Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Anne Boutet de Monvel-Berthier

Sur les fonctions harmoniques et holomorphes de classe H^1 et le problème de Ginzburg-Landau en deux dimensions

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 25, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A25_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SUR LES FONCTIONS HARMONIQUES ET HOLOMORPHES DE CLASSE $\mathcal{H}^1$ ET LE PROBLEME DE GINZBURG-LANDAU EN DEUX DIMENSIONS

par Anne BOUTET DE MONVEL-BERTHIER

CET EXPOSE AURAIT DU PARAITRE EN 1988-89

28 Février 1989

Sur les fonctions harmoniques et holomorphes de classe H^1 et le problème de Ginzburg-Landau en deux dimensions

Anne Boutet de Monvel-Berthier

Université Paris VII, Laboratoire de Physique Mathématique et Géométrie, CNRS

Abstract

Cet article présente une revue de résultats obtenus en collaboration avec V.Georgescu et R.Purice sur les équations de Ginzburg-Landau (voir [BMGR1], [BMGR2], [BM]). Il présente également des résultats sur les fonctions harmoniques et holomorphes de classe H^1 que j'ai développés à cette occasion.

0. Introduction

Les résultats présentés dans cet article ont été obtenus pour étudier la régularité au bord des solutions d'un problème aux limites pour le système d'équations (non linéaires) de Ginzburg-Landau (voir [[BMGR1], [BMGR2]). Ils peuvent certainement être améliorés (par exemple, on peut éliminer l'hypothèse "fonctions bornées", et on peut essayer de remplacer partout la classe $H^{1/2}$ par la classe VMO). Ici nous considérerons seulement une situation plus simple mais mieux adaptée aux équations de Ginzburg-Landau. Avant d'énoncer et de démontrer des résultats concernant les fonctions harmoniques et holomorphes de classe H^1, nous allons auparavant faire une description des résultats obtenus sur les équations de Ginzburg-Landau (voir [BMGR1], [BMGR2], [BM]).

1. Description du problème

Faisons un peu l'historique du problème. La supraconductivité a été découverte par Kammerling en 1911. En mesurant la résistivité d'un barreau de mercure, il constata qu'au dessous de 4,15 K, celle-ci tombait brutalement. Ensuite, en 1933 Meissner regarde le comportement d'un barreau de métal pur avec un champ longitudinal faible quelconque pour obtenir un état supraconducteur en présence d'un champ N et obtient une conductivité parfaite. Ainsi, quelle que soit la façon de faire pour obtenir l'état supraconducteur en présence du champ magnétique H, ils montrent que l'induction $B = H+4\pi M$ est alors nulle à l'intérieur de l'échantillon. En 1935 London obtient que les deux propriétés sont complémentaires: la superfluidité et le diamagnétisme parfait donnent une théorie électromagnétique *locale* de la supraconductivité .

Il faut ensuite attendre jusqu'en 1950 pour que Ginzburg et Landau [GL] proposent un modèle pour la supraconductivité (état dans lequel certains matériaux, sous faible température et faible champ magnétique, acquièrent une conductivité infinie). Ce modèle s'appuie sur la description des transitions de phase élaborée par Landau.

L'état d'un supraconducteur est décrit par un potentiel vecteur A, couplé avec un champ ϕ complexe. Le champ magnétique qui dérive d'un potentiel vecteur (courbure) est $B=B_A=\partial_1 A_2-\partial_2 A_1$ (dans le cas plan). On note ∇_A la connexion $\nabla_A=\nabla-iA$ et $D_A=-i\nabla_A=D-A$. On note aussi $* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la rotation d'angle $\pi/2$ et on introduit les variables complexes ∂ et $\bar{\partial}$, $\alpha=\frac{1}{2}(A_1+iA_2)$. Avec toutes ces notations les équations du problème s'écrivent:

$$D_A^2\phi = \frac{1}{2}\kappa\phi(1-|\phi|^2)$$

$$*\nabla B_A = -\mathrm{Re}(D_A\phi.\bar{\phi}) \tag{1.1}$$

$$|\phi| = 1 \text{ sur } \partial\Omega$$

où les inconnues du problème sont $\phi: \Omega \to \mathbb{C}$, et $A: \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Ceci conduit à un système d'équations du deuxième ordre; κ est un paramètre lié à la "température"; c'est une constante réelle dépendant de la température et le comportement des solutions est différent selon qu'on a $\kappa>1$ (supraconducteur de type II) ou $\kappa<1$ (supraconducteur de type I). La condition limite ignore les effets de surface sur le bord de Γ, et revient à considérer que le matériau est un supraconducteur parfait à la frontière. Dans ce problème nous nous limitons au cas d'un conducteur cylindrique (B parallèle à l'axe du cylindre ce qui donne un problème plan). On a une configuration invariante par un groupe à un paramètre de translations. Nous notons $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ la section du conducteur et nous supposerons que c'est un domaine borné de bord $\Gamma=\partial\Omega$.

Les états stationnaires extrémisent l'"énergie libre":

$$E_\kappa(A,\phi)= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|B_A|^2 + |\nabla_A\phi|^2 + \frac{\kappa}{4}(|\phi|^2-1)^2\right)dx. \tag{1.2}$$

Nous montrerons que

1) L'espace des configurations n'est pas connexe; ses composantes connexes correspondent aux classes d'homotopie de $\phi_{|\Gamma}$.

2) Les configurations extrémales sont régulières.

3) Dans le cas $\kappa=1$ nous exhibons dans chaque composante connexe les configuration qui minimisent l'énergie .

Et nous donnerons

4) des propriétés des fonctions holomorphes et harmoniques des fonctions de classe H^1.

