Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J.-M. Delort

Existence de nappes de tourbillon pour l'équation d'Euler sur le plan

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n° 2, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A2_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

EXISTENCE DE NAPPES DE TOURBILLON POUR L'EQUATION D'EULER SUR LE PLAN

par J. - M. DELORT

Exposé n°II

23 Octobre 1990

0. Introduction.

Cet exposé résume la preuve d'un résultat d'existence d'une solution globale pour l'équation d'Euler sur $\mathbf{R}^2$, à donnée de Cauchy nappe de tourbillon de signe fixe. Cela signifie que la donnée initiale est un champ de vecteurs à coefficients localement L^2, à divergence nulle et dont le rotationnel est une mesure de signe fixe, à support compact, appartenant à l'espace de Sobolev $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$. Les détails de la preuve, ainsi que diverses extensions au cas de l'équation d'Euler sur une surface riemannienne compacte ou sur un ouvert à bord, sont donnés dans [3].

I. Position du problème et énoncé du théorème.

Notons $x = (x^1, x^2)$ les coordonnées sur $\mathbf{R}^2, \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j} j = 1, 2$ et si f (resp. $v = ^t(v_1, v_2)$) est une fonction (resp. un champ de vecteurs) sur $\mathbf{R}^2$, posons $\nabla f = ^t(\partial_1 f, \partial_2 f), \nabla^\perp f = ^t(-\partial_2 f, \partial_1 f)$ (resp. div $v = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2$, rot $v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$). L'équation d'Euler d'un fluide incompressible sur $\mathbf{R}^2$ s'écrit

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v = -\nabla p \\ \text{div } v = 0 \end{cases}$$

où v est une fonction de $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, p est une fonction sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ et $v.\nabla$ l'opérateur différentiel $v_1\partial_1 + v_2\partial_2$ (qui agit sur les coefficients du champ de vecteurs v). Le problème de Cauchy pour (1) consiste à trouver une solution (v, p) à l'équation précédente lorsque $v_0 = v_{|t=0}$ est donné, satisfaisant à la condition nécessaire évidente div $v_0 = 0$.

On appelle tourbillon de v, la quantité

$$(2) \qquad \omega = \text{rot } v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1.$$

Si v vérifie div $v = 0$, rot $v = \omega$, on a $v = \nabla^\perp \Delta^{-1}\omega$, l'opérateur $\nabla^\perp\Delta^{-1}$ étant défini comme un multiplicateur de Fourier.

L'existence d'une (unique) solution à (1) lorsque la donnée de Cauchy $v_{|t=0} = v_0$ est assez régulière est bien connue (cf. [9], [10], [2]). Plus précisément, si $\omega_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ est donné et si $v_0 = \nabla^\perp\Delta^{-1}\omega_0$, il existe une unique solution (v, p) à (1) vérifiant $v_{|t=0} = v_0$. En outre, le comportement de v à l'infini en x se décrit de la manière suivante. Choisissons $\bar\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, radiale, vérifiant $\int \bar\omega(x)dx = \int \omega_0$ et posons $\bar v = \nabla^\perp\Delta^{-1}\bar\omega$. Alors $\bar v$ est C^∞ sur $\mathbf{R}^2$, est $0(1/|x|)$ à l'infini et est solution de l'équation d'Euler stationnaire. Si l'on pose alors

$$(3) \qquad \check v(t, x) = v(t, x) - \bar v(x), \quad \check v_0 = v_0 - \bar v$$

on montre que pour tout t fixé, $\check v(t, .) \in L^2(\mathbf{R}^2; \mathbf{R}^2)$ et vérifie l'inégalité d'énergie :

$$(4) \qquad \forall T > 0 \quad \exists C_T > 0 \quad \text{avec} \quad \|\check v\|_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))} \leq C_T$$

où la constante C_T ne dépend que de T, de $\|\nabla\bar{v}\|_{L^\infty}$ et de $\|\check{v}_0\|_{L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)}$.

Si l'on pose $\omega(t,.) = \text{rot } v(t,.)$, on vérifie immédiatement que ω est solution de l'équation

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + (v.\nabla)\omega = 0 \\ \omega_{|t=0} = \omega_0 \end{cases}$$

i.e. ω est constant sur les courbes intégrables du champ de vecteurs v. Utilisant que div $v = 0$ (i.e. que v préserve le volume) on déduit de (5) que pour tout $q \in [1,+\infty]$

$$(6) \qquad \|\omega(t,.)\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} = \|\omega_0\|_{L^q(\mathbf{R}^2)}.$$

Le problème des nappes de tourbillon consiste à étudier l'existence de solutions à (1) pour des données initiales v_0 dont le tourbillon ω_0 est de la forme $\omega_0 = \delta_\Sigma$ avec Σ courbe lisse compacte de $\mathbf{R}^2$. Plus généralement, on cherche des solutions pour des données dont le tourbillon ω_0 est une mesure à support compact sur $\mathbf{R}^2$ appartenant à $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ (cette dernière condition afin que v_0 soit localement dans L^2).

