C. E. Cancelier

J. Y. Chemin

Sous-ellipticité d'opérateurs intégro-différentiels vérifiant le principe du maximum

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 22, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A22_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SOUS-ELLIPTICITE D'OPERATEURS INTEGRO-DIFFERENTIELS VERIFIANT LE PRINCIPE DU MAXIMUM

C.E. CANCELIER et J.Y. CHEMIN

Exposé n° XXII

28 Mai 1991

Nous démontrons dans cet article, l'ellipticité de tout opérateur pseudo-différentiel d'ordre non entier, à noyau positif ne s'annulant pas trop, et la sous-ellipticité des opérateurs $P = \sum_j X_j^* X_j$ d'ordres ≤ 2 pourvu qu'il existe un commutateur itéré des opérateurs pseudo différentiels X_j qui soit elliptique.

In this paper, we prove the ellipticity of pseudo-differential operators with non integer order and positive kernels not vanishing too much, and the subellipticity of operators $P = \sum_j X_j^* X_j$ of order ≤ 2 when there exists an elliptic commutator of the pseudo-differential operators X_j.

0. Introduction

On s'intéresse à des opérateurs intégro-différentiels de type Waldenfels c'est à dire à des opérateurs vérifiant le principe du maximum positif, s'écrivant sous la forme $W = P+S$ où P est un opérateur différentiel du second ordre elliptique éventuellement dégénéré, à coefficient d'ordre 0 négatif et S un opérateur pseudo-différentiel réel d'ordre strictement inférieur à 2, à noyau-distribution positif parce que

- ils sont de bons candidats à être des générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés, fortement continus, contractants (Bony, Courrège et Priouret [2], Cancelier [3])

- ils modélisent les processus de diffusion avec saut (Gimbert et Lions [4] Mikulevicius et Pragarauskas [10])

L'étude de leur sous-ellipticité a conduit aux théorèmes 0.1 et 0.2 qui étendent aux cas d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre ≤ 1 les résultats de sous-ellipticité pour des opérateurs différentiels sommes de carrés de champs de vecteurs ou plus généraux de Kohn [7], de Hörmander [5], de Oleinik et Radkevic [12], de Bolley, Camus et Nourrigat [1].

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ et S un opérateur pseudo-differentiel réel, proprement supporté, d'ordre strictement inférieur à 2, appartenant à la classe $L^{2-\alpha}_{1,0}(\mathbf{R}^n)$ de Hörmander ($\alpha > 0$). Compte tenu des estimations bien connues sur son noyau distribution $K(x,z)$, on a pour $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ à support contenu dans Ω et $x \in \Omega$:

$$Su(x) = \int_\Omega K(x, x-y)[u(y) - u(x) - \langle du(x), y-x\rangle]dy + Au(x) \tag{0.1}$$

où A est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\langle du(x), y-x\rangle = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$. On suppose que le noyau-distribution de S est une fonction positive sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Par définition, on dira que S vérifie la **propriété de non annulation d'ordre** $2-\alpha$ si pour tout $x \in \Omega$, il existe un cône ouvert convexe $\mathcal{C}$ est une constante $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall z \in B(0,\varepsilon) \cap \mathcal{C} \qquad K(x,z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha} \tag{0.2}$$

Théorème 0.1.—

Soit S un opérateur pseudodifférentiel réel vérifiant les hypothèses ci-dessus et la propriété de non annulation ; alors S est un opérateur elliptique.

La démonstration de ce théorème fera l'objet du premier paragraphe. Si l'on cherche à étudier la sous-ellipticité de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - x_1^{2p} S$, S vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus, l'ellipticité de S permet de l'écrire $S = LL^* + L_0$, où L et L_0 sont des opérateurs d'ordres inférieurs à 1. On est alors naturellement conduit au théorème suivant :

Théorème 0.2.—

Soient $(X_j)_{1 \leq j \leq \ell}$ une suite d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordres $(m_j)_{1 \leq j \leq \ell}$, à symboles principaux imaginaires purs, (x_0, ξ_0) un point de l'espace cotangent et Y un commutateur itéré des opérateurs $(X_j)_{1 \leq j \leq \ell}$, de longueur r et d'ordre μ strictement positif. Si Y est elliptique microlocalement en (x_0, ξ_0), alors l'opérateur $P = \sum_{j=1}^{\ell} X_j^* X_j$ est sous elliptique microlocalement en (x_0, ξ_0) avec perte de $2(1 - \frac{\mu}{r})$ dérivées.