2. Espace de configurations

L'intégrale d'énergie (1.2) a un sens si les composantes de A et ϕ appartiennent à l'espace de Sobolev H^1 des fonctions dont les dérivées premières sont de carré sommable dans Ω: c'est évident pour le deuxième terme de l'intégrale (1.2); et on a $\phi \in L^p$ pour tout p si $\phi \in H^1$, en particulier $A\phi$ et $(|\phi|^2-1)^2$ sont alors intégrables, donc aussi le premier et le troisième terme. En outre si ϕ est de classe H^1, la restriction $\phi_{|\Gamma}$ est bien définie au sens fonctionnel et elle appartient à $H^{1/2}(\Gamma)$, ce qui nous permet de donner un sens à la condition limite $|\phi_{|\Gamma}|=1$. Nous choisissons comme espace de configurations celui qui rend raisonnablement finie l'énergie:

(2.1) $\qquad C_1 \subset C=H^1(\Omega,\mathbb{R}^2)\times H^1(\Omega,\mathbb{C})$ la partie formée des couples (A,ϕ) tels que $|\phi_{|\Gamma}|=1$.

Tout se passe dans un domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ à frontière lisse; à cela s'ajoute le condition limite physique $|\phi|=1$ sur le bord $\partial\Omega$. Sur cet espace opère le groupe de jauge $G=H^2(\Omega,\mathbb{R})$ qui agit sur toute la situation. C'est le groupe des transformations unitaires qui opèrent via

$$(A,\phi)\longmapsto(A+\nabla\Lambda,e^{i\Lambda}\phi) \text{ pour } (A,\phi)\in C \text{ et } \Lambda\in G.$$

Les configurations physiques sont les classes d'équivalence des éléments de C_1 modulo l'action de G. Les quantités qui ont une signification physique sont celles qui sont invariantes par l'action de G. Ainsi il est immédiat que l'énergie (1.2) et les équations (1.1) sont invariantes par cette action (de sorte aussi que notre espace de configurations est le plus "raisonnable" mais pas le plus grand possible). Le champ magnétique B_A, le module $|\phi|$, le courant et l'indice d'enroulement sont encore invariants par le groupe de jauge. Pour le courant,

(2.2) $\qquad J(A,\phi) = -\mathrm{Re}(D_A\phi.\bar{\phi}) = \mathrm{Im}(\nabla\phi.\bar{\phi}) + A\phi.\bar{\phi}$

et l'indice d'enroulement

(2.3) $\qquad F(A,\phi) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \bar{\phi}\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_\Omega B_A - \int_\Gamma \tau\cdot J\Big)$

où τ est le vecteur unitaire tangent à Γ.

On a aussi les degrés partiels

(2.4) $\qquad F_j(A,\phi) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_j} \bar{\phi}\, d\phi$

où les Γ_j sont les composantes connexes de Γ (orientées comme bord de Ω). Comme nous le verrons, F et F_j sont toujours des nombres entiers; et les intégrales définissant F et F_j ont bien un sens si $\phi\in H^{1/2}$ puisqu'on a alors $d\phi\in H^{-1/2}$ qui est le dual de $H^{1/2}$.

Proposition 2.1. *Les configurations* (A,ϕ) *de classe* C^∞ (i.e. *dont les composantes sont de classe* $C^\infty(\bar{\Omega})$) *sont denses dans* C_1.

Corollaire 2.2. *Les composantes connexes de* C_1 *sont classifiées par la collection* $(n_0,\ldots,n_k)$ *des indices partiels* $F_j(A,\phi)$.

Les $(A,\phi)\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^2)\times C^\infty(\Omega,\mathbb{C})$ sont denses dans C. Ceci est facile à voir, par contre à cause de la condition limite non linéaire $|\phi|=1$ sur le bord Γ , il est moins évident mais néanmoins vrai que les $(A,\phi)\in C^\infty \cap C_1$ sont denses dans C_1. Ceci résulte de l'observation suivante: bien qu'une fonction $f\in H^{1/2}(\Gamma)$ telle que $\phi_{|\Gamma}$, ne soit pas continue, elle est V.M.O, i.e. son oscillation moyenne sur de petits intervalles I tend vers 0 avec la longueur $\ell(I)$ de l'intervalle I. De ceci on déduit que les régularisées de la fonction f sont de module voisin de 1 si $|f|=1$, ou aussi bien que le prolongement harmonique de f dans Ω est de module voisin de 1 près de Γ si $|f|=1$. Er par suite on peut approcher la fonction f dans $H^{1/2}$ par des fonctions C^∞ de module 1.

Il en résulte aussi que les composantes connexes de C_1 sont les mêmes que celles de $C_1 \cap C^\infty$ et sont ouvertes dans C_1. Elles sont départagées par les classes d'homotopie de $\phi_{|\Gamma}$. Ainsi si $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_k$ sont les composantes connexes de Γ, les composantes connexes sont les $C^{n_0,\ldots,n_k}$ où $n_j = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_j} \bar{\phi}\, d\phi$ est le degré de $\phi_{|\Gamma_j}$ (Γ_j étant orienté comme bord).

3. Régularité des solutions

On dit qu'une configuration physique a un certain type de régularité (par exemple est de classe de Sobolev H^s) si sa classe d'équivalence contient une configuration (A,ϕ) ayant ce type de régularité. Faisons l'observation suivante: si (A,ϕ) est une configuration, il existe une configuration équivalente (A',ϕ'), unique (à un facteur constant près pour ϕ), telle que

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{div} A' = 0 \\ &\nu\cdot A' = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

ν étant le champ de vecteurs normal extérieur. Le problème de Neumann

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{aligned} &\operatorname{div} A + \operatorname{div} \nabla\Lambda = 0 \\ &\nu.(A+\nabla\Lambda) = 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

a une solution $\Lambda\in H^2(\Gamma)$ ($\operatorname{div} A\in L^2(\Omega)$ et $\nu.A\in H^{1/2}(\Gamma)$. Cette solution est *unique* à une constante additive près et la condition d'intégrabilité de (3.2) est clairement satisfaite. Cette configuration a la régularité optimale, en particulier elle est de classe H^s, resp. C^∞, si la configuration de départ l'est. De ceci on déduit:

— Si Γ est de classe C^∞ et si une configuration (A,ϕ) est localement équivalente à une configuration de classe H^s ou C^∞, elle l'est globalement.

— Si on rajoute aux équations des configurations stationnaires (1.1) les équations (3.2), on obtient un système elliptique

$$(3.3) \qquad D^2\phi = 2A.D\phi - A^2\phi + \frac{\kappa}{2}(1-|\phi|^2)\phi$$

$$D^2A = \mathrm{Re}(\bar{\phi}.D_A\phi) - A|\phi|^2$$

dont les solutions suffisamment régulières sont C^∞ (analytiques si Γ est analytique).