On se propose dans cet exposé de résoudre ce problème sous l'hypothèse supplémentaire que ω_0 est de signe fixe. Cela contient donc le cas de tourbillon initiaux de la forme δ_Σ, mais pas celui de la différence de deux mesures de cette forme.

Pour énoncer le théorème principal, nous devons réécrire l'équation (1) sous forme divergence. Pour cela, si $v = {}^t(v_1, v_2)$ est un champ de vecteurs, on notera $v\otimes v$ la matrice $(v_iv_j)_{1\leq i,j\leq 2}$ et div $(v\otimes v)$ le champ de vecteurs obtenu en prenant la divergence de chacune des lignes. Le théorème essentiel s'énonce alors :

Théorème 1.— *Soit ω_0 une mesure de Radon positive ou nulle à support compact sur $\mathbf{R}^2$ qui est dans l'espace de Sobolev $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ et $v_0 = \nabla^\perp\Delta^{-1}\omega_0$. Il existe alors $v \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))$ et $p \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2))$ solutions du système :*

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \text{ div } (v\otimes v) = -\nabla p \\ \text{div } v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

En outre si $\bar{\omega} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ est radiale, telle que $\int\bar{\omega}(x)dx = \int\omega_0$ et si on pose $\bar{v} = \nabla^\perp\Delta^{-1}\bar{\omega}$, la fonction $\check{v}(t,x) = v(t,x) - \bar{v}$ est dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))$. De plus, $\omega(t,x) = \text{rot } v(t,x)$ est pour tout $t \in \mathbf{R}$ une mesure positive ou nulle vérifiant $\int\omega(t,.) \leq \int\omega_0$. Enfin, la transformée de Fourier en x de p, $\hat{p}(t,\xi)$ peut être supposée dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2))$ (cette dernière assertion n'étant qu'une manière de choisir une pression p que l'équation ne détermine qu'à une constante près).

Remarque : On peut bien sûr dans l'énoncé précédent remplacer l'hypothèse $\omega_0 \geq 0$ par $\omega_0 \leq 0$. Il suffit pour le voir de changer v en $-v$ et t en $-t$.

2. Lemme de réduction.

La preuve du théorème 1 se fait par régularisation et passage à la limite. Soit $(\omega_0^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ une suite de régularisées de ω_0 vérifiant

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\omega_0^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \quad \text{à support contenu dans un compact fixe.}\\ &\omega_0^\varepsilon \geq 0, \int \omega_0^\varepsilon(x)dx = \int \omega_0,\ \omega_0^\varepsilon \to \omega_0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\mathbf{R}^2). \end{aligned}$$

On note $v_0^\varepsilon = \nabla^\perp \Delta^{-1}\omega_0^\varepsilon$ et si $\bar\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ est radiale et vérifie $\int \bar\omega(x)dx = \int \omega_0$, on pose $\bar v = \nabla^\perp\Delta^{-1}\bar\omega, \breve v_0^\varepsilon = v_0^\varepsilon - \bar v$. Alors $(\breve v_0^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est une suite bornée de $L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$. D'après les résultats d'existence pour des données régulières rappelés ci-dessus, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v^\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2), p^\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2)$ solution du système (7) - équivalent à (1) lorsque l'inconnue est C^∞ - avec la donnée v_0^ε. Si on pose $\breve v^\varepsilon(t,x) = v^\varepsilon(t,x) - \bar v(x)$, il existe pour tout $T > 0, C_T > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ on ait d'après (4) :

$$(9)\qquad \|\breve v^\varepsilon\|_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))} \leq C_T.$$

D'autre part, si $\omega^\varepsilon(t,.) = \text{rot } v^\varepsilon(t,.)$, on a pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et tout $t \in \mathbf{R}$, d'après (6)

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\|\omega^\varepsilon(t,.)\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} = \|\omega_0^\varepsilon\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} = \int \omega_0\\ &\omega^\varepsilon \geq 0. \end{aligned}$$

En outre il résulte de (9) que $(\omega^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est une suite bornée de $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, H^{-1}(\mathbf{R}^2))$. Ces inégalités entraînent que l'on peut extraire de $(v^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ une sous-suite, que l'on notera de même, et qui converge au sens des distributions sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ vers une limite v. D'après (9), $\breve v = v - \bar v$ est dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))$. D'après (10), $\omega = \text{rot } v = \lim_\varepsilon \omega^\varepsilon$ est une mesure positive ou nulle sur $\mathbf{R}^2$, de masse totale inférieure ou égale à $\int\omega_0$. En outre, puisque $\omega = \bar\omega + \text{rot } \breve v, \omega$ est dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, H^{-1}(\mathbf{R}^2))$.