La démonstration de ce théorème sera faite au second paragraphe.

Remarque : Si il existe un triplet (Y, μ, r) vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus, alors il en existe un tel que $\frac{\mu}{r}$ soit maximal.

Dans tout l'article $| \ |_s$ désignera la norme de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$.

Remerciements : Nous tenons à remercier J.-M. Bony et C.J. Xu pour de fructueuses discussions.

1. Ellipticité d'opérateurs intégro-différentiels vérifiant le principe du maximum.

Il s'agit de démontrer le théorème 0.1, à savoir l'ellipticité de tout opérateur pseudo-différentiel de type Lévi dont le noyau vérifie la propriété de non annulation (0.2).

Par un argument de perturbation classique on peut se ramener au cas où S est à coefficients constants.

$$Su(x) = \int_\Omega K(x-y)[u(y)-u(x)-\langle du(x), y-x\rangle]dy \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)) . \tag{1.1}$$

Par définition de la transformée de Fourier, le symbole de S est égal à :

$$\sigma(\xi) = \int K(z)(e^{-iz.\xi} - 1 + iz.\xi)dz . \tag{1.2}$$

Sa partie réelle est égale à :

$$\text{Re } \sigma(\xi) = \int K(z)(\cos z.\xi - 1)dz . \tag{1.3}$$

Dans le cas particulier où K est homogène, on obtient en passant coordonnées polaires :

$$\text{Re } \sigma(\xi) = \int_{S^{n-1}} K(\theta)N(\theta,\xi)d\theta \tag{1.4}$$

où

$$N(\theta,\xi) = \int_0^{+\infty} [\cos(r\theta.\xi) - 1]r^{-3+\alpha}dr .$$

Il est clair que $N(\theta,\xi)$ est homogène de degré $2-\alpha$ et que $N(\theta,\xi)$ est strictement négatif sur $S^{n-1}\times S^{n-1}$; le résultat est alors immédiat et l'hypothèse de non annulation est une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité.

Dans le cas général, il faut être un peu plus précis :

Soit $\xi_0 \in S^{n-1}$, il existe un voisinage conique U de ξ_0 et un ouvert conique V tels que pour tout $(z,\xi)\in V\times U$, on ait :

$$|z.\xi| \geq C|z||\xi| \quad \text{et} \quad K(z) \geq \varepsilon|z|^{-n-2+\alpha} \quad \text{pour tout} \quad z \in B(0,\varepsilon) \ ; \tag{1.5}$$

et de plus si $|z.\xi|\leq 1$ alors

$$\cos z.\xi - 1 \leq -\frac{1}{4}(z.\xi)^2 .$$

Donc

$$\text{Re } \sigma(\xi) \leq -\frac{C}{4}|\xi|^2 \int_{B(0,\frac{1}{|\xi|})\cap V} K(z)|z|^2dz . \tag{1.6}$$

Par hypothèse

$$K(z) \geq \varepsilon|z|^{-n-2+\alpha} \quad \text{lorsque} \quad |z| \leq \frac{1}{|\xi|} \leq \varepsilon$$

donc

$$\mathrm{Re}\ \sigma(\xi) \leq -\varepsilon\frac{C}{4}|\xi|^2 \int_{B(0,\frac{1}{|\xi|})\cap V} |z|^{-n+\alpha} dz\ , \tag{1.7}$$

d'où le résultat annoncé.

Le théorème 0.1 est aussi vrai pour tout opérateur S qui est une partie finie d'ordre $m-\alpha$ ($m \in \mathbf{N}^*$), à noyau positif vérifiant la propriété de non annulation à l'ordre $m-\alpha$.

2. Démonstration du théorème 0.2

On supposera, sans perte de généralité, que les opérateurs $X_j, 1 \leq j \leq \ell$, sont définis globalement sur $\mathbf{R}^n$ et à noyaux distributions à supports compacts dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie graduée engendrée par les opérateurs pseudo-différentiels $X_1, \cdots, X_\ell$ définis au paragraphe §0. Les opérateurs de $\mathcal{G}$ sont donc des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $m \leq 1$ sur $\mathbf{R}^n$, anti-autoadjoints dont le noyau distribution est à support compact.

On peut en particulier associer à chaque $X \in \mathcal{G}$ d'ordre $m \leq 1$ un groupe à un paramètre $(e^{tx})_{t\in\mathbf{R}}$ d'opérateurs linéaires continus de $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ et vérifier par interpolation le résultat classique : pour tout $\sigma \in [0,1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad |e^{tX}u - u|_0 \leq Ct^\sigma |u|_{\sigma m}. \tag{2.1}$$

La proposition 2.1 va généraliser ce résultat.

Etant donnés un entier q strictement positif, ε une suite de $\{-1,1\}^q$ et J une suite de $\{1,\cdots,\ell\}^q$, on notera $\exp t\mathcal{X}^\varepsilon$ l'opérateur $e^{t\varepsilon_1 X_1} \cdots e^{t\varepsilon_q X_q}$.

La proposition clef est la suivante :

Proposition 2.1.—

Soient Y un commutateur itéré de longueur r appartenant à $\mathcal{G}$ et N un entier positif, il existe un entier q, une suite ε de $\{-1,1\}^q$ et une suite J de $\{1,\cdots,\ell\}^q$ tels que l'opérateur H_t défini par

$$H_t = \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon e^{t^r Y} \tag{2.2}$$

vérifie

$$\text{(2.3)} \qquad \forall \sigma \in [0,1]\ \exists C\ \exists\ t_0 > 0 \quad \forall t \in [-t_0, t_0] \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\ |H_t u - u|_0 \le C t^{N\sigma} |u|_\sigma$$

Démonstration :

Elle comprend une partie d'algèbre et une partie d'analyse. L'algèbre présente dans la démonstration nécessite l'introduction du formalisme suivant, tel qu'il est présenté dans [1] :

On désigne par $S(\mathcal{G})$ l'algèbre non commutative des séries formelles à une indéterminée $t \in \mathbf{R}$, à coefficients dans $\mathcal{G}$ de la forme

$$\text{(2.4)} \qquad S \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j \qquad a_j \in \mathcal{G}\ .$$

On dira qu'une série formelle $S \in S(\mathcal{G})$ est nulle à l'ordre $N \ge 1$ si $a_j = 0$ pour $j \le N-1$. Soit $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ l'algèbre non commutative des opérateurs dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ de la forme suivante :

$$\text{(2.5)} \qquad P = \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha X^\alpha \quad a_\alpha \in \mathbf{C}\ ,\ p \in \mathbf{N}$$

où pour toute suite finie $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ d'entiers $\alpha_j \in \{1, \cdots, \ell\}$, on note $|\alpha| = q$ et $X^\alpha = X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_q}$.

Soit $S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ l'algèbre non commutative des séries formelles Σ une indéterminée $t \in \mathbf{R}$, à coefficients dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, muni de la loi produit usuel des séries formelles. A toute série $S \in S(\mathcal{G})$ on peut associer une série formelle $e^S \in S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$. D'après la formule de Campbell-Hausdorff, (voir par exemple [13]) pour tous S_1 et $S_2 \in S(\mathcal{G})$, il existe une unique série $S_{12} \in S(\mathcal{G})$ telle que dans $S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$:

$$\text{(2.6)} \qquad e^{S_1} e^{S_2} = e^{S_{12}}$$

et l'on a

$$\text{(2.7)} \qquad S_{12} = S_1 + S_2 + \frac{1}{2}[S_1, S_2] + \cdots$$

Le lemme clef est le suivant :

Lemme 2.2.—

Soient Y un commutateur itéré de longueur r appartenant à $\mathcal{G}$ et N un quelconque entier positif, il existe un entier q, une suite ε de $\{-1,1\}^q$ et une suite J de $\{1, \cdots, \ell\}^q$ tels que $\exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon = e^S$, la série $S - t^r Y$ étant nulle jusqu'à l'ordre $N-1$.

Démonstration :

Pour $N = r+1$, voir [1]. Lorsque $r = 2$, rappelons simplement que la formule de Campbell-Hausdorff assure que

$$e^{tX_1}e^{tX_2}e^{-tX_1}e^{-tX_2} = e^S$$

avec

$$S = t^2[X_1, X_2] + \sum_{k\geq 3} S_k$$

où S_k est somme d'un nombre fini de commutateurs itérés de X_1 et X_2 de longueur k.

En suivant la même démarche que dans [1], on obtient l'existence de q, de ε et de J tels que

$$\exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon = e^S \quad \text{avec} \quad S = t^r Y + \sum_{k\geq r+1} t^k S_k$$

où S_k est une somme finie de commutateurs itérés de longueur k, appartenant à $\mathcal{G}$.

En s'inspirant alors de [5], on applique ceci à S_{r+1} lui même ; on en déduit l'existence de q_1, ε^1, et J^1 tels que $\exp t\mathcal{X}_{J^1}^{\varepsilon^1} = e^{S^{(1)}}$

$$\text{avec} \quad S^{(1)} = t^r Y + \sum_{k\geq r+2} S_k^{(1)} \ ,$$

où $S_k^{(1)}$ est une somme finie de commutateurs itérés de longueur k, appartenant à $\mathcal{G}$.

En itérant le procédé jusqu'à $N-1$, on obtient le lemme.

On considère un entier q, une suite ε et une suite J donnés par le lemme algébrique 2.2. Soit $H_t = \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon e^{t^r Y}$. Le point essentiel de la partie d'analyse de la démonstration consiste en la preuve du lemme suivant :

Lemme 2.3.—

L'opérateur H_t est, modulo un opérateur infiniment régularisant, un opérateur intégral de Fourier dont le symbole appartient à $C^\infty([0,t_0]\ ; S^1_{1,0})$ et la phase φ vérifie

$$\exists\ \psi \in C^\infty([0,t_0]\ ; S^1_{1,0}) \quad \varphi(t,x,\xi) = \langle\ x,\xi\ \rangle + t^N \psi(t,x,\xi)\ .$$

Démonstration :

On commence par démontrer qu'il existe $Z \in C^\infty([0,t_0]\ ; S^1_{1,0})$ tel que

$$\frac{d}{dt} H_t = Z(t) H_t\ . \tag{2.8}$$

Cela résulte du fait suivant. Soit $(A_i(t))_{1\leq i\leq 2} \in C^\infty([0,t_0]\ ;S^1_{1,0})$ antiautoadjoint, on considère $(F_i(t))_{1\leq i\leq 2}$ solution de l'équation $F_i'(t) = A_i(t)F_i(t)$ avec $F_i(0) = Id$; $F_1 \circ F_2(t)$ est alors solution de $F'(t) = A_{12}(t)F(t)$ avec $F(0) = Id$, où

$$A_{12}(t) = A_1(t) + F_1(t)A_2(t)F_1(t)^{-1} .$$

L'application répétée de cette remarque assure (2.8).

Le lemme algébrique 2.2 joint à la relation (2.8) assure que $Z(t)$ a un développement de Taylor en zéro nul jusqu'à l'ordre $N-1$.

D'après la théorie des opérateurs intégraux de Fourier (voir [6] et [8]) la phase φ de H_t vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t\varphi(t\ ;x,\xi) = Z(t\ ;x,\partial_x\varphi(t,x,\xi)) \\ \varphi(0\ ;x,\xi) = \langle x,\xi\rangle \end{cases}$$

Le lemme en résulte clairement par intégration.

Pour conclure la démonstration de la proposition 2.1, il suffit d'appliquer le lemme suivant, démontré dans [1] p.219.

Lemme 2.4.—

Soit H_t un opérateur intégral de Fourier dont le symbole appartient à $C^\infty([0,t_0]\ ;S^1_{1,0})$ et dont la phase φ est telle que

$$\varphi_t(x,\xi) = \langle\ x,\xi\ \rangle + t^N\psi_N(t\ ;x,\xi)\ ; \quad \text{avec} \quad \psi_N \in C^\infty([0,t_0]\ ;S^1_{1,0})$$

alors, pour tout $\sigma \in [0,1]$; il existe C telle que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad |H_tu - u|_0 \leq Ct^{N\sigma}|u|_\sigma .$$

Corollaire 2.5.—

Sous les hypothèses de la proposition 2.1, alors, pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$|(e^{t^rY} - Id)^2u|_0 \leq C(\sum_{j=1}^{\ell}|(e^{tX_j} - Id)^2u|_0 + t^{N\sigma}|u|_\sigma)$$

Démonstration : voir [1].

Pour démontrer le théorème 0.2 on aura besoin de quelques résultats d'interpolation ([1] p.209 et [9] p.55).

Soient $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré, $(\widetilde{Y}, D(\widetilde{Y}))$ le générateur infinitésimal du groupe unitaire $(e^{tY})_{t\in\mathbf{R}}$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. On définit pour $\beta \in]0,2[$ un espace de moyenne entre $D(\widetilde{Y}^2)$ et $L^2(\mathbf{R}^n)$ par

$$(2.9) \qquad D_\beta(\widetilde{Y}) = \{u \in L^2(\mathbf{R}^n) \; ; \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY}-I)^2 u|_0^2}{t^{2\beta}} \; \frac{dt}{t} < +\infty\} \; .$$

D_β sera muni de sa norme canonique. On peut démontrer que lorsque $\beta \in]0,1[$, l'espace $D_\beta(\widetilde{Y})$ coïncide avec l'interpolé holomorphe $[L^2(\mathbf{R}^n), D(\widetilde{Y})]_\beta$ et pour $\beta = 1$, $D_1(\widetilde{Y})$ est isomorphe (algébrique et topologique) à $D(\widetilde{Y})$ muni de la norme du graphe.

Le lemme suivant permet de comparer $|u|_{D_\beta(\widetilde{Y})}$ aux normes $|X_j u|_0$ et $|u|_\sigma$.

Lemme 2.6.—

Soient $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré de longueur r et $\sigma \in]\frac{1}{N}, 1]$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(2.10) \qquad |u|_{D_{\frac{1}{r}}(\tilde{y})} \leq C[\sum_{j=1}^{\ell} |X_j u|_0^2 + |u|_\sigma] \; .$$

Démonstration : Nous rappelons brièvement ici la preuve donnée dans [1].

$$|u|_{D_{\frac{1}{r}}(\widetilde{Y})} = |u|_0^2 + \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY}-I)^2 u|_0^2}{t^{2/r}} \frac{dt}{t} \; .$$

Par changement de variable ($t = s^r$) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY}-I)^2 u|_0^2}{t^{2/r}} \frac{dt}{t}$$

$$\leq C \left[\sum_{j=1}^{\ell} \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tX_j}-I)^2 u|_0^2}{t^2} \; \frac{dt}{t} + \int_0^{t_0} \frac{t^{2N\sigma}}{t^2} \; |u|_\sigma^2 \; \frac{dt}{t} + |u|_0^2 \right]$$

en vertu du corollaire 2.5.

L'intégrale $\int_0^{t_0} t^{2N\sigma - 3} dt$ est convergente puisque $\sigma > \frac{1}{N}$ et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tX_j}-I)^2 u|_0^2}{t^2} \; \frac{dt}{t} \leq \; |u|_{D_1 \; (\widetilde{X}_j)} \leq C[|X_j u|_0^2 + |u|_0^2], \text{d'où le résultat.}$$

Démonstration du théorème 0.2

Soit $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré de longueur r, d'ordre μ, elliptique en (x_0, ξ_0). Alors il existe donc un voisinage compact K de x_0, un opérateur pseudo différentiel $\psi(x, D)$ d'ordre 0, elliptique en (x_0, ξ_0), nul pour $x \notin V$ où V est un voisinage de x_0, relativement compact dans $\overset{\circ}{K}$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \quad |\psi(x, D)u|_\mu \leq C\ [|Yu|_0 + |u|_0]\ . \tag{2.11}$$