On a aussi le résultat suivant:

Proposition. *Soit* $(A,\phi)\in C_1$ *une configuration stationnaire. Alors:*

1) *ou bien* $|\phi|\equiv 1$, *ou bien* $|\phi|<1$ *dans* Ω;

2) *si de plus* $\kappa\leq 1$, *ou bien* $|B_A|\equiv(1-|\phi|^2)/2$, *ou bien* $|B_A|<(1-|\phi|^2)/2$ *dans* Ω.

En effet on pose $w=(1-|\phi|^2)/2\in H_0^1(\Omega)$. Les équations (1.1) impliquent

$$(D^2+\kappa|\phi|^2)w = |D_A\phi|^2\geq 0$$

et la première assertion résulte du principe du maximum pour w ($w>0$ ou $w\equiv 0$). En outre on a

$$(D^2+|\phi|^2)B_A = i\,\overline{D_A\phi}\,(*D_A\phi);$$

d'où on déduit

$$(D^2+|\phi|^2)(w\pm B_A) = (1-\kappa|\phi|^2)+|D_A\phi|^2\pm i\,\overline{D_A\phi}\,(*D_A\phi)\geq 0 \text{ si } \kappa\leq 1$$

et la deuxième assertion, toujours d'après le principe du maximum.

4. Le cas $\kappa=1$. Configurations multi-vortex

Nous allons faire une étude plus détaillée des configurations minimales dans ce cas-là. Notons $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_k$ les composantes connexes de Γ (Γ_0 désignant la composante extérieure, qui borde la composante non bornée de $\mathbb{C}\setminus\Omega$) et si $n_0,\ldots,n_k$ est une suite d'entiers on notera $C^{n_0,\ldots,n_k}$ la composante connexe de C_1 formée des configurations (A,ϕ) telles que

$$F_j(A,\phi) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_j}\bar{\phi}\,d\phi = n_j.$$

Nous poserons $n=n_0+\ldots+n_k$ et nous supposerons dans ce qui suit $n\geq 0$ (le cas $n\leq 0$ se déduit du cas considéré ci-dessous par passage au complexe conjugué). Pour $1\leq j\leq k$, soit a_j un point de la composante de $\mathbb{C}-\Omega$ limitée par Γ_j. Soit $z_1,\ldots,z_n$ une suite de n points (non nécessairement distincts) de Ω. Posons

$$G(z) = \prod_{j=1}^{n} (z-z_j)^{\nu_j} \prod_{j=1}^{k} (z-a_j)^{n_j}.$$

C'est une fonction holomorphe dans Ω, qui ne s'annule pas sur Γ, et dont le degré sur Γ_j (orienté comme bord) est précisément n_j pour $0 \le j \le n$. Si maintenant $f \in H^{1/2}(\Gamma)$, $|f|=1$ avec zéros $z_1, \ldots, z_n$ de multiplicités $\nu_1, \ldots, \nu_n$ et $\deg(f|_{\Gamma_j}) = n_j$, alors $\frac{f}{G}$ est de degré nul sur chaque Γ_j ; si elle est continue, son logarithme est uniforme; on montre en fait que l'on a toujours sous les hypothèses ci-dessus $f = Ge^{i\phi}$ avec $\phi \in H^{1/2}(\Gamma, R)$ (par exemple le prolongement harmonique $\tilde{f}$ de $\frac{f}{G}$ est de classe H^1, de norme voisine de 1 près de Γ, et de degré topologique nul; son logarithme (près de Γ) qui est une primitive de $\frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}}$ est alors uniforme, de classe H^1, et on en prend la restriction à Γ).

Dans le cas $\kappa=1$ on peut réécrire autrement l'énergie (1.2) et les équations du problème. On a:

(4.1) $$E_1(A,\phi) = \frac{1}{4}\|(D_A \mp i*D_A)\phi\|^2 + \frac{1}{2}\|B_A \mp w\|^2 + \frac{\kappa-1}{2}\| w \|^2 + \pi F(A,\phi),$$

où la première norme est la partie antiholomorphe de $\nabla_A = \nabla - iA$, où $w = \frac{1}{2}(1-|\phi|^2)$ et où $F(A,\phi) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \bar{\phi}\, d\phi$ est le degré de $\phi|_{\partial\Omega}$ défini par la formule (2.3) (c'est un entier). Dans ce cas-là le terme $\frac{\kappa-1}{2}\| w \|^2$ disparaît. Sur l'ensemble C^n des configurations de degré total n, on a

$$E_\kappa(A,\Phi) \ge |n|.$$

Nous exhibons pour ce cas-là, une famille de configurations pour lesquelles ce minimum est atteint. On va se limiter au cas $n \ge 0$. L'autre cas s'en déduit par symétrie.

Soit G paramétrée par $n_1, \ldots, n_\kappa$ qui définissent une composante connexe de C_1 et le diviseur $\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_p z_p$. On cherche A et $\phi = G\psi$ de telle sorte qu'on ait

(4.2) $$\begin{aligned} &(D_A + i*D_A)\phi = 0 \\ &B_A + w = 0. \end{aligned}$$

En introduisant les variables complexes ∂ et $\bar{\partial}$ et $B_A = i\,\mathrm{div}A - 4\partial\alpha$, on obtient

(4.3) $$\begin{aligned} &(\bar{\partial}-\alpha)\phi = 0 \\ &\mathrm{Re}(\partial\alpha) = \frac{w}{4} \qquad \text{avec } \alpha = \frac{iA_1 - A_2}{2}. \end{aligned}$$

Comme la fonction G est holomorphe, la première équation s'écrit encore

(4.4) $\alpha = \bar\partial\phi/\phi = \bar\partial\psi/\psi.$

En posant $a = |G|^2$, $|\psi|^2 = e^u$ et $\varphi = G^{-2}|\Gamma$, on voit que u vérifie une équation variationnelle

(4.5)
$$-\Delta u + ae^u = 1$$
$$u|\Gamma = \varphi.$$

Cette dernière équation est variationnelle coercive (parce que $a \geq 0$) et elle a une solution unique et régulière. Dans ces conditions, u étant solution de (4.5), on peut poser $\phi = e^{u/2}G$, et le potentiel vecteur A est alors déterminé par (4.2) et (4.3).