Pour prouver le théorème 1, il nous suffit de voir qu'il existe $p \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2))$ tel que (v,p) soit solution de (7). Le problème réside bien entendu dans le fait que l'on ne peut passer brutalement à la limite dans l'équation vérifiée par v^ε. En effet, en général, v^ε converge vers v dans une topologie pour laquelle le produit $v \to v\otimes v$ n'est pas continu.

Divers exemples de suites $(v^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de solutions stationnaires de l'équation d'Euler, convergeant faiblement vers une limite v, elle-même solution stationnaire, sans que cette dernière propriété résulte d'un passage à la limite trivial dans l'équation, ont été construits par Di Perna-Majda [4] et Greengard-Thomann [8]. Dans tous ces exemples, bien que $v^\varepsilon\otimes v^\varepsilon$ ne converge pas vers $v\otimes v$, la différence $\lim_\varepsilon(v^\varepsilon\otimes v^\varepsilon) - v\otimes v$ (qui est, par définition la mesure de défaut de la suite $(v^\varepsilon\otimes v^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$) est toujours de la forme

$$(11)\qquad \lim_\varepsilon(v^\varepsilon\otimes v^\varepsilon) - v\otimes v = \nu Id$$

où ν est une mesure scalaire et Id la matrice identique. Cela signifie donc que, pour ces exemples, certaines expressions quadratiques en v^ε passent à la limite - à savoir $v_1^\varepsilon.v_2^\varepsilon$ et $(v_1^\varepsilon)^2 - (v_2^\varepsilon)^2$.

D'autre part, Alinhac [1] (cf. également [5] pour le cas stationnaire et [11] pour une légère extension) prouve - sous une hypothèse d'ailleurs faible que celle des nappes de tourbillon étudiées ici - que si la mesure de défaut de $v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon$ a un support suffisamment petit, en un sens convenable, alors la limite v de v^ε est solution de l'équation d'Euler. Or, d'après la preuve de cette propriété, le résultat subsiste en ne faisant l'hypothèse de petitesse que sur le support des mesures de défaut des suites $v_1^\varepsilon.v_2^\varepsilon$ et $(v_1^\varepsilon)^2 - (v_2^\varepsilon)^2$.

Le premier des faits précédents suggère la question suivante : dans le cas général d'une suite de solutions correspondant à une famille de données régularisées, est-ce que $v_1^\varepsilon.v_2^\varepsilon$ et $(v_1^\varepsilon)^2 - (v_2^\varepsilon)^2$ convergent respectivement vers $v_1.v_2$ et $(v_1)^2 - (v_2)^2$? Le second, lui, amène à se demander si un tel renseignement est suffisant pour passer à la limite dans l'équation.

Nous allons voir que, sous les hypothèses faites ici, la réponse à ces deux questions est positive. Le deuxième problème est résolu par le lemme suivant :

Lemme 2.— *Soit $\bar{v} \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ vérifiant $(1+|x|)\bar{v} \in L^\infty(\mathbf{R}^2), \tilde{v} \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))$, $v = \bar{v} + \tilde{v}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Il existe $p \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, \mathcal{S}'(\mathbf{R}^2))$ tel que (v,p) soit solution de (7).

ii) La fonction v est solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \Delta^{-1}A(D)\begin{pmatrix} (v_1)^2 - (v_2)^2 \\ v_1.v_2 \end{pmatrix} = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{array}\right. \tag{12}$$

où $A(D)$ est l'opérateur différentiel matriciel

$$A(D) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2^2 & \partial_2(\partial_2^2 - \partial_1^2) \\ -\partial_1^2\partial_2 & \partial_1(\partial_1^2 - \partial_2^2) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Démonstration : Si (v,p) vérifie (7) on voit en prenant la divergence de la première équation (7), compte-tenu de la seconde, que p est donné par

$$p = -\Delta^{-1}\text{div div } (v \otimes v). \tag{14}$$

Reportant cette valeur dans (7) on en déduit immédiatement que v vérifie (12).

Réciproquement, si v satisfait (12), alors $\frac{\partial}{\partial t}\text{div } v = 0$ d'où div $v = 0$. En outre, (7) est vérifié en prenant pour pression p la fonction calculée dans la partie directe du raisonnement.

D'aprés le lemme précédent, il nous suffit pour prouver le théorème 1 de montrer que la limite faible v de v^ε vérifie (12). Comme pour $\varepsilon > 0, v^\varepsilon$ satisfait à (7) donc à (12), le théorème 1 résulte de la proposition suivante :

Proposition 3.— *Soit $(v^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ une suite de fonctions de $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, C^\infty(\mathbf{R}^2\ ;\mathbf{R}^2))$ bornée dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2\ ;\mathbf{R}^2))$ et dans l'espace $Lip_{\text{loc}}(\mathbf{R}, \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2\ ;\mathbf{R}^2))$ des fonctions localement lipschitziennes de t à valeurs distributions, convergeant au sens des distributions vers une limite v. Supposons que div $v^\varepsilon = 0$ et que $\omega^\varepsilon =$ rot v^ε est une suite de fonctions positives ou nulles de $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, C_0^\infty(\mathbf{R}^2))$ bornée dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{R}, H^{-1}(\mathbf{R}^2))$ et dans $L^\infty(\mathbf{R}, L^1(\mathbf{R}^2))$.*

Alors, lorsque ε tend vers $0+$, $v_1^\varepsilon.v_2^\varepsilon$ (resp.$(v_1^\varepsilon) - (v_2^\varepsilon)^2$) converge au sens des distributions sur $\mathbf{R}^3$ vers $v_1.v_2$ (resp.$(v_1)^2 - (v_2)^2$).