Comme $\psi(x, D)$ est un opérateur d'ordre 0, donc linéaire continu de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, on déduit par interpolation qu'il est borné de l'interpolé holomorphe $[L^2(\mathbf{R}^n), D(\widetilde{Y})]_{\frac{1}{r}} = D_{\frac{1}{r}}(\widetilde{Y})$ dans l'interpolé holomorphe $[L^2(\mathbf{R}^n), H^\mu(\mathbf{R}^n)]_{\frac{1}{r}} = H^{\frac{\mu}{r}}(\mathbf{R}^n)$ d'où

$$|\psi(x, D)u|^2_{\frac{\mu}{r}} \leq C|u|^2_{D\frac{1}{r}(\widetilde{Y})} \tag{2.12}$$

$$\leq C[\sum_{j=1}^{\ell} |X_j u|_0^2 + |u|_\sigma^2] \quad \text{pour} \quad \sigma \in]\frac{1}{N}, 1] \quad \text{(lemme 2.6)}$$

La proposition 2.1 laisse toute latitude sur le choix de N, donc il est possible de choisir N pour que $\frac{1}{N} < \frac{\mu}{r}$. D'où le théorème 0.2.

Pour conclure, démontrons l'existence d'un triplet (Y_m, μ_m, r_m) tel que $\frac{\mu_m}{r_m}$ soit maximal. Soit (Y, μ, r) un triplet vérifiant l'hypothèse du théorème 0.2. Tout triplet (Y', μ', r') tel que $\frac{1}{r} < \frac{\mu}{r}$ donne lieu à un quotient $\frac{\mu'}{r'} < \frac{\mu}{r}$; donc le triplet réalisant le quotient $\frac{\mu}{r}$ maximal est à chercher dans un ensemble fini ; d'où l'existence de (Y_m, μ_m, r_m).

Bibliographie :

[1] P. Bolley, J. Camus et J. Nourrigat : La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels, Comm. in P.D.E., 7 (2), 197-221 (1982).

[2] J.-M. Bony, P. Courrège et P. Priouret : Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18, 2 (1968), 369-521.

[3] C.E. Cancelier : Problèmes aux limites pseudo-différentiels donnant lieu au principe du maximum, Comm. in P.D.E., 11 (15), 1677-1726 (1986).

[4] F. Gimbert et P.L. Lions : Existence and regularity results for solutions of second order, elliptic, integro-differential operators, Ricerche di Matemática, vol.XXXIII, fasc. 2 (1984).

[5] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. 119 (1967) 147-171.

[6] L. Hörmander : The analysis of linear partial differential operators IV Springer-Verlag, 1985.

[7] J.J. Kohn : Pseudo-differential operators and non-elliptic problems, Pseudo differential operators (C.I.M.E. Streza, 1968), Edizioni Cremonese, Rome, 1969, pp 157-165 MR 41 ♯ 3972.

[8] H. Kumano-Go : A calculus of Fourier integral operators on $\mathbf{R}^n$ and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type. Comm. in Partial Differential equations 1 (1), 1-44 (1976).

[9] J.L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation. Institut des Hautes Etudes Scientifiques - Publications mathématiques n°19-1964.

[10] R. Mikulevicurs et H. Pragarauskas : On the existence and uniqueness of solutions to the martingal problem, à paraître.

[11] J. Nourrigat : Subelliptic estimates for systems of pseudo-differential operators. Notas de curso. Instituto de Matemática. Universidad federal de Pernambuco. Recife 1982.

[12] O.A. Oleinik and E.V. Radkevic : Second order equations with nonnegative characteristic form, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, Plenum Press, 1973.

[13] J.P. Serre : Lectures given at Harvard University. Lie algebras and Lie groups. W.A. Benjamin, Inc. New-York Amsterdam 1965.

C.E. Cancelier
Université des Antilles et de la Guyane
Département de Mathématiques
B.P. 592
97167 Pointe-à-Pitre cedex
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau cedex

J.-Y. Chemin
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau cedex