5.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et f une classe d'équivalence (relativement à la mesure de Lebesgue sur I) de fonctions complexes sur I. Si J désigne un autre intervalle ouvert contenu dans I, alors son image par f n'est pas bien définie. Pour cette raison, nous allons introduire *l'image essentielle de* J *par* f (notée $f^{ess}(J)$ dans la suite) comme l'ensemble des nombres complexes z tels que pour tout $\varepsilon>0$ l'ensemble des $t \in J$ tels que $|f(t)-z|<\varepsilon$ soit non négligeable (ceci ne dépend évidemment que de la classe d'équivalence de la fonction f). On peut aussi dire: si $J \subset I$, l'image essentielle $f^{ess}(J)$ est l'ensemble des z tels que $f^{-1}(V) \cap J$ soit de mesure nulle pour tout voisinage V de z; de façon équivalente: si f est bornée, c'est le spectre de l'opérateur de multiplication par f dans $L^\infty(J)$. Alors $f^{ess}(J)$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$ et $f^{ess}(J_1) \subset f^{ess}(J_2)$ si $J_1 \subset J_2$. Pour tout $x \in I$ on pose

$$f^{ess}(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} f^{ess}(I_x(\varepsilon)), \qquad f^{ess}(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} f^{ess}([x-\varepsilon;x+\varepsilon]),$$

où nous avons utilisé la notation $I_x(\varepsilon)=\{y \in I \mid |x-y|<\varepsilon\}$. C'est encore une partie fermée de $\mathbb{C}$, mais qui peut être vide (si J est un intervalle ouvert non vide, alors il est clair que $f^{ess}(J)$ est aussi non vide). En fait il est facile de voir que $f^{ess}(x)=\varnothing$ si et seulement si pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ il existe $\varepsilon>0$ tel que $f^{ess}(I_x(\varepsilon)) \cap L=\varnothing$. Ceci équivaut à $\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{ess\,inf}_{|t-x|<\varepsilon} |f(t)| = \infty$.

Si f est dans $L^1_{loc}(J)$ et si J est un sous-intervalle ouvert non vide de I, la moyenne de f sur J est le nombre

$$f_J = m_J(f) = \frac{1}{|J|}\int_J f(x)dx\,,$$

et l'oscillation moyenne de f sur J est le nombre

$$\omega_J(f) = \frac{1}{|J|}\int_J |f(x)-f_J| \; dx.$$

Lemme 1. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus:*

(5.1) $\quad \mathrm{dist}\big(f_J, f^{ess}(J)\big) \le \omega_J(f).$

En effet f_J appartient à l'enveloppe convexe de $f^{ess}(J)$ (c'est par définition même un barycentre de points de cet ensemble). L'inégalité (5.1) est très simple mais très utile.

La pertinence de l'espace VMO dans notre contexte et l'inclusion $H^{1/2}(\mathbb{R}) \subset$ VMO sont des observations dues à Louis Boutet de Monvel. Pour des détails et des précisions concernant les fonctions de classe VMO , on peut consulter le chapitre VI de [G] . Soit

(5.2) $$N_\varepsilon^I(f) = \sup \Big\{ \frac{1}{|J|}\int_J |f(x)-f_J|\, dx \;\Big|\; J \subset I \text{ soit un intervalle de longueur } |J| \le 2\varepsilon \Big\}.$$

Alors l'inégalité (5.1) implique

(5.3) $\quad \mathrm{dist}\,\big(f_J, f^{ess}(J)\big) \le N_\varepsilon^I(f)$

si $J \subset I$ est un intervalle de longueur au plus 2ε . Nous dirons que f *est de classe* VMO *sur* I si $\lim_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon^I(f) = 0$.

Lemme 2. *Soient* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert, f une fonction complexe mesurable et localement intégrable sur* I *et* $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt$ *pour* $\varepsilon>0$ *et* $(x-\varepsilon,x+\varepsilon) \subset I$. *Si* f *est de classe* VMO *sur* I, *alors*

(5.4) $\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{dist}\,\big(f_\varepsilon(x), f^{ess}(I_x(\varepsilon)\big) = 0\,,$

uniformément en x *lorsque* x *parcourt un compact de* I . *Si de plus* f *est bornée sur un voisinage de* x , *alors*

(5.5) $\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{dist}\,\big(f_\varepsilon(x), f^{ess}(x)\big) = 0\,.$

Preuve. D'après (5.3) on a $\mathrm{dist}\big(f_\varepsilon(x), f^{ess}(I_x(\varepsilon))\big) \le N_\varepsilon^I(f)$ ce qui implique (5.4). Fixons maintenant x et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $F_\varepsilon = f^{ess}\big(I_x(\varepsilon)\big)$ soit compact pour $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Alors, $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon\le\varepsilon_0}$ est une famille décroissante de compacts et $\bigcap_\varepsilon F_\varepsilon = F = f^{ess}(x)$. Si U est un ouvert contenant F, alors il existe ε tel que $F_\varepsilon \subset U$ (sinon $F_\varepsilon \setminus U$ est une famille décroissante de compacts non vides, donc leur intersection qui est égale à $F\setminus U = \emptyset$ est non vide, ce qui est absurde).

Donc $\mathrm{dist}(F, \mathbb{C}\setminus F_\varepsilon) \to 0$ si $\varepsilon \to 0$. Comme on sait que $\mathrm{dist}\big(f_\varepsilon(x), F_\varepsilon\big) \to 0$ on obtient finalement $\mathrm{dist}\big(f_\varepsilon(x), F\big) \to 0$. ■

6.

L'espace de Sobolev $H^{1/2}(I)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(I)$ telles que

$$(6.1) \qquad \int_{I\times I} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|^2 dxdy < +\infty.$$

Nous allons montrer que la classe $H^{1/2}(I)$ est contenue dans la classe VMO(I) . On a:

$$(6.2) \qquad \frac{1}{|J|}\int_J |f(x)-f_J|\, dx = \frac{1}{|J|}\int_J dx \frac{1}{|J|}\left|\int_J (f(x)-f(y))\, dy\right|$$

$$\leq \frac{1}{|J|^2}\int_{J\times J} |f(x)-f(y)|\, dx\, dy \leq \left[\frac{1}{|J|^2}\int_{J\times J} |f(x)-f(y)|^2 dx\, dy\right]^{1/2}$$

$$\leq \left[\int_{J\times J} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|^2 dx\, dy\right]^{1/2}.$$

On obtient donc

$$(6.3) \qquad N_\varepsilon^I(f) \leq \sup_{\substack{J\subset I \\ |J|\leq 2\varepsilon}} \left[\int_{J\times J} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|^2 dx\, dy\right]^{1/2}.$$

Sous l'hypothèse (6.1), le terme de droite dans l'expression (6.3) tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Lemme 3. *Si* $f \in H^{1/2}(I)$ *et si* f *est localement bornée, alors* $f^{ess}(J)$ *est connexe pour tout intervalle ouvert* $J \subset I$.

Preuve. Il suffit, évidemment de considérer un intervalle J=I intervalle borné et f borné. Si $f^{ess}(J)$ n'est pas connexe, alors il existe deux ensembles compacts et disjoints A , B dans $\mathbb{C}$ tels que $f^{ess}(I) = A\cup B$. Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction Lipschitzienne telle que $\varphi(z)=1$ si $z\in A$ et $\varphi(z)=0$ si $z \in B$ (par exemple, $\varphi(z) = \text{dist}(z,B)[\text{dist}(z,A) + \text{dist}(z,B)]^{-1}$). Il est clair que $g = \varphi \circ f \in H^{1/2}(I)$ et g ne prend que les valeurs 0 et 1, i.e. g est la fonction caractéristique d'un borélien K de I . Montrons que g ne peut pas être de classe VMO si elle n'est pas constante (presque partout). Nous avons $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}|K \cap I_x(\varepsilon)|$. On sait que $\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x)=1$ (resp. 0) presque partout sur K (resp. sur $I\setminus K$) . Si $|K|\neq 0$ et $|I\setminus K| \neq 0$, alors on peut trouver $x_0 \in K$, $x_1 \in I\setminus K$ et $\varepsilon > 0$ tels que $g_\varepsilon(x_0) \geq \frac{3}{4}$ et $g_\varepsilon(x_1) \leq \frac{1}{4}$. La fonction g_ε étant continue, il existe donc $x\in I$ tel que $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}$. De plus, ε peut être choisi aussi petit que l'on veut. Mais $g^{ess}(x) \subset \{0, 1\}$. Nous sommes donc en contradiction avec (5). ■

Remarquons que l'affirmation du lemme précédent est fausse si $H^{1/2}$ est remplacé par H^s avec $s < \frac{1}{2}$. En effet le théorème 11.4 du chapitre I de [LM] montre que la fonction caractéristique d'un intervalle compact est dans $H^s(\mathbb{R})$ si $s < \frac{1}{2}$.

7.

Considérons maintenant une fonction harmonique bornée F dans le demi-plan $\mathscr{H} = \{z\in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z>0\}$. On sait alors (voir [G]) qu'il existe une fonction bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que (on note $z=x+iy$, $x\in \mathbb{R}$, $y > 0$) :

$$(7.1) \qquad F(z) = \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)\, f(t)\, dt = (P_y * f)(x) .$$

Ici

$$P_y(x-t) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-t)^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{t-z}$$

est le noyau de Poisson associé à $\mathscr{H}$. Il existe une grande similarité entre $F(x+iy)$ et $f_y(x) = \frac{1}{2\varepsilon}(\chi_\varepsilon * f)(x)$, χ_ε étant la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\varepsilon,\varepsilon]$ (voir lemme 1). Ceci est un fait fondamental dans la théorie des fonctions de classe BMO (voir [G]). Nous allons exploiter cette similarité pour démontrer un résultat analogue au lemme 1 dans le cas où $f_y(x)$ est remplacé par $F(x+iy)$.

Pour tout nombre $a>0$, on pose $\lambda=\operatorname{ctg}\frac{a\pi}{2}$. Donc

$$\int_{|x|>\lambda y} P_y(x)\, dx = \frac{1}{\pi}[\pi - 2\operatorname{arctg} \lambda] = a .$$

Comme $P_y(x-t) \leq \frac{1}{\pi y}$, on obtient alors pour $y > 0$ et $x, s\in \mathbb{R}$

$$|F(x+iy)-f(s)| \leq \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)\, |f(t) - f(s)|\, dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi y}\int_{|x-t|\leq\lambda y} |f(t)-f(s)|\, dt + \int_{|x-t|>\lambda y} P_y(x-t)dt.\ 2 \operatorname*{ess\,sup}_{t\in \mathbb{R}} |f(t)|$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi}\, \frac{1}{2\lambda y}\int_{|x-t|\leq\lambda y} |f(t) - f(s)|\, dt + 2a\, \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R})} .$$

Si on note $I_x(\lambda y) = (x-\lambda y, x+\lambda y)$ il vient

$$\frac{1}{|I_x(\lambda y)|}\int_{I_x(\lambda y)} |F(x+iy) - f(s)|\, ds \leq$$

$$\leq \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{|I_x(\lambda y)|^2}\int_{I_x(\lambda y)} ds \int_{I_x(\lambda y)} |f(t)-f(s)|\, dt + 2a\| f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\leq \Big[\frac{2\pi}{\lambda}\int_{I_x(\lambda y)\times I_x(\lambda y)} \Big|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\Big|^2 dt\, ds\Big]^{1/2} + 2a\| f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

(voir (6.2) pour la dernière inégalité).

Observons que l'inégalité (5.1) est encore valable même si on remplace f_J par un nombre complexe quelconque, $F(x+iy)$ par exemple. On obtient ainsi

$$\text{(7.2)} \qquad \operatorname{dist}\big(F(x+iy), f^{\text{ess}}(I_x(\lambda y))\big) \leq \frac{2\pi}{\lambda}\Big[\int_{I_x(\lambda y)\times I_x(\lambda y)} \Big|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\Big|^2 dt\, ds\Big]^{1/2} + 2a\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

En prenant successivement a petit (ce qui fixe λ) et y petit on obtient l'analogue du lemme 1.

Lemme 4. *On considère une fonction harmonique* F *bornée dans le demi-plan supérieur* $\mathcal{H} = \{z=x+iy \in \mathbb{C} \mid y>0\}$. *On note* f *la valeur au bord* (y=0) *et on suppose que* $f \in H^{1/2}(I)$, I *étant un intervalle ouvert dans* $\mathbb{R}$. *Alors pour tout* $x \in I$ *on a*

$$\text{(7.3)} \qquad \lim_{y \to +0} \operatorname{dist}\big(F(x+iy), f^{\text{ess}}(I)\big) = 0,$$

uniquement quand x *parcourt un compact de* I.

Ce résultat étant essentiellement local, on obtient facilement l'assertion suivante.

Théorème 1. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un ouvert borné avec frontière* Γ *de classe* C^∞ *et* $F: \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction harmonique bornée, supposons que la valeur au bord* $f = F|_\Gamma$ *est de classe* $H^{1/2}$ *sur un sous-ensemble* J *de* Γ *qui est ouvert (dans* Γ*) et connexe.*

Alors pour tout voisinage V *de* $f^{\text{ess}}(J)$ *dans* $\mathbb{C}$ *et tout compact* $K \subset J$, *il existe un voisinage* U *de* K *dans* $\Omega \cup \Gamma$ *tel que* $F(U \setminus \Gamma) \subset V$. *En particulier, si* $0 < \lambda \leq |f| \leq \mu$ *sur* J, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout compact* $K \subset J$ *on peut trouver* U *tel que* $\lambda - \varepsilon \leq |F| \leq \mu + \varepsilon$ *sur* $U \setminus \Gamma$.

Preuve. Il existe un ouvert simplement connexe Ω_0 à frontière Γ_0 de classe C^∞ tel que $\Omega_0 \subset \Omega$ et $J \subset \Gamma_0 \cap \Gamma$. En remplaçant éventuellement Ω par Ω_0 on peut donc supposer Ω simplement connexe. Mais alors, il existe une application conforme φ de Ω sur le demi-plan supérieur $\mathcal{H}$ qui l'étend à un difféomorphisme de $(\Omega \cup \Gamma) \setminus \{z_0\}$ sur $\mathcal{H} \cup \mathbb{R}$ (z_0 étant un point de $\Gamma \setminus J$ choisi une fois pour toutes). On applique alors le lemme 3 à la fonction $F \circ \varphi^{-1}$ et à l'intervalle $I = \varphi(J)$. Il suffit de remarquer encore, que $f^{\text{ess}}(J)$ étant compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble des points z dont la distance à $f^{ess}(J)$ est au plus égale à ε, est contenu dans V .■

Corollaire. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière Γ de classe C^∞ et $F: \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique, bornée et de classe H^1 de Sobolev* (i.e. $\int_\Omega (|\partial_x F|^2 + |\partial_y F|^2) dxdy < \infty$) . *Si la valeur au bord $f = F|_\Gamma$ est telle que $|f| \geq \lambda > 0$ presque partout sur Γ, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|F| \geq \lambda - \varepsilon$ sur $\Omega(\delta) = \{z \in \Omega \mid \text{dist}(z, \Gamma) < \delta\}$.*

8.

Comme applications des résultats précédents nous allons en déduire quelques propriétés des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, borné, connexe et à frontière Γ de classe C^∞. Comme d'habitude on note $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Une distribution f sur Ω est une fonction holomorphe si $\bar{\partial} f = 0$ et alors $\partial f = f'$ est la dérivée complexe de f. En particulier, une fonction holomorphe f est de classe H^1 (de Sobolev) sur Ω si et seulement si $\int |f'(z)|^2 dxdy < \infty$. Dans ce cas $f|_\Gamma$ est bien définie et est de classe $H^{1/2}$ sur Γ. La dérivée f' est encore holomorphe dans Ω et de carré intégrable mais elle n'est pas classe H^1. Le lemme suivant montre que $f'|_\Gamma$ est encore définie et de classe $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Lemme 5. *Soit* $V = \{f \in L^2(\Omega) \mid \bar{\partial} f \in L^2(\Omega)\}$. *C'est un espace vectoriel muni de la norme*

$$\|f\|_V = \int_\Omega (\|f\|^2 + \|\bar{\partial} f\|^2)^{1/2}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme dans $L^2(\Omega)$. Alors $C^\infty(\bar{\Omega})$, où $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, est dense dans V, et l'application $f \rightsquigarrow f|_\Gamma$ s'étend à une application continue de V dans $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Preuve. La densité de $C^\infty(\bar{\Omega})$ dans V suit d'un résultat général de Friedrichs (voir [F]). Soit $\vec{\nu}(z) = (\nu_1(z), \nu_2(z))$ la normale unitaire extérieure à Ω au point $z \in \Gamma$ et $\nu(z) = \nu_1(z) + i\nu_2(z) \in \mathbb{C}$. Alors $\nu : \Gamma \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^∞ et $|\nu(z)| \equiv 1$. On note $< . , . >$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ (anti-linéaire dans la première variable) et $< . , . >_\Gamma$ celui de $L^2(\Gamma)$ (relativement à la mesure associée à la longueur géodésique). Alors une intégration par parties donne

$$< g, \bar{\partial} f > + < \partial g, f > = \frac{1}{2} < g, \nu f >_\Gamma$$

pour $f, g \in H^1(\Omega)$, et νf définie par $(\nu f)(z) = \nu(z) f(z)$, le produit usuel dans $\mathbb{C}$.

Il existe donc une constante $C < \infty$ telle que

$$|< g, \nu f >_\Gamma| \leq C \| g \|_{H^1(\Omega)} \| f \|_V$$

D'autre part on sait (voir [LM]) qu'il existe $R : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ continue, linéaire telle que $(R\varphi)|_\Gamma = \varphi$ pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. On obtient alors

$$|< \varphi, \nu f >_\Gamma| \leq C \| R\varphi \|_{H^1(\Omega)} \| f \|_V$$

$$\leq C' \| \varphi \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \| f \|_V$$

pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. En remplaçant φ par $\nu\varphi$, et compte tenu du fait que $\nu(z)\overline{\nu(z)} = |\nu(z)|^2 = 1$ et que ν est une fonction C^∞ sur Γ, on obtient

$$|< \varphi, f >_\Gamma| \leq C'' \| \varphi \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \| f \|_V .$$

Ceci implique

$$\| f|_\Gamma \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C'' \| f \|_V . \blacksquare$$

Remarque. Si Ω est le disque unité et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $\| f \|^2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2/(n+1)$.

Nous voulons maintenant donner un sens à l'expression $\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ pour les fonctions holomorphes de classe H^1 sur Ω telles que $|f(z)| \geq c^{ste} > 0$ sur Γ. Si de plus f est de classe C^1 sur $\bar{\Omega}$, alors, par définition, ceci est $\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \tau(z)\, d\sigma$, où $d\sigma$ est l'élément de longueur sur Γ et $\tau(z) = -\nu_2(z) + i\nu_1(z)$ (on remarque que $\vec{\tau}(z)$ est le vecteur tangent (unitaire) à Γ convenablement orienté). Si $\frac{d}{d\sigma}$ est la dérivée tangentielle sur Γ (orienté) on a aussi $f'\tau = \frac{d}{d\sigma} f$ sur Γ. Et dans ce cas on peut écrire

$$\text{(8.1)} \qquad \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = < \bar{f}^{-1}, f'\tau >_\Gamma = < \bar{f}^{-1}, \frac{d}{d\sigma} f >_\Gamma .$$

Ici $< .,. >_\Gamma$ est le produit scalaire dans $L^2(\Gamma)$ (anti-linéaire dans le premier facteur). Si f est seulement de classe $H^1(\Omega)$, holomorphe et $|f| \geq c^{ste} > 0$ sur Γ, alors $f|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$, l'inverse $(f|_\Gamma)^{-1}$ est aussi dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et $f'|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$. On peut interpréter alors le produit scalaire $<.,.>_\Gamma$ comme l'antidualité sur $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, ce qui donne un sens au premier membre de (8.1) dans le cas général.

Proposition 1. *Soit* f *une fonction holomorphe bornée sur* Ω *telle que*

$$\int_\Omega |f'(z)|^2\, dx\, dy < \infty \ (\textit{i.e. } f \in H^1(\Omega))$$

et que de plus

$$|f| \geq c^{ste} > 0 \; sur \; \Gamma.$$

Alors

$$|f| \geq c^{ste} > 0 \; sur \; un \; voisinage \; de \; \Gamma \; dans \; \Omega .$$

En particulier f *a seulement un nombre fini de zéros* $z_1, \ldots, z_\ell$ *dans* Ω *et, si on note* n_k *la multiplicité de* z_k *, alors la formule usuelle de comptage reste juste si on interprète l'intégrale suivante au sens des distributions* (cf. (8.1)) :

$$(8.2) \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{\ell} n_k .$$

Preuve. En tenant compte du corollaire du théorème 1, il nous reste seulement à montrer (13). Cette formule est juste si on remplace Γ par $\Gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(z,\Gamma) = \varepsilon\}$ pour $\varepsilon>0$ petit. Le passage $\varepsilon \to +0$ est facile à justifier en tenant compte des résultats antérieurs. ■

Pour comprendre la nature du résultat il faut penser au cas où Ω est le disque unité et f une fonction intérieure (i.e. $|f(z)|=1$ presque partout sur Γ) . La proposition précédente montre que f ne peut pas contenir comme facteur un produit de Blaschke infini (si $\int_\Omega |f'(z)|^2 dxdy < \infty$) (voir chapitre II section 6 dans [G]). Nous allons maintenant obtenir des résultats plus détaillés qui permettront d'éliminer aussi la partie singulière (et *d'obtenir* en particulier un *théorème de D.J. Newman et H.S. Shapiro*).

9.

Considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ comme au point précédent. Alors la frontière Γ est la réunion disjointe de ses composantes connexes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ (m étant le nombre des trous de Ω, $m \geq 0$) , où Γ_0 est la frontière extérieure de Ω . Chaque Γ_j est difféomorphe au cercle unité S^1. Si f est une fonction définie comme dans la proposition 1, on peut alors définir $\oint_{\Gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ comme dans (8.1). Chaque Γ_j est orienté par la normale extérieure à Ω. Il est clair que $\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ sera la somme sur $j = 0, 1, \ldots, m$ de ces nombres-là.

Lemme 6. *Pour chaque entier* $j = 0, 1, \ldots, m$, *le nombre*

$$(9.1) \qquad N_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

est un entier.

Preuve. Si on tient compte de la définition (8.1), ceci provient d'un résultat général de

Louis Boutet de Monvel (voir [BMGR2], Appendice): il suffirait que $F|_{\Gamma_j} \equiv g$ soit de classe $H^{1/2}(\Gamma_j)$ et que $|g| \geq c^{ste} > 0$ sur Γ_j.

Dans le cas particulier qui nous intéresse la démonstration est beaucoup plus simple. On sait que $|f| \geq c^{ste} > 0$ sur un voisinage de Γ_j et il est facile de justifier le fait que N_j est la limite $(\varepsilon \to 0)$ de $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{j\varepsilon}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, où $\Gamma_{j\varepsilon} = \{z \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(z, \Gamma_j) = \varepsilon\}$ (voir la démonstration de la proposition 1). Comme cette dernière expression est évidemment un entier, le lemme est démontré. ■

Proposition 2. *Sous les mêmes conditions et avec les mêmes notations que dans la proposition* 1, *on choisit un point* ζ_j *dans chacune des régions bornées par les courbes* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. *Il existe alors une fonction holomorphe* g *de classe* $H^1(\Omega)$ *de Sobolev* (i.e. $\int_\Omega |g'(z)|^2 dx\, dy < \infty$) *telle que*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\ell} (z - z_k)^{n_k} \prod_{j=1}^{m} (z - \zeta_j)^{N_j} e^{g(z)}.$$

Preuve. En multipliant f par $\prod_{k=1}^{\ell} (z - z_k)^{-n_k}$ on peut supposer que f ne s'annule pas dans Ω.

D'après la proposition 1 il suit que $|f| \geq c^{ste} > 0$ dans Ω. Si on multiplie encore par $\prod_{j=1}^{m} (z - \zeta_j)^{N_j}$ il suit que la fonction ainsi obtenue (que l'on notera toujours f) aura de plus la propriété suivante :

$$\oint_{\Gamma_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0 \qquad \text{pour tout } j = 0, 1, \ldots, m.$$

On aura ceci sur $\Gamma_{j\varepsilon}$, pour ε suffisamment petit, au lieu de Γ_j. Donc en remplaçant Ω par $\Omega_\varepsilon = \{z \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(z, \Gamma) > \varepsilon\}$ et en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on construit de façon classique une fonction g holomorphe sur Ω telle que $f(z) = \exp g(z)$.

Comme $g' = \frac{f'}{f}$, il est clair que $\int_\Omega |g'|^2 dx\, dy < \infty$. ■

Corollaire. *Supposons que* $|f(z)| = 1$ *sur un ouvert* I *de* Γ. *Alors* f *a un prolongement holomorphe dans un voisinage (dans* $\mathbb{C}$*) de* I. *En particulier, si* $|f| = 1$ *sur* Γ, *alors* f *possède un prolongement holomorphe dans un voisinage de* $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Preuve. L'assertion étant locale, on peut supposer $\Omega = \{z = x + iy \,|\, a < x < b,\ 0 < y < c\}$ et $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ (faire une transformation conforme autour du point I). De plus, on peut supposer $f = \exp g$ où g est holomorphe et de classe H^1 de Sobolev dans Ω.

Il est clair que la partie réelle de g doit s'annuler (presque partout) sur I. Le principe de réflexion de Schwarz montre que g se prolonge holomorphiquement au delà de I, donc f aussi. ∎

En particulier, on obtient le résultat suivant (voir [NS]):

Si f *est une fonction holomorphe bornée dans le disque unité* D *telle que* $|f(z)|=1$ *sur la frontière (presque partout),* i.e. *si* f *est une fonction intérieure, et si de plus* $\int |f'(z)|^2 dxdy < \infty$, *alors* f *est un produit de Blaschke fini (multiplié par une constante).*

Beaucoup de choses fonctionnent encore sous l'hypothèse $f|_\Gamma \in$ VMO. Ainsi, la définition de log f et celle des indices d'enroulement n_j autour des différentes composantes Γ_j du bord. Seule la définition de l'intégrale $\oint_\Gamma \frac{f'}{f}$ requiert la condition $f|_\Gamma \in H^{1/2}$ $(f \in H^1)$.

En conclusion:

Théorème. (i) *Si* $f|_\Gamma \in$ VMO *et* $|f|_\Gamma| \geq c^{ste} > 0$, *on a encore* $|f|_\Gamma| \geq c^{ste} > 0$ *près du bord, et on peut définir les indices* n_j *comme ceux des régularisées de* $f|_\Gamma$, *ou de façon équivalente comme ceux de* f *sur des courbes voisines du bord.*

(ii) *Si* Γ_ε *est une courbe "voisine du bord", on a:*

$$n_j = \oint_{\Gamma_{\varepsilon,j}} \frac{f'}{f}.$$

Et, si $f \in H^1$ *ou* $f|_\Gamma \in H^{1/2}$, *cette égalité passe à la limite quand* $\varepsilon \to 0$.

Remerciements: Ce travail a été élaboré lors de mes séjours à l'Institut de Physique Théorique de Magurele (Roumanie), où nous avons eu, avec V.Georgescu, des discussions très stimulantes et fructueuses.

RÉFÉRENCES

[ABM] A.Boutet de Monvel-Berthier, Sur une version à deux dimensions du modèle de Ginzburg-Landau pour la supraconductivité, in *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics*, Kluwer Academic Publishers (1990), 53-61, Conférence à la mémoire de Michel Sirrugue et Hoegh-Krohn, Marseille 1988.

[BMGR1] A.Boutet de Monvel-Berthier, V.Georgescu et R.Purice, Sur un problème aux limites de la théorie de Ginzburg-Landau, *C.R. Acad.Sci. Paris* **307**, Série I (1988), 55-58.

[BMGR2] A.Boutet de Monvel-Berthier, V.Georgescu et R.Purice, A boundary value problem related to the Ginzburg-Landau model, Universität Bielefeld, *B.I.B.O.S.* n° 429/1990.

[BMGR3] A.Boutet de Monvel-Berthier, V.Georgescu et R.Purice, On the Ginzburg-Landau equations in non-critical coupling constant (en préparation).

[F] K.O.Friedrichs, The identity of weak and strong extensions of differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 55 (1944), 132-151.

[G] J.B.Garnet, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York 1981.

[GL] V.L.Ginzburg et L.D.Landau, *J.Exp. I Teoret. Fiziki*, 20,(12), 1950.

[JT] A.Jaffe et C.Taubes, *Vortices and monopoles: structure of static gauge theories*, Birkhäuser, 1980.

[LBM] L.Boutet de Monvel, communication personnelle, voir l'appendice de [BGMR2].

[LM] J.-L.Lions et E.Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, *1*, Springer-Verlag, Berlin 1972.

[NS] D.J.Newman et H.S.Shapiro, The Taylor coefficient of inner functions, *Michigan J. Math.* 9 (1962), 249-255.

[RIR] A.C. Rote-Innes et E.N. Roderich, *Introduction to supraconductivity*, Pergamon Press 1978.

[SJST] D. Saint-James, G. Serma et E.J. Thomas, *Type II supraconductivity*, Pergamon Press 1969.

[S] J.R. Schrietter, *Theory of supraconductivity*, Benjamin Inc. Pub., New York 1964.

Anne Boutet de Monvel-Berthier

Université Paris VII, 45-55, 5ème
UFR de Mathématiques
2 place Jussieu ,
75251 Paris Cedex 05