega \subset M$ on a $\Gamma(\Omega;TH_M(\mathbb{C}_U)) = \mathcal{S}'_\Omega(\Omega\cap U)$, où $\mathcal{S}'_\Omega(\Omega\cap U)$ désigne le sous espace de $\mathcal{D}b_M(\Omega\cap U)$ des distributions prolongeables à Ω.
On note encore $TH_M(\bullet) : D^b_{\mathbf{R}-c}(M) \simeq D^b(\mathbf{R}-c(M)) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_M)$ le foncteur dérivé du

précédent, où $D^b(\mathcal{D}_M)$ désigne la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de $\mathcal{D}_M$-Modules.

Soit maintenant X une variété analytique complexe, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes. On pose (Kashiwara, loc. cit.), pour $F \in Ob(D^b_{\mathbb{R}-c}(X_{\mathbb{R}}))$,

$$RH_X(F) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\mathcal{O}_{\overline{X}}, TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)).$$

D'où un foncteur (contravariant) de catégories triangulées

$$RH_X(\cdot) : D^b_{\mathbb{R}-c}(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X)$$

où $D^b(\mathcal{D}_X)$ désigne la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules. Alors, si Y est un sous-ensemble analytique complexe fermé de X, on a

$$RH_X(\mathbb{C}_Y) = R\Gamma_{[Y]}\mathcal{O}_X$$

où $R\Gamma_{[Y]}\mathcal{O}_X = R\varinjlim_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{I}_Y$ étant un idéal de définition de Y dans X. En particulier si Y est une hypersurface de complémentaire $U = X \backslash Y$ on a

$$RH_X(\mathbb{C}_U) \simeq \mathcal{O}_X[*Y],$$

le faisceau des fonctions méromorphes à pôles sur Y (cf. [K2]).

On aura besoin de caractériser la croissance au bord d'ouverts sous-analytiques. Rappelons qu'une fonction continue f définie sur un ouvert U de X est dite à croissance lente (ou modérée) en $x_0 \in \partial U$ s'il existe $\nu > 0$ t.q. $d(x, \partial U)^\nu f(x)$ reste borné quand $x \longrightarrow x_0$ dans U, d étant la distance euclidienne lue dans une carte en x_0. L'énoncé suivant généralise une proposition de Martineau [M].

PROPOSITION 3.1. — *Soit U un ouvert sous-analytique de X. Pour tout ouvert $\Omega \subset X$ on a :*

$$\begin{cases} \Gamma(\Omega; H^0 RH_X(\mathbb{C}_U)) = \\ \{f \in \Gamma(\Omega \cap U; \mathcal{O}_X); f \textit{ est à croissance lente en tout point de } \partial U \cap \Omega\} = \\ \{f \in \Gamma(\Omega \cap U; \mathcal{O}_X); f \textit{ est prolongeable en distribution à } \Omega \cap U\}. \end{cases}$$

Signalons que les foncteurs TH et RH ont été micolocalisés dans [A2].

4 - Intégration des fonctions de classe de Nilsson et prolongement analytique

Notons comme plus haut Y une variété analytique complexe et $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion d'un ouvert sous-analytique, U connexe. Soit $p : U^* \to U$ un revêtement universel de U. Paraphrasant Deligne (loc. cit.) dans le cadre sous-analytique, on dira qu'une fonction holomorphe multiforme f sur U est de classe de Nilsson ssi

$$\begin{cases} f \text{ est de détermination finie et} \\ \text{pour toute partie d'argument borné } P \subset U^* \text{ il existe } \nu > 0 \text{ t.q.} \\ f(x) = O(\varphi(p(x))^\nu) \quad \text{sur} \quad P, \text{ où } \varphi \text{ est une norme adaptée à } \partial U. \end{cases}$$

Une partie d'argument borné étant ici par définition l'analogue de ce que Deligne appelle "partie verticale" (loc. cit.). Rappelons qu'il suffit dans la définition précédente de se borner aux P qui sont des relèvements des simplexes d'une triangulation sous-analytique de $\overline{U}$ qui induit une triangulation sous-analytique de ∂U. Une norme adaptée à ∂U est une fonction continue $\varphi : U \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ astreinte à vérifier localement sur ∂U une inégalité de la forme

$$c_1 d(x, \partial U)^{\alpha_1} \leq (1 + \varphi(x))^{-1} \leq c_2 d(x, \partial U)^{\alpha_2} \qquad (c_j, \alpha_j > 0).$$

De la proposition 3.1 et du théorème de rectilinéarisation de Hironaka on déduit la

PROPOSITION 4.2. — *Soit L un système local sur U et $f \in \Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_! L, \mathcal{O}_Y))$ une fonction holomorphe multiforme de détermination finie sur U. Alors f est de classe de Nilsson si et seulement si $f \in \Gamma(Y; H^0 RH_Y(j_! L))$.*

On a alors

PROPOSITION 4.3. — *Sous les hypothèses de la Proposition 2.2 où l'on suppose de plus que*

$$\begin{cases} U \text{ est sous-analytique} \\ f \text{ est propre sur } \overline{U} \end{cases}$$

Alors le morphisme donné par (i), Proposition 2.2 induit le morphisme

$$\Gamma(Y; H^0 RH_Y(j_! L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}) \otimes \Gamma(X; H^d(Rf_! \mathbb{C}_U)) \to \Gamma(X; H^0 RH_X(\tilde{f}_* L)).$$

La proposition résulte du théorème d'intégration de Kashiwara :

THÉORÈME (Kashiwara, loc. cit.). — *Soit $F \in Ob(D^b_{\mathbf{R}-c}(Y_{\mathbf{R}}))$ telle que f soit propre sur* supp(F). *On a un isomorphisme canonique :*

$$Rf_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes^L_{\mathcal{D}_Y} RH_Y(F))[dim_{\mathbb{C}} Y] \xrightarrow{\sim} RH_X(Rf_* F)[dim_{\mathbb{C}} X]$$

Du même théorème on tire que si $\omega \in \Gamma(Y; H^0RH_Y(j_!L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X})$ est de classe de Nilsson alors le morphisme de prolongement analytique le long des cycles (2.1) qui, vu la proposition 4.3, induit le morphisme

$$\mathrm{Int}(\omega) : H^d(Rf_!\mathbf{C}_U) \to H^0RH_X(\tilde{f}_*L),$$

définit en fait un élément

$$\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma(X; H^0RH_X(H^d(Rf_!\mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_*L)). \tag{4.1}$$

5 - Utilisation de la géométrie microlocale

On rappelle ci-dessous quelques définitions et résultats de [K-S] que la démonstration du théorème 0 va utiliser.

Soit X une variété complexe, $\pi : T^*X \to X$ le fibré cotangent et $\mathring{\pi}$ la restriction de π à $T^*X \setminus T^*_XX$. On identifie comme d'habitude $(T^*X)_\mathbf{R}$ à $T^*(X_\mathbf{R})$ en identifiant la 1-forme canonique de $T^*(X_\mathbf{R})$ à la partie réelle de la 1-forme canonique de T^*X.

Rappelons que si F est un (complexe de) faisceau(x) sur X, le micro-support $SS(F)$ de F est un ensemble conique fermé involutif dans $T^*X_\mathbf{R}$ et que l'on a

$$\begin{cases} (F \in Ob(D^b_{w-\mathbf{R}-c}(X))) \iff \\ \quad (SS(F) \text{ est inclus dans un ensemble conique fermé sous-analytique} \\ \quad \mathbf{R}-\text{isotrope de } T^*X), \\ (F \in Ob(D^b_{w-\mathbf{C}-c}(X))) \iff \\ \quad (SS(F) \text{ est inclus dans un ensemble conique fermé analytique} \\ \mathbf{C}-\text{isotrope de } T^*X) \\ F \text{ est un faisceau localement constant} \iff (SS(F) \subset T^*_XX). \end{cases}$$

Soit Y une autre variété complexe et $f : Y \to X$ un morphisme lisse.

On désigne par ρ et $\tilde{\omega}$ les applications canoniques associées

$$T^*Y \xleftarrow{\ \rho\ } Y \underset{X}{\times} T^*X \xrightarrow{\ \tilde{\omega}\ } T^*X,$$

(ici ρ est une immersion fermée).

Soit $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion d'un ouvert sous-analytique connexe de Y, $S = \partial U$ et $\tilde{f} = f \circ j$. On fait l'hypothèse que f est propre sur $\overline{U}$. Soit L un faisceau localement constant sur U. Comme $\tilde{\omega}$ est propre sur $\overline{U} \underset{X}{\times} T^*X$, on a par [K-S] :

$$SS(R\tilde{f}_*L) \subset \tilde{\omega}\rho^{-1}(SS(Rj_*L)).$$

Soit d'autre part $\mathcal{S}$ une μ-stratification (sous-analytique) de $\overline{U}$ ([K-S]) qui induise une stratification de ∂U et désignons par $\Lambda(\mathcal{S})$ la réunion des conormaux aux strates. On sait alors ([K-S]) que $\Lambda(\mathcal{S})$ est fermé conique et $\mathbf{R}$-isotrope (resp. $\mathbf{C}$-isotrope si les strates sont des ensembles analytiques complexes), et on a

$$SS(Rj_*L) \subset \Lambda(\mathcal{S}).$$

Enfin rappelons que pour tout ensemble $\Lambda \subset T^*Y$ qui est conique et $\mathbf{R}$-isotrope (resp. $\mathbf{C}$-isotrope) tel que $\tilde{\omega}$ est propre sur $\rho^{-1}(\Lambda)$, on a

$$\tilde{\omega}\rho^{-1}(\Lambda) \text{ est conique et } \mathbf{R}-\text{isotrope (resp. } \mathbf{C}-\text{isotrope).}$$

6 - Démonstration du théorème 0

Soit L un faisceau localement constant sur $U \setminus S$ tel que $\omega \in \Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}))$ où $j : U \setminus S \hookrightarrow Y$. Choisissons une μ-stratification à strates complexes $\mathcal{S}_0$ de S (e.g. une stratification de Whitney complexe) et posons

$$Z = \overset{\circ}{\pi}\, \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_0)).$$

C'est un sous-ensemble analytique complexe de codimension ≥ 1 de X.
Par hypothèse il existe une μ-stratification (à strates sous-analytiques) $\mathcal{S}_\infty$ de ∂U telle que

$$\overset{\circ}{\pi}\, \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_\infty)) \subset T^*_X X.$$

Posons $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \{U \setminus S\} \cup \mathcal{S}_\infty$. Alors $\mathcal{S}$ est une μ-stratification de $U \setminus S$ qui induit une stratification de $\partial(U \setminus S) = (\partial U) \cup S$ et, comme

$$\tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S})) \subset T^*_X X \cup \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_0)),$$

il résulte du paragraphe 5 que l'on a

$$SS(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L) \subset T^*_X X \cup \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_0)),$$

en particulier on a

$$SS(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L) \cap \pi^{-1}(X \setminus Z) \subset T^*_X X.$$

On en tire :

$$\begin{cases} H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L \in w - \mathbb{C} - c(X) & \text{et} \\ H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L|_{X \setminus Z} & \text{est un faisceau localement constant.} \end{cases}$$

La restriction de $\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma(X; \mathcal{H}om(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X))$ à $X \setminus Z$ est donc une fonction holomorphe multiforme.
D'autre part on a $h = \int_\gamma \omega = \mathrm{Int}(\omega)$ au voisinage de x_0, et, comme Z est de codimension ≥ 1, on peut supposer que $x_0 \notin Z$. On en déduit que h est holomorphe (uniforme) au voisinage de x_0 et coïncide avec une détermination de $\mathrm{Int}(\omega)|_{X \setminus Z}$.
Ce qui achève de prouver (i).
Si L est un système local on a aussitôt

$$\begin{cases} H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L \in \mathbb{C} - c(X) & \text{et} \\ (H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L)|_{X \setminus Z} & \text{est un système local,} \end{cases}$$

d'où (ii).
Si de plus $\omega \in \Gamma(Y; H^0 R H_Y(j_! L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X})$ est de classe de Nilsson, (iii) résulte de ce qui précède et de (4.1).

Remarque :

(i) Si ω est de classe de Nilsson, ce qui précède a exhibé le module holonôme régulier $\mathcal{M} := H^0 R H_X(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L)$ qui est une connexion sur $X \setminus Z$ et h se prolonge en section globale sur X de $\mathcal{M}$.

(ii) Dans [A1] on traite des situations plus générales : hypothèses plus locales sur S et généralisation à des cycles qui sont eux-mêmes multiformes.

Bibliographie

[A1] Andronikof, E. : *Intégrales de Nilsson et faisceaux constructibles.* Article à paraître.

[A2] Andronikof, E. : *Microlocalisation tempérée. Application aux distributions holonômes sur une variété complexe.* Ce Séminaire, 1987-88, exposé II.

[A-V-G] Arnold, V., Varchenko, A., Goussein-Zadé, S. : *Singularités des applications différentiables. Tome 2 : Monodromie et comportement asymptotiques des intégrales.* Ed. Mir. Moscou (1984).

[D] Deligne,P. : *Equations différentielles à points singuliers réguliers.* Lect. Notes in Math. 163, Springer (1970).

[K1] Kashiwara, M. : *Faisceaux constructibles et systèmes holonômes d'équations différentielles à points singuliers réguliers.* Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1979-80, exposé XIX.

[K2] Kashiwara, M. : *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems.* Publ. R.I.M.S. 20, 319-365 (1984).

[K-S] Kashiwara, M., Schapira, P. : *Sheaves on Manifolds.* Grund. der Math. Wiss., 292, Springer (1990).

[L] Leray, J. : *Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique.* Bull. Soc. Math. France, 95, 313-374 (1967).

[M] Martineau, A. : *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes,* in Proc. Int. Summer Inst. Lisbon (1964).

[N1] Nilsson, N. : *Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds.* Ark. for Math., 5, 463-476 (1965).

[N2] Nilsson, N. : *Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals.* Ark. for Math. 18, 181-198 (1980).

[P] Pham, F. : *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin.* Birkhäuser (1981).

E. ANDRONIKOF

Université Paris-Nord
Département de Mathématiques

F - 93430 VILLETANEUSE

ERRATUM EXPOSÉ III

INTÉGRALES DE NILSSON ET FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

Paragraphe 0 (Notations), ligne 12,
au lieu de :

$$(\textit{resp.}\ \ D^b_{w-\mathbf{R}-c}(M))$$

lire :

$$(\textit{resp.}\ \ D^b_{\mathbf{R}-c}(M))$$

Paragraphe 6 (Démonstration du théorème 0), ligne 9,
au lieu de :

$$\overset{\circ}{\pi}\,\widetilde{\omega}\rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_\infty)) \subset T^*_X X$$

lire :

$$\widetilde{\omega}\rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_\infty)) \subset T^*_X X$$