On remarquera que la suite $(v^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de solutions à données régularisées que l'on a construite vérifie l'hypothèse de borne uniforme dans $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2\ ;\mathbf{R}^2))$ d'après l'équation (12).

La preuve de la proposition sera donnée au paragraphe suivant. Remarquons toutefois dès maintenant que la pression p associée à v par (14) n'est pas en général la limite des pressions p^ε correspondant à la solution v^ε du problème à données régularisées. En effet, si l'on retranche $\frac{1}{2}\nabla|v^\varepsilon|^2$ aux deux membres de (7), on voit que v^ε satisfait

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\partial_1 & \partial_2\\ -\frac{1}{2}\partial_2 & \partial_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(v_1^\varepsilon)^2-(v_2^\varepsilon)^2\\ v_1^\varepsilon.v_2^\varepsilon\end{pmatrix}=-\nabla(p^\varepsilon+\frac{1}{2}|v^\varepsilon|^2). \tag{15}$$

De même, v vérifie

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\partial_1 & \partial_2\\ -\frac{1}{2}\partial_2 & \partial_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^2-v_2^2\\ v_1.v_2\end{pmatrix}=-\nabla(p+\frac{1}{2}|v|^2). \tag{16}$$

D'après la proposition 3, le membre de gauche de (15) converge lorsque $\varepsilon\to 0$ vers le membre de gauche de (16). Si ν désigne la mesure limite de la suite $(\frac{1}{2}|v^\varepsilon-v|^2)_\varepsilon$ (à extraction éventuelle près d'une sous-suite) on a donc

$$\nabla p=\lim_\varepsilon(\nabla p^\varepsilon)+\nabla\nu\ . \tag{17}$$

3. Passage à la limite.

Nous allons indiquer dans cette troisième partie la preuve de la proposition 3. Nous nous limiterons au passage à la limite sur le terme $v_1^\varepsilon.v_2^\varepsilon$, le cas de $(v_1^\varepsilon)^2-(v_2^\varepsilon)^2$ étant identique et résultant d'ailleurs du précédent par rotation des axes de coordonnées. Soient $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2),\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$. On doit prouver :

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0+}\int v_1^\varepsilon(t,x)v_2^\varepsilon(t,x)\varphi(x)\psi(t)\ dx\ dt=\\ &=\int v_1(t,x)v_2(t,x)\varphi(x)\psi(t)\ dx\ dt.\end{aligned} \tag{18}$$

Utilisant les relations div $v^\varepsilon=0$, rot $v^\varepsilon=\omega^\varepsilon$, on voit qu'il existe $\theta,\bar\theta\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, positives ou nulles, avec $\theta\equiv 1$(resp.$\bar\theta\equiv 1$) au voisinage de Suppφ (resp.Suppθ) et des opérateurs pseudo-différentiels de degré -1 sur $\mathbf{R}^2, R_1$ et R_2 tels que l'on ait au voisinage de Suppφ

$$\begin{aligned}v_1^\varepsilon&=-G\partial_2(\theta\omega^\varepsilon)+R_1(\bar\theta v^\varepsilon)\\ v_2^\varepsilon&=G\partial_1(\theta\omega^\varepsilon)+R_2(\bar\theta v^\varepsilon)\end{aligned} \tag{19}$$

où G est une paramétrix proprement supportée de Δ.

Comme v^ε converge faiblement vers v dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))$ en étant bornée dans $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2))$, on voit que pour tout t fixé, $\bar\theta v^\varepsilon(t,.)$ converge vers $\bar\theta v(t,.)$

faiblement dans $L^2(\mathbf{R}^2\ ;\mathbf{R}^2)$. Alors $R_j(\bar\theta v^\varepsilon(t,.))$ converge vers $R_j(\bar\theta v(t,.))$ fortement dans $L^2(\mathbf{R}^2\ ;\mathbf{R}^2)$. Utilisant que le produit d'une suite faiblement convergente par une suite fortement convergente converge au sens des distributions, on en déduit que

$$\begin{aligned}(20)\qquad &\int G\partial_j(\theta\omega^\varepsilon)R_j(\bar\theta v^\varepsilon)\varphi(x)\psi(t)dxdt\\ &\to \int G\partial_j(\theta\omega)R_j(\bar\theta v)\varphi(x)\psi(t)dxdt \quad j=1,2\end{aligned}$$

$$(21)\qquad \int R_1(\bar\theta v^\varepsilon)R_2(\bar\theta v^\varepsilon)\varphi(x)\psi(t)dxdt \to \int R_1(\bar\theta v)R_2(\bar\theta v)\varphi(x)\psi(t)dxdt$$

lorsque ε tend vers 0. Pour prouver (18) il suffit donc de montrer

$$\begin{aligned}(22)\qquad &\lim_{\varepsilon\to 0}\int G\partial_2(\theta\omega^\varepsilon)G\partial_1(\theta\omega^\varepsilon)(t,x)\varphi(x)\psi(t)dxdt =\\ &=\int G\partial_2(\theta\omega)G\partial_1(\theta\omega)(t,x)\varphi(x)\psi(t)dxdt\ .\end{aligned}$$

Or, l'intégrale du membre de gauche de (22) s'écrit aussi

$$\begin{aligned}(23)\qquad &\int \theta\omega^\varepsilon(t,x)\varphi(x)[(G\partial_2)^*G\partial_1](\theta\omega^\varepsilon)(t,x)\psi(t)dxdt\\ &+\int \theta\omega^\varepsilon(t,x)[(G\partial_2)^*,\varphi](G\partial_1\theta\omega^\varepsilon)(t,x)\psi(t)dxdt\end{aligned}$$

et comme précédemment on passe à la limite dans le second terme. Il nous suffit donc, pour prouver la proposition 3, de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.— *Soit $a(x,D)$ un opérateur pseudo-différentiel classique proprement supporté de degré -2 dont le symbole principal $a_0(x,\xi)$ vérifie*

$$(24)\qquad \int_{|\xi|=1} a_0(x,\xi)d\xi \equiv 0\ .$$

Soit $(\alpha^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ une suite de fonctions de $L^\infty_{\rm loc}(\mathbf{R},\mathcal{S}(\mathbf{R}^2))$ vérifiant $\alpha^\varepsilon\geq 0,(\alpha^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ bornée dans $L^\infty_{\rm loc}(\mathbf{R}\ ;H^{-1}(\mathbf{R}^2)\cap L^1(\mathbf{R}^2))$ et dans $Lip_{\rm loc}(\mathbf{R},\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2))$, convergeant au sens des distributions vers α lorsque $\varepsilon\to 0$. Alors $[a(x,D)\alpha^\varepsilon].\alpha^\varepsilon$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ vers $[a(x,D)\alpha].\alpha$ lorsque ε tend vers 0.

Remarque : On notera que l'hypothèse (24) ci-dessus est vérifiée par l'opérateur $(G\partial_2)^*G\partial_1$ intervenant dans (23) grâce au fait que la non-linéarité étudiée est $v_1.v_2$. Elle le serait de même si on était parti de $(v_1)^2-(v_2)^2$, mais pas, par contre, pour v_1^2 ou v_2^2.

Notons $k(x,X)$ le noyau de l'opérateur $a(x,D)$

$$(25)\qquad k(x,X)=\mathcal{F}_\xi^{-1}(a(x,\xi))\ .$$

Alors $k(x,X)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^2 \times (\mathbf{R}^2 - \{0\})$ à support compact en X. En outre, l'hypothèse (24) entraîne que $k(x,X)$ est **borné** sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$.

Les hypothèses du théorème 4 entraînent que pour tout $t \in \mathbf{R}$ fixé, la suite $(\alpha^\varepsilon(t,.))_\varepsilon$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ vers α_t mesure positive ou nulle sur $\mathbf{R}^2$, qui est dans l'espace de Sobolev $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$. Comme la partie atomique d'une mesure finie est somme d'une série convergente de masses de Dirac, il en résulte que α_t est une mesure diffuse, i.e. $\forall x_0 \in \mathbf{R}^2, \alpha_t(\{x_0\}) = 0$. Le théorème de Fubini entraîne alors que la diagonale $x = y$ de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ est de $d\alpha_t(x) \otimes d\alpha_t(y)$-mesure nulle pour tout $t \in \mathbf{R}$.

La fonction $k(x, x-y)$, qui est localement bornée sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, continue hors de la diagonale, définit alors sans ambiguïté un élément de l'espace $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2; d\alpha_t(x) \otimes d\alpha_t(y))$ des fonctions mesurables localement essentiellement bornées pour la mesure $d\alpha_t(x) \otimes d\alpha_t(y)$. L'étape essentielle dans la preuve du théorème 4 est alors l'obtention de la proposition suivante :

Proposition 5.— *Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2), \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. On a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int [a(x,D)\alpha^\varepsilon]\alpha^\varepsilon(t,x)\varphi(x)\psi(t)dxdt = \tag{26}$$

$$= \int \varphi(x)k(x, x-y)\psi(t)d\alpha_t(x) \otimes d\alpha_t(y)dt$$

Pour prouver la proposition, choisissons $T > 0$ tel que Supp $\psi \subset [-T,T]$ et $R_0 \geq 1$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi(x)k(x, x-y))$ soit compact dans $B(0,R_0) \times B(0,R_0)$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 6.— *Il existe une suite $(V_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$ de voisinages de la diagonale de $\overline{B(0,R_0)} \times \overline{B(0,R_0)}$ dans $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ et une suite $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$ de $]0,1[$ tels que*

$$\int_{-T}^{T} \int_{V_j} \alpha^\varepsilon(t,x)\alpha^\varepsilon(t,y)dx\ dy\ dt \ \leq \frac{1}{j} \tag{27}$$

pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_j[$.

Démonstration : Soit pour tout $N \in \mathbf{N}^*, E_N = \{k \in \mathbf{Z}^2\ ; |k| \leq 2R_0\}$. Si I_N^k désigne le cube de centre $\frac{k}{N}$, de côté $\frac{2}{N}, \cup_{k \in E_N} I_N^k$ recouvre $\overline{B(0,R_0)}$. Pour prouver le lemme, il suffit de montrer qu'il existe $N_j \to +\infty$ et $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbf{N}^*}$ suite de $]0,1[$ tels que

$$\sum_{k \in E_{N_j}} \int_{-T}^{T} (\int_{I_{N_j}^k} \alpha^\varepsilon(t,x)dx)^2 dt \leq \frac{1}{j} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_j[\tag{28}$$

(en prenant $V_j = \cup_{k \in E_{N_j}} I_{N_j}^k \times I_{N_j}^k$).

Si la propriété (28) n'est pas satisfaite, il existe une suite $(\varepsilon_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ tendant vers 0 et $\delta > 0$ avec pour tout N

$$\delta \leq \sum_{k \in E_N} \int_{-T}^{T} (\int_{I_N^k} \alpha^{\varepsilon_N}(t,x)dx)^2 dt \tag{29}$$

$$\leq \left(\sup_{k\in E_N}\sup_{t\in[-T,T]}\int_{I_N^k}\alpha^{\varepsilon_N}(t,x)dx\right)\Big(\sum_{k\in E_N}\int_{-T}^{T}\int_{I_N^k}\alpha^{\varepsilon_N}(t,x)dxdt\Big)\ .$$

Le deuxième facteur du membre de droite se majore par $4\int_{-T}^{T}\int_{\mathbf{R}^2}\alpha^{\varepsilon_N}(t,x)dx\ dt \leq 8T\sup_{\varepsilon}\|\alpha^\varepsilon\|_{L^\infty([-T,T],L^1(\mathbf{R}^2))}$. Il existe donc $C>0$ et pour tout $N\in\mathbf{N}^*, t_N\in[-T,T]$ et $k_N\in E_N$ avec

$$\int_{I_N^{k_N}}\alpha^{\varepsilon_N}(t_N,x)dx \geq \frac{\delta}{C}\ . \tag{30}$$

On peut toujours supposer, quitte à extraire, que $t_N\to t_0\in[-T,T]$ et que $I_N^{k_N}\to\{x_0\}\subset\mathbf{R}^2$. D'autre part, utilisant que $(\alpha^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est bornée dans $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2))$, on voit que $\alpha^{\varepsilon_N}(t_N,.)\rightharpoonup\alpha_{t_0}$. On déduit alors de (30) que $\alpha_{t_0}(\{x_0\})\geq\frac{\delta}{C}$ ce qui est contradictoire avec le fait que α_{t_0} est diffuse.

Démonstration de la proposition 5 : Soit pour tout $j\in\mathbf{N}^*,\chi_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, à valeurs dans $[0,1],\chi_j\equiv 1$ près de 0, telle que $\mathrm{Supp}(\chi_j(x-y))\cap(B(0,R_0)\times B(0,R_0))\subset V_j$. Soit $\eta>0$. On a pour $j\geq j_0$ assez grand (par convergence dominée) :

$$|\int_{-T}^{T}\int\chi_j(x-y)\varphi(x)k(x,x-y)\psi(t)d\alpha_t(x)\otimes d\alpha_t(y)dt|<\frac{\eta}{3}\ . \tag{31}$$

D'autre part

$$|\int_{-T}^{T}\int\chi_j(x-y)\varphi(x)k(x,x-y)\psi(t)\alpha^\varepsilon(t,x)\alpha^\varepsilon(t,y)dx\ dy\ dt|\leq \tag{32}$$

$$\leq\|\varphi\|_{L^\infty}\|k\|_{L^\infty}\|\psi\|_{L^\infty}\int_{-T}^{T}\int_{V_j}\alpha^\varepsilon(t,x)\alpha^\varepsilon(t,y)dx\ dy\ dt$$

est inférieur à $\frac{\eta}{3}$ d'après (27) si j est fixé assez grand et ε décrit $]0,\varepsilon_j[$.

Enfin, comme $\alpha^\varepsilon(t,x)\otimes\alpha^\varepsilon(t,y)$ converge, pour tout t fixé, au sens des distributions sur $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$, vers $\alpha_t(x)\otimes\alpha_t(y)$ et que $(1-\chi_j)(x-y)\varphi(x)k(x,x-y)$ est C^∞ on a

$$(33)\qquad \left|\int_{-T}^{T}\int (1-\chi_j)(x-y)\varphi(x)k(x,x-y)\psi(t)\alpha^\varepsilon(t,x)\alpha^\varepsilon(t,y)dx\ dy\ dt\right.$$

$$\left.-\int_{-T}^{T}\int (1-\chi_j)(x-y)\varphi(x)k(x,x-y)\psi(t)d\alpha_t(x)d\alpha_t(y)dt\right| < \frac{\eta}{3}$$

si ε est assez petit. La proposition en résulte.

Remarque : On notera que c'est dans l'inégalité (32) de la preuve précédente qu'a été utilisée l'hypothèse $\alpha^\varepsilon \geq 0$.

Démonstration du théorème 4 : Il suffit de voir que le membre de droite de (26) est égal à

$$(34)\qquad \int\int [a(x,D)\alpha]\alpha(t,x)\varphi(x)\psi(t)dx\ dt.$$

Or, si $\underline{\alpha}^\varepsilon(t,x)$ désigne une suite d'approximations de α par troncatures et régularisation en x - donc qui, pour tout t fixé, converge vers α_t fortement dans $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$-(34) est égal à

$$(35)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\int [a(x,D)\underline{\alpha}^\varepsilon]\underline{\alpha}^\varepsilon(t,x)\varphi(x)\psi(t)dx\ dt.$$

Mais d'autre part, $(\underline{\alpha}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ vérifie les mêmes hypothèses que $(\alpha^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ et donc la proposition 5 s'applique à $\underline{\alpha}^\varepsilon$ et montre que (35) coincide avec le membre de droite de (26). Cela achève la preuve du théorème.

4 Extensions et remarques.

Nous nous proposons dans ce dernier paragraphe d'indiquer quelques extensions et généralisations du théorème 1 et de discuter l'hypothèse de positivité dans le théorème 4.

Tout d'abord, on peut, dans l'énoncé du théorème 1 considérer des données de Cauchy un peu plus générales, de la forme $\omega_0 = \omega_0' + \omega_0''$ où ω_0' est une mesure de signe fixe à support compact, qui est dans $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$, et où ω_0'' est une perturbation plus régulière, $\omega_0'' \in L^p_{\text{comp}}(\mathbf{R}^2)$ avec $p > 1$. On a alors existence d'une solution faible globale.* Une autre variante du théorème 1 consiste à prouver celui-ci en utilisant une suite $(v^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ construite à l'aide des solutions v^ε de l'équation de Navier-Stokes sur $[0,+\infty[\times\mathbf{R}^2$:

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon) = -\nabla p^\varepsilon + \varepsilon\Delta v^\varepsilon \\ \operatorname{div} v^\varepsilon = 0 \\ v^\varepsilon|_{t=0} = v_0^\varepsilon \end{cases}$$

---

* Comme me l'a fait remarquer P.L. Lions, on peut même s'autoriser une perturbation ω_0'' élément de $L^1_{\text{comp}}(\mathbf{R}^2)\cap H^{-1}(\mathbf{R}^2)$.

où $(v_0^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est la même suite de régularisées de v_0 qu'au paragraphe 2 ci-dessus. La suite des tourbillons $(\omega^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ correspondants est à décroissance rapide en x et on peut lui appliquer les raisonnements des paragraphes 2 et 3.

D'autre part, on peut prouver une version du théorème 1 (ou plûtot de son extension à une donnée de la forme $\omega_0 = \omega_0' + \omega_0''$ comme ci-dessus) pour l'équation d'Euler sur une surface riemannienne, connexe, compacte, orientée, sans bord M. On obtient, par une méthode identique à ce qui précéde, l'existence d'une solution globale au problème étudié. Il peut être intéressant de signaler dans ce cadre quelle est l'expression intrinsèque des non-linéarités quadratiques en v sur lesquelles il suffit de savoir passer à la limite (i.e. les analogues de $v_1.v_2$ et $(v_1)^2 - (v_2)^2$ pour le cas du plan). Il s'agit en effet des coefficients du tenseur une fois contravariant et une fois covariant

$$v \otimes \tilde{v} - \frac{1}{2} g(v,v)\delta \tag{37}$$

où g désigne le tenseur métrique, v le champ des vitesses sur M, $\tilde{v}$ le champ de 1-formes qui lui correspond par l'identification naturelle de TM à T^*M provenant de la métrique et δ le tenseur de type $(1,1)$ donné dans un système quelconque de coordonnées locales par

$$\delta = \delta_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \tag{38}$$

(δ_j^i : symbole de Kronecker).

Enfin, le théorème 1 admet un analogue pour l'équation d'Euler sur un ouvert à bord du plan.

Terminons par une remarque concernant l'hypothèse de positivité faite sur les données de Cauchy ω_0. On peut se demander si le problème des nappes de tourbillon admet une solution sans autre condition sur le tourbillon initial que d'être une mesure à support compact appartenant à $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$. La condition de signe que l'on a été amené à imposer ici ne l'a été que pour pouvoir prouver le théorème 4. On remarquera toutefois que ce résultat devient faux si l'on supprime dans son énoncé l'hypothèse $\alpha^\varepsilon \geq 0$. Cela découle de l'exemple suivant, qui m'a été communiqué par Patrick Gérard. Soit h une fonction C^∞ sur le cercle unité, à valeur réelles, et $a(x,\xi)$ un symbole d'opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre -2 sur $\mathbf{R}^2$, dont la partie principale $a_0(x,\xi)$ vérifie

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|=1} a_0(x,\xi)d\xi &\equiv 0 \\ \int_{|\xi|=1} a_0(0,\xi)h(\xi)^2 d\xi &\neq 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+^*)$ vérifiant $\int_0^{+\infty} \frac{\theta(r)^2}{r} dr = 2\pi$ et posons $\psi = \mathcal{F}_\xi^{-1}(\theta(|\xi|)h(\xi/|\xi|))$.

Alors $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ et vérifie $\int \psi(x)dx = 0$. Cela entraine que la suite $\alpha^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\psi(\frac{x}{\varepsilon})$ est bornée uniformément dans $L^1(\mathbf{R}^2) \cap H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ et converge faiblement vers 0 si ε tend vers 0. La suite $w^\varepsilon(x) = (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\alpha^\varepsilon$ est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. D'après [6], [7] on peut associer à une telle suite une mesure de défaut microlocale $\mu(x,\xi)$, qui est une mesure sur le fibré en sphères cotangentes $S^*\mathbf{R}^2$, telle que par définition, si $\tilde{a}(x,D) = (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}}a(x,D)(1-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, on ait (quitte à extraire une sous-suite)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \varphi(x)[\tilde{a}(x,D)w^\varepsilon].w^\varepsilon dx = \int_{|\xi|=1}\tilde{a}_0(x,\xi)\varphi(x)d\mu(x,\xi) \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \tag{40}$$

où $\tilde{a}_0$ est le symbole principal de $\tilde{a}(x,D)$ (on a $\tilde{a}_0 = a_0$ sur $|\xi|=1$).

Or, si la conclusion du théorème 4 est vérifiée par l'opérateur $a(x,D)$ et la suite α^ε, on doit avoir $[a(x,D)\alpha^\varepsilon].\alpha^\varepsilon \rightharpoonup 0$ d'où par un calcul immédiat $[\tilde{a}(x,D)w^\varepsilon].w^\varepsilon \rightharpoonup 0$, et donc d'après (40)

$$\int_{|\xi|=1} a_0(x,\xi)\varphi(x)d\mu(x,\xi) = 0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2). \tag{41}$$

Mais un calcul direct montre que

$$\mu(x,\xi) = \delta_{(x=0)}\otimes h(\xi)^2 d\xi \tag{42}$$

donc (41) est contradictoire avec (39).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac, Un phénomène de concentration pour des flots non-stationnaires incompressibles en dimension deux, Prépublications de l'Université Paris-Sud, 16p.

[2] J.Y. Chemin, Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait, incompressible, bidimensionnel, Preprint, Ecole Polytechnique, 30p.

[3] J.M. Delort, Existence de nappes de tourbillon en dimension deux, Prépublications de l'Université Paris-Sud, (1990) 38p.

[4] R. Di Perna et A. Majda, Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow, Comm. in Pure Appl. Mat. 40, (1987), 301-345.

[5] R. Di Perna et A. Majda, Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for two-dimensional incompressible flow, J. of Amer. Math. Soc. 1 (1988), 59-95.

[6] P. Gérard, Compacité par compensation et régularité 2-microlocale, Séminaire d'équations aux dérivées partielles, Ecole Polytechnique, exposé n°6, 1988-1989.

[7] P. Gérard, Microlocal Defect Measures, Prépublications de l'Université Paris-Sud, (1990), 33p.

[8] C. Greengard et E. Thomann, On Di Perna-Majda concentration sets for two-dimensional incompressible flow, Comm. Pure Appl. Math. 41, (1988), 295-303.

[9] T. Kato, On classical solutions of the two dimensional non-stationnary Euler equation, Arch. for Rat. Mech. and Analysis 25, (3), (1967), 188-200.

[10] F. Mac Grath, Non stationnary plane flow of viscous and ideal fluids, Arch. Rat. Mech. and Analysis 27, (5), (1968), 328-348.

[11] Yuxi Zheng, Concentration-Cancellation for the Velocity Fields in Two Dimensional Incompressible Fluid Flows, Preprint, University of California at Berkeley, 20p.

J.M. Delort
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX