Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. L. Joly
G. Métivier
J. Rauch

Remarques sur l'optique géométrique non linéaire multidimensionnelle

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n° 1, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A1_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

REMARQUES SUR L'OPTIQUE GEOMETRIQUE NON LINEAIRE MULTIDIMENSIONNELLE

J.L. JOLY[1]- G. METIVIER[1]- J. RAUCH[1,2]

1 Partially supported by NATO grant CRG 890904.

2 Partially supported by NSF grant DMS 8601783

23 Octobre 1990

1. Introduction.

Considérons un système $N\times N$, strictement hyperbolique :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x,u)\,\partial_j u = F(t,x,u) \tag{1.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t,x)=(u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x))$ est à valeurs dans $\mathbb{C}^N$ et où A et F sont des fonctions C^∞ de $(t,x,u,\bar{u})$. Pour les problèmes linéaires, l'optique géométrique étudie les solutions ayant un développement asymptotique de la forme :

$$u^\varepsilon(t,x) \sim e^{i\varphi(t,x)/\varepsilon}\{a_o(t,x)+\varepsilon\, a_1(t,x)+\ldots\} \tag{1.2}$$

φ étant une phase réelle, solution de l'équation eiconale, et les amplitudes a_j étant déterminées par la résolution d'équations de transport.

L'optique géométrique non linéaire vise d'abord à généraliser cette étude aux problèmes non linéaires. On remarque cependant que la forme du développement (1.2) doit être modifiée ; en effet, les non linéarités introduisent en plus de l'oscillation fondamentale toutes les harmoniques $e^{ik\varphi(t,x)/\varepsilon}$, ce qui conduit à considérer à la place de (1.2), des développements de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) \sim \sum_k e^{ik\varphi(t,x)/\varepsilon}\{a_{o,k}(t,x)+\varepsilon\ldots\} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j\, U_j(t,x,\varphi(t,x)/\varepsilon) \tag{1.3}$$

où l'on a introduit les profils $U_j(t,x,\theta) = \sum_k e^{ik\theta} a_{j,k}(t,x)$

L'étude formelle de tels développement BKW est faite dans [CB]. Dans le cas quasi-linéaire, cas où les matrices A_j dépendent effectivement de u, on suppose que le profil U_o est indépendant de θ. Il y a alors un état "non petrturbé" $u_o(t,x)$ qui est solution de (1.1), et les solutions u^ε sont des petites perturbations de u_o :

$$u^\varepsilon(t,x) = u_o(t,x) + \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j\, U_j(t,x,\varphi(t,x)/\varepsilon) \tag{1.4}$$

Dans les deux cas, semi et quasi-linéaire, la géométrie des phases est gouvernée par l'opérateur linéaire

$$L = \partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x)\partial_j \quad \text{ou} \quad L = \partial_t + \sum_{j=1}^{n} A_j(t,x,u_o(t,x))\,\partial_j \tag{1.5}$$

Dans les développements (1.3) ou (1.4), φ est toujours solution de l'équation eiconale $\det L(t,x,d\varphi(t,x))=0$ et l'analyse formelle détermine les profils U_j comme solutions d'équations de transport plus compliquées que dans le cas linéaire : elle apparaissent comme des systèmes couplés d'équations integro-différentielles.

La justification des développements (1.3) ou (1.4) pour les solutions exactes de (1.1) a été faite dans le cas semilinéaire par Joly et Rauch [JR] et par O.Guès [G] dans le cas quasilinéaire.

Le problème auquel on s'intéresse dans cet exposé, est celui de l'interac-tion de deux ou plusieurs ondes du type précédent. Alors que dans le cas linéaire il suffit de superposer les solutions, les nonlinéarités peuvent dans certains cas créer de nouvelles oscillations : c'est le phénomène de la résonance. Une étude formelle de problème a été faite par Hunter, Keller, Majda et Rosales [HK], [MR], [HMR]. On va s'intéresser ci-dessous au problème de Cauchy pour (1.1), avec une donnée de Cauchy oscillante :

$$(1.6)\qquad u^\varepsilon\big|_{t=0} = h^\varepsilon = H(x,\varphi^o(x)/\varepsilon) + o(1)$$

$$[\text{ resp }\quad u^\varepsilon\big|_{t=0} = h^\varepsilon = h_o(x) + \varepsilon H(x,\varphi^o(x)/\varepsilon) + o(\varepsilon)\ ]$$

suivant que le problème est semi ou quasi-linéaire. La phase initiale φ° est donnée. Pour commencer, on peut la supposer scalaire, mais le cas où φ° est à valeurs vectorielles doit aussi être envisagé, par exemple pour traiter le cas où la donnée initiale est la superposition d'oscillations de directions différentes.

Les problèmes qui se posent sont les suivants :

1°) Est-ce-que les solutions u^ε du problème de Cauchy, existent sur un domaine indépendant de ε?

2°) Si oui, y a-t-il une asymtotique pour les solutions u^ε? La théorie linéaire et les approches formelles amènent à chercher des asymptotiques de la forme :

$$(1.7)\qquad u^\varepsilon(t,x) = \sum_j U_j(t,x,\varphi_j(t,x)/\varepsilon) + o(1)$$

$$[\text{resp }\ u^\varepsilon(t,x) = u_o(t,x) + \varepsilon \sum_j U_j(t,x,\varphi_j(t,x)/\varepsilon) + o(\varepsilon)\ ]$$

Les phases φ_j sont solutions de l'équation eiconale avec φ° pour donnée initiale.

3°) Quelles sont les équations de transport qui déterminent les profils U_j ?

L'étude formelle du problème, telle qu'on la trouve par exemple dans [HK], [MR] ou [HMR], a consisté à supposer l'existence de développements du type (1.7), pour répondre à la question 3°). Pour ce qui concerne l'ensemble du problème, c'est-à-dire les questions 1°), 2°) et 3°), on sait y répondre positivement dans les situations suivantes :

a) dans le cas des développements mono-phase ([JR1], [G])

b) dans le cas des problèmes mono-dimensionnels, $n=1$. On renvoie ici à [JMR] ; voir aussi les références bibliographiques de cet article.

c) pour les développements à deux phases pour des systèmes à deux vitesses ([JR1]). Dans ce cas, il ne peut pas y avoir d'interaction (de résonance).

d) dans certains cas de développements multi-phases pour des équations du second ordre, correspondants à des systèmes 2×2 ([D]).

Cet exposé est divisé en deux parties. La première vise à montrer à l'aide de contre-exemples, qu'en général le problème est très mal posé, en ce sens que la réponse à la question 1°) ci-dessus est négative. Le phénomène en jeu est celui de la focalisation, bien connu dans le cas linéaire, mais qui a des conséquences beaucoup plus graves dans le cas non linéaire, puisqu'il peut ruiner l'existence même des solutions. Il faut donc éviter les focalisations directes, c'est-à-dire produites directement par les données de Cauchy, mais on doit aussi éviter toutes les focalisations "cachées" produites par interaction. On voit donc que le problème posé, n'a vraiment de sens que sous des hypothèses géométriques très contraignantes. On notera que pour leur étude formelle Hunter, Majda et Rosales ont été amenés eux aussi, à partir de considérations apparemment différentes, à faire des hypothèses très strictes sur l'ensemble des phases en jeu, hypothèses de "finitude" et de "cohérence".

Une lecture explicite des conditions de non-focalisation paraît inextricable. Cependant, la "cohérence" de Hunter, Majda et Rosales est précisément un cas simple où toute focalisation est exclue. Dans la deuxième partie de l'exposé, on va étudier un cas a priori très particulier, mais qui en fait est assez générique de la cohérence : c'est le cas où l'opérateur L est à coefficients constants et où les phases φ_j sont linéaires. Dans ce cadre, on pourra répondre positivement aux questions 1°), 2°) et 3°) posées ci-dessus. En particulier, on justifie dans ce cadre l'optique géométrique de [HMR], et on retrouve en le généralisant un résultat de J.M.Delort. En outre, puisque nous ne ferons pas a-priori d'hypothèse de finitude sur le nombre de phases, on retrouvera l'exemple de Joly-Rauch [JR2] qui montre qu'un nombre fini d'oscillations dans les données de Cauchy peuvent créer dans la solution, des oscillations sur un nombre infini de phases.

2. Explosion et non existence.

La question est de savoir dans quelles conditions le problème semi-linéaire

$$L u^\varepsilon \equiv \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j u^\varepsilon = F(u^\varepsilon), \quad u^\varepsilon_{|t=0}(x) = H(x, \varphi^\circ(x)/\varepsilon) \tag{2.1}$$

possède une solution sur un domaine indépendant de ε. On peut penser résoudre (2.1) par le schéma itératif standard. Le premier pas consiste à résoudre des problèmes linéaires du type suivant :

$$L u^\varepsilon = 0, \qquad u^\varepsilon_{|t=0}(x) = h(x) e^{i\varphi^\circ(x)/\varepsilon} \tag{2.2}$$

Le phénomène en jeu est celui de la focalisation. Si $d\varphi^\circ(0)=0$, la focalisation peut être immédiate, et il se peut que u^ε ne soit pas (uniformément) bornée sur aucun voisinage de 0. Ce phénomène s'observe dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 2.1. Considérons l'équation des ondes

$$\Box u^\varepsilon \equiv \partial_t^2 u^\varepsilon - \Delta_x u^\varepsilon = 0 \quad ; \quad u^\varepsilon_{|t=0}(x) = 0 \quad ; \quad \partial_t u^\varepsilon_{|t=0}(x) = h(|x|) e^{i\,|x|^2/\varepsilon} \tag{2.4}$$

Pour coller au formalisme de (2.2), on devrait écrire $\Box$ comme un système, mais il est certainement plus agréable de le garder sous sa forme. On s'intéresse alors aux explosions de ∇u^ε. Un calcul explicite montre que, en dimension impaire $n=2d+1$, , la solution u^ε vérifie :

$$\partial_t u^\varepsilon(t,0) \sim \varepsilon^{-d} (2i)^d t^{2d} h(t) e^{i t^2/\varepsilon} \quad \text{aux points } t>0 \text{ où } h(t)\neq 0. \tag{2.5}$$

Pour les problèmes non linéaires, les conséquences de la focalisation peuvent aller jusquà la non résolubilité de l'équation (sur des domaines indépendants de ε). Voici deux exemples de ce phénomène.

EXEMPLE 2.2. Le premier consiste à rajouter à (2.4) une équation :

$$\partial_t v^\varepsilon = |\partial_t u^\varepsilon|^2 (v^\varepsilon)^2, \qquad v^\varepsilon_{|t=0} = 1 \tag{2.6}$$

Alors,

$$v^\varepsilon(t,x) = (1 - U^\varepsilon(t,x))^{-1} \text{ avec } U^\varepsilon(t,x) = \int_0^t |\partial_t u^\varepsilon(s,x)|^2 ds \tag{2.7}$$

Si $h(r) = 1$ pour $r \leq 1$, on calcule en dimension $n=3$, que $U^\varepsilon(t,0) = t + 4t^5/5\varepsilon^2$ pour $t \leq 1$. Le temps de vie de v^ε est $\leq (5\varepsilon^2/4)^{1/5}$ et tend vers 0 lorsque ε tend vers 0.

EXEMPLE 2.3. On considère le problème

$$\square v^{\varepsilon} = (\partial_t v^{\varepsilon})^2 - |\nabla_x v^{\varepsilon}|^2 , \quad v^{\varepsilon}_{|t=0}(x) = 0 , \quad \partial_t v^{\varepsilon}_{|t=0}(x) = -cos(|x|^2/\varepsilon) \tag{2.8}$$

Alors, si v^{ε} est une solution Lipschitzienne, $u^{\varepsilon} = 1 - e^{v^{\varepsilon}}$ est solution de

$$\square u^{\varepsilon} = 0 , \quad u^{\varepsilon}_{|t=0}(x) = 0 , \quad \partial_t u^{\varepsilon}_{|t=0}(x) = cos(|x|^2/\varepsilon) \tag{2.9}$$

Un calcul explicite en dimension $n=5$, montre que la solution de (2.9) vérifie :

$$u^{\varepsilon}(t,0) = t\cos(t^2/\varepsilon) - 2\varepsilon^{-1}t^3 sin(t^2/\varepsilon)$$

Par conséquent 1– $u^{\varepsilon}(t,0)$ ne peut rester > 0 pour $\varepsilon<\varepsilon_o$ et $t \in [0, t_o]$. On en déduit que pour tout voisinage ω de l'origine dans $\mathbb{R}^{1+5}$, il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que pour tout $\varepsilon<\varepsilon_o$ le problème (2.6) n'admette aucune solution Lipschitzienne sur ω.

3. Focalisation par interaction.

Le phénomène que l'on vient de décrire est celui où la focalisation et l'explosion se produisent directement à partir des données de Cauchy. Supposons donc évité cet écueil, c'est-à-dire que toutes les solutions de l'équation eiconale avec données de Cauchy $\varphi°$ sont définies et régulières sur un voisinage ω de l'origine. La deuxième étape du schéma itératif conduit, par interaction nonlinéaire, à résoudre des problèmes du type :

$$L\,u^{\varepsilon} = f(t,x)\,e^{i\varphi(t,x)/\varepsilon} \tag{3.1}$$

où φ est une combinaison linéaire des phases obtenues précédemment. Pour bien séparer ce problème du problème de Cauchy, plaçons nous dans le cas où f et u^{ε} sont nulles dans $t \leq 0$. Plusieurs situations sont à considérer.

A) φ est solution de l'équation eiconale et $d\varphi \neq 0$. C'est ce qui se produit lorsqu'on a une vraie résonance. Alors u^{ε} est de la forme :

$$u^{\varepsilon}(t,x) \sim e^{i\varphi(t,x)/\varepsilon}\{a_o(t,x) + \varepsilon^{-1}a_1(t,x) + \dots\} \tag{3.2}$$

B) φ est partout non caractéristique, c'est-à-dire que $det\,(L(t,x,d\varphi(t,x)) \neq 0$ en tout point de ω. La réponse est là aussi très claire : on a

$$u^{\varepsilon}(t,x) \sim \varepsilon\; e^{i\varphi(t,x)/\varepsilon}\{a_o(t,x) + \varepsilon^{-1}a_1(t,x) + \dots\} \tag{3.3}$$

C) Il reste à étudier le cas où $det(L(t,x,d\varphi(t,x))$ n'est pas identiquement nulle sur ω tout en s'annulant en certains points. Si la phase φ donne lieu à focalisation, il se peut que les u^{ε} ne soient pas bornés dans L^{∞} sur aucun voisinage de l'origine, et cette explosion peut conduire à la non existence. Un exemple de ce phénomène sera donné au début du paragraphe 4.

D) Supposons alors que la phase φ ne donne pas lieu à focalisation. Écrivons u^{ε} sous la forme

$$u^{\varepsilon}(t,x) = \int_0^t u^{\varepsilon}(t,x,s)\,ds \tag{3.4}$$

où $u^{\varepsilon}(t,x,s)$ est la solution de $L\,u=0$ avec donnée de Cauchy $f e^{i\varphi/\varepsilon}$ en $t=s$. L'optique géométrique linéaire montre alors que $u^{\varepsilon}=O(1)$ dans L^{∞}. En outre, des méthodes de phase stationnaire, montrent sous des hypothèses douces, comme en dimension 1, que $u^{\varepsilon} \to 0$ dans L^{∞}.

Dans ce cas u^{ε} apparait comme un terme d'erreur que l'on pourrait être tenté de négliger. C'est ce qui a été fait en dimension 1 (cf [JMR]). Par contre on ne peut plus le faire en général car il peut se produire un phénomène de focalisation "retardée". En effet, l'analyse de (3.4), montre que génériquement, suivant les points (t,x) où l'on se place, on a soit (3.3), soit

$$u^\varepsilon(t,x) \sim \sqrt{\varepsilon}\ a(t,x)\, e^{i\{\varphi(t,x)+\psi(t,x)\}/\varepsilon} \tag{3.5}$$

Au bout du compte, on voit naître une oscillation de petite amplitude certes, mais de phase nouvelle $\varphi+\psi$. L'étape suivante de l'itération conduit à d'autres problèmes de la forme (3.1), avec des phases qui sont combinaison de toutes les phases apparues aux étapes précédentes. En particulier, de telles combinaisons peuvent mettre à nu les distorsions ψ créées en (3.5). Alors, même si l'amplitude du membre de droite est petite, une focalisation suffisemment forte peut conduire à une explosion. Ce scenario sera mis en scène à l'exemple 4.4.

En conclusion, on voit que les interactons successives peuvent révéler des focalisations insoupçonnées au départ, qui peuvent conduire à des explosions et la non existence de solutions. L'explicitation en général des conditions de non focalisation semble ardue. Dans ce contexte, un cas de figure simple où toute focalisation est exclue, est celui de la *cohérence* :

DÉFINITION 3.1. *On dit qu'un espace vectoriel Φ de fonctions C^∞ sur un ouvert ω est cohérent pour un opéraleur $L(t,x,D)$, lorsque pour tout $\varphi\in\Phi\setminus\{0\}$ on a :*

A) ou bien $\det(L(t,x,d\varphi(t,x))\equiv 0$ sur ω et $d\varphi(t,x)\neq 0$ en tout point de ω.

B) ou bien $\det(L(t,x,d\varphi(t,x))\neq 0$ en tout point de ω.

Si les phases φ_j créées par les données de Cauchy, engendrent un espace Φ cohérent, alors (3.2) (3.3) montrent toutes les interactions-propagations à partir de phases de Φ, ne créent que des oscillations à phase dans Φ. Dans ce cas toutes les interactions-propagations successives ne vont produire (formel-lement) que des développements réguliers du type de (3.2). On voit donc que dans ce cadre les obstructions géométriques sur les phases sont levées.

4. Exemples d'interactions explosives.

EXEMPLE 4.1. Illustrons d'abord le phénomène décrit dans le cas C) de la discussion ci-dessus. L'idée est la suivante : partant de trois oscillations de phases $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$, qui ont même donnée de Cauchy sur $t=0$, une fonction non li-néaire va créer des oscillations de phases $\varphi=\sum m_j\varphi_j$. Il se peut que l'une d'elles donne lieu à focalisation et si $d\varphi(0,0)=0$, il se peut que celle-ci soit immédiate. On réalise maintenant ce scenario en dimension $n=3$ avec le système suivant :

$$\begin{cases}\Box_1 u^\varepsilon = 0 \qquad\qquad \Box_c v^\varepsilon + a\,\partial_{x_1} v^\varepsilon = 0\\ \Box_3 w^\varepsilon = b^{-2}\,(\partial_t\overline{u^\varepsilon}+\partial_{x_1}\overline{u^\varepsilon})^3\,(\partial_t u^\varepsilon-\partial_{x_1}u^\varepsilon)\,(\partial_t v^\varepsilon)^2\end{cases} \tag{4.1}$$

avec les données de Cauchy

$$\begin{cases}u^\varepsilon_{|t=0}(x)=0 \qquad v^\varepsilon_{|t=0}(x)=\varepsilon\, e^{ix_1/\varepsilon} \qquad w^\varepsilon_{|t=0}(x)=0\\ \partial_t u^\varepsilon_{|t=0}(x)=e^{ix_1/\varepsilon} \qquad \partial_t v^\varepsilon_{|t=0}(x)=b\,e^{ix_1/\varepsilon} \qquad \partial_t w^\varepsilon_{|t=0}(x)=0\end{cases} \tag{4.2}$$

Dans (4.1), $c=c(t,x)$ est une fonction C^∞ telle que $c(0,0)=2$; $\Box_\alpha$ désigne l'opérateur l'opérateur des ondes de vitesse α : $\Box_\alpha=\partial_t^2-\alpha^2\Delta_x$; le système (4.1) est donc strictement hyperbolique. Enfin, les fonctions a et b sont régulières et $b\neq 0$ au voisinage de l'origine.

PROPOSITION 4.2. *On peut choisir les fonctions a, b et c de sorte qu'on puisse trouver un réel $t_o>0$ et une constante $\gamma>0$ tels que la solution de* (3.5) (3.6) *vérifie pour tout $t\in]0,t_o]$:*

$$|\partial_t w^\varepsilon(t,0)| \sim \gamma\,\varepsilon^{-1/2}\,t^{5/2}$$

Esquisse de la construction. Le problème de Cauchy pour u^ε crée les deux phases $\varphi_1=x_1+t$ et $\varphi_2=x_1-t$. De façon explicite, on a $u^\varepsilon=\varepsilon\ \{ e^{i\varphi_1/\varepsilon} - e^{i\varphi_2/\varepsilon} \}/2i$. De même, on prévoit que v^ε est une superposition de deux oscillations de phases φ_3 et φ_4 de la forme $x_1 \pm 2t + O(\ |t|\{|t|+|x|\}\ )$ puisque $c(0,0)=2$. Alors

$$\psi = -3\,\varphi_1 + \varphi_2 + 2\,\varphi_3 = O(\ |t|\{|t|+|x|\}\ ) \tag{4.3}$$

Un choix presque arbitraire de c va donner une phase ψ focalisante.

De façon précise, on choisit

$$\begin{cases} \varphi_3(t,x) = x_1 + 2t + t(|x|^2 - \alpha t^2) & c = |\nabla_x \varphi_3|^{-1}\partial_t \varphi_3 \\ a = -(\partial_{x_1}\varphi_3)^{-1}(\square_c \varphi_3) & b = i\,\partial_t \varphi_3 \end{cases} \tag{4.4}$$

où α est un paramètre > 0. Ce choix simplifie l'expression de v^ε qui est simple-ment $v^\varepsilon=\varepsilon\ e^{i\varphi_3/\varepsilon}$. Maintenant, l'interaction dans le membre de doite de (4.1) a été choisie pour isoler la combinaison (4.3), et w^ε est la solution de :

$$\square_3\, w^\varepsilon = e^{i\psi/\varepsilon}, \quad w^\varepsilon_{|t=0}(x) = 0, \quad \partial_t w^\varepsilon_{|t=0}(x) = 0 \tag{4.5}$$

ψ étant radiale, un calcul explicite donne que :

$$\partial_t w^\varepsilon(t,0) = \int_0^t \{\ 12\, i\, \varepsilon^{-1}(t-s)^2 s\ + 1\ \}\, e^{i\theta(t,s)/\varepsilon}\, ds \tag{4.6}$$

avec $\theta(t,\ s)=2s\ \{9(t-s)^2-\alpha s^2\}$. Cette phase a un unique point critique en $s=\beta t$ dans l'intervalle $[0,t]$; il est non dégénéré et la proposition en résulte.

REMARQUE 4.3. Si on ajoute l'équation $\partial_t z^\varepsilon = |\partial_t w^\varepsilon|^2(z^\varepsilon)^2$ à (4.1), alors, comme dans l'exemple 2.2, on obtient un système "sans solutions".

EXEMPLE 4.4. Mettons en scène le scenario décrit au point D) de la discussion faite au paragraphe 3 , en partant de deux phases φ_1 et φ_2. On se place en dimension $n=6$; on note $x=(x_1,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^5$ la variable d'espace. Comme onde incidente, on choisit

$$u^\varepsilon = \varepsilon\,\{ e^{i(x_1+3t)5/6\varepsilon} - e^{i(x_1+3t)/6\varepsilon} \} \tag{4.7}$$

qui est une solution de $\square_3 u^\varepsilon=0$ dont le gradient oscille avec une amplitude $O(1)$. On ajoute à cette équation le système

$$\begin{cases} \square_c v^\varepsilon = \chi(t)(\partial_t u^\varepsilon + 3\partial_{x_1} u^\varepsilon)(\partial_t u^\varepsilon - 3\partial_{x_1} u^\varepsilon) \\ \square_1 w^\varepsilon = \chi(t)\,\partial_t v^\varepsilon(\partial_t \overline{u^\varepsilon} + 3\partial_{x_1}\overline{u^\varepsilon})(\partial_t \overline{u^\varepsilon} - 3\partial_{x_1}\overline{u^\varepsilon}) \end{cases} \tag{4.8}$$

où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ vaut 0 pour $t \le 0$ et est > 0 pour $t > 0$. On choisit ici pour vitesse c

$$c(t,x) = 2 + (|y|^2 + \delta^2 t^2)(|y|^2 - t^2) \tag{4.9}$$

si bien que le système est strictement hyperbolique au voisinage de l'origine. Les conditions initiales pour v^ε et w^ε sont les suivantes :

$$v^\varepsilon_{|t\le 0}(x) = 0\,, \quad w^\varepsilon_{|t\le 0}(x) = 0 \tag{4.10}$$

PROPOSITION 4.5. *Si* $\delta > 0$ *est assez petit, il existe* $t_o > 0$ *tel que pour tout* $t \in]0,t_o]$ *on ait*: $\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon\,|\partial_t w^\varepsilon(t,0)| > 0$.

Ce résultat est mons précis que celui de l'exemple précédent, mais il montre néanmoins une explosion de $|\partial_t w^\varepsilon|$ en ε^{-1}.

Esquisse de la construction. Avec (4.7), on voit que v^ε est solution de $\Box_c v^\varepsilon = f^\varepsilon = 6\ \chi(t)\ e^{i(x_1+2t)/\varepsilon}$. L'optique géométrique linéaire classique montre que

$$\partial_t v^\varepsilon(t,x) = \int_0^t \{ a^+(t,x,s,\varepsilon)\, e^{i\phi^+(t,s,x)/\varepsilon} + a^-(t,x,s,\varepsilon)\, e^{i\phi^-(t,s,x)/\varepsilon} \} ds \tag{4.11}$$

La phase ϕ^- est de la forme $\phi^-(t,x,s) = x_1 + 2s - 4t + O(|t-s|(|t|+|s|+|x|))$ et l'intégrale correspondante dans (4.11) donne une contribution en

$$g^\varepsilon(t,x) = \varepsilon\, b(t,x,\varepsilon)\, e^{i(x_1+2t)/\varepsilon} \tag{4.12}$$

où b est un symbole en ε de degré 0 en ε. L'étude de ϕ^+ est plus délicate, et on trouve que $\phi^+(t,x,s) = x_1 + 2t + \psi(t,s,|y|)$ où $\psi(t,s,r) = C(t,r) - C(s,r) + O(|t-s|^3(|t|+|s|+|r|)^4)$ et $C(t,r) = r^4 t - (1-\delta^2)\, r^2 t^2/3\ - \delta^2 t^5/5$.

Notons $h^\varepsilon(t,x)$ l'intégrale correspondant aux termes indicés par + dans (4.11). w^ε est solution de $\Box_1 w^\varepsilon = \overline{f^\varepsilon}\,(g^\varepsilon + h^\varepsilon)$. Le terme en $\overline{f^\varepsilon}\, g^\varepsilon$ est non oscillant et sa contribution est donc bornée dans C^∞. Notons alors z^ε la solution de $\Box_1 z^\varepsilon = \ell^\varepsilon = \overline{f^\varepsilon}\, h^\varepsilon$ avec $z^\varepsilon = 0$ dans $t \le 0$. On remarque que ℓ^ε est une fonction de t et $|y|$. Par conséquent, z^ε est aussi une fonction de $(t, |y|)$, et en utilisant la version radiale de la solution fondamentale de $\Box_1$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^5_y$, on obtient que

$$\partial_t z^\varepsilon(t,0) = \varepsilon^{-2} \int_0^t \int_0^s b(t,\sigma,s,\varepsilon)\, e^{i\psi(s,\sigma,t-s)/\varepsilon}\, d\sigma ds \tag{4.13}$$

Pour conclure, il reste à appliquer le théorème de la phase stationnaire. On vérifie que si δ est assez petit, alors le terme principal de l'intégrale est en

$$\varepsilon^{-1} \{ \flat_1(t)\, e^{i\theta_1(t)/\varepsilon} + \flat_2(t)\, e^{i\theta_2(t)/\varepsilon} \}$$

avec $\flat_j(t) \neq 0$ et $\theta_j(t) \neq 0$ pour $j = 1, 2$ et la proposition en résulte.

5. Focalisation par superposition.

Revenons à (2.1). Jusqu'à maintenant, on s'est intéressé aux problèmes posés par les phases. On voudrait faire ici une remarque préliminaire sur les problèmes posés par la superposition d'oscillations. Considérons par exemple

$$\Box u^\varepsilon = 0, \quad u^\varepsilon_{|t=0} = 0, \quad \partial_t u^\varepsilon_{|t=0}(x) = h(x/\varepsilon) = \Sigma\, h_\alpha\, e^{i\alpha.x/\varepsilon} \tag{5.1}$$

Les phases $\alpha.x$ sont ici parfaitement inoffensives, mais, même à ε fixé, la périodicité de la fonction h ne suffit pas à assurer que $\nabla u \in L^\infty$: pour le voir, il suffit de périodiser n'importe quelle donnée initiale focalisante.

Par contre, la solution u^ε de (5.1) vérifie :

$$\nabla u^\varepsilon = \Sigma \{ u^+_\alpha\, e^{i(\alpha.x + |\alpha| t)/\varepsilon} + u^-_\alpha\, e^{i(\alpha.x - |\alpha| t)/\varepsilon} \} \tag{5.2}$$

avec $|u^\pm_\alpha| \le C\, |h_\alpha|$. En l'absence d'estimations L^∞, la condition de sommabilité $\Sigma |h_\alpha| < +\infty$ parait minimale pour garantir que ∇u^ε reste uniformément borné dans L^∞. L'emploi de l'espace

$$\mathcal{F}\ell^1 = \{ h(\theta) = \Sigma h_\alpha\, e^{i\alpha.\theta}\ /\ \Sigma |h_\alpha| < +\infty \} \tag{5.3}$$

reste cependant délicat : en effet, si cet espace est bien une algèbre de Banach, celle ci n'est pas stable par composition avec les fonctions C^∞. On ne peut donc penser l'utiliser que pour des problèmes semi-linéaires avec interaction polynômiale ou entière (en $(u, \overline{u})$).

Par contre, si h est périodique, la sommabilité des coefficients de Fourier est évidemment une conséquence de la régularité. En particulier, on voit donc qu'il existe une constante C telle que pour $h(\theta)$ périodique, localement H^s en $\theta \in \mathbb{R}^n$ avec $s > n/2$, la solution u^ε de (5.1) vérifie :

$$\| \nabla u^\varepsilon \|_{L^\infty} \leq C \| h \|_{H^s} \tag{5.4}$$

Cependant le cas où les données sont seulement quasi ou presque périodiques a aussi son intérêt (penser au cas où les données de Cauchy sont la superposition d'un nombre quelconconque d'oscillations de directions différentes). Dans ce cas, la sommabilité des coefficients de Fourier ne se déduit pas de conditions de régularité, et on peut même remarquer :

PROPOSITION 5.1. *Pour tout s arbitrairement grand et pour tout $t_o > 0$, il existe des fonctions presque périodiques $h \in W^{s,\infty}(\mathbb{R}^3)$ telles que la famille $\nabla u^\varepsilon(t_o, .)$ ne soit pas uniformément bornée dans L^∞.*

Preuve. Par le théorème de la borne uniforme, cela revient à dire qu'il n'existe pas de constante C telle que pour toute fonction $h \in W^{s,\infty}$ presque périodique on ait

$$\| \nabla u^\varepsilon(t_o, .) \|_{L^\infty} \leq C \| h \|_{W^{s,\infty}} \tag{5.5}$$

En fait il est facile de faire "exploser" l'inégalité (5.5), l'idée étant que dans (5.4) la constante C dépend fortement de la période et tend vers $+\infty$ lorsque celle-ci tend vers $+\infty$.

Ce que montre cette proposition est que dans un cadre presque périodique général, ce n'est pas la régularité à elle seule, qui peut fournir des espaces fonctionnels adaptés.

6. Un exemple d'optique géométrique.

Nous allons dans le reste de l'exposé, donner un exemple de situation "cohérente" ou l'on peut justifier l'optique géométrique. Dans le cas quasilinéaire intéressons nous aux petites perturbations (oscillantes) $v = \underline{u} + \varepsilon u$ d'une solution constante $\underline{u}$, du système

$$\partial_t v + \sum_{j=1}^{n} A_j(v)\, \partial_j v = F(v) \tag{6.1}$$

On suppose que $F(\underline{u}) = 0$ et on peut toujours supposer que $\underline{u} = 0$. L'équation pour u prend la forme :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(\varepsilon u) \partial_j u = G(\varepsilon u) u \tag{6.2}$$

L'autre modèle que l'on veut traiter est celui des équations semilinéaires :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j\, \partial_j u = F(t,x,u) \tag{6.3}$$

où les A_j sont des matrices constantes. Pour englober (6.2) et (6.3) dans un même cadre, on va considérer des équations de la forme :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(\varepsilon u) \partial_j u = F(t,x,\varepsilon u, u) \tag{6.4}$$

On suppose que le problème est hyperbolique symétrisable, et quitte à changer d'inconnues, on suppose que les matrices $A_j(v)$ sont symétriques.

On veut résoudre le problème de Cauchy pour (6.4) avec une donnée

$$u_{|t=0}(x) = h^\varepsilon(x) \equiv \mathcal{H}^\varepsilon(x, Mx/\varepsilon) \tag{6.5}$$

où $\mathcal{H}^\varepsilon(x,\theta)$ est une famille de fonctions de $(x,\theta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, périodiques en θ. En outre, M est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Pour fixer les idées on choisit les variables de $\mathbb{R}^m$ de sorte que le réseau des périodes soit exactement $\mathbb{Z}^m$ et on note $\mathbb{T}^m$ le tore $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$. De façon précise on suppose que l'ensemble des $\mathcal{H}^\varepsilon$ pour $0<\varepsilon\leq 1$ est une famille bornée dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$, $s>1+(n+m)/2$, et $\mathcal{H}^\varepsilon$ a une limite $\mathcal{H}^\circ$ lorsque ε tend vers 0.

REMARQUE 6.1. On peut aussi écrire la donnée initiale sous la forme $h^\varepsilon(x)=H^\varepsilon(x,x/\varepsilon)$, avec $H^\varepsilon(x,X)=\mathcal{H}^\varepsilon(x,MX)$. La périodicité de $\mathcal{H}^\varepsilon$ est une hypothèse de quasi-périodicité pour H^ε, c'est-à-dire que son spectre (dans les variables X) est contenu dans un $\mathbb{Z}$-module de dimension finie.

Par exemple, des données initiales sont bien de la forme (6.5), lorsque qu'elles sont la superposition d'un nombre fini quelconque d'oscillations :

$$u\,|_{t=0}(x)=h^\varepsilon(x)\equiv\sum_{k=1}^{m}H_k^\varepsilon(x,\alpha_k.x/\varepsilon) \tag{6.6}$$

Prendre $Mx=(\alpha_k.x)_{1\leq k\leq m}$ et poser $\mathcal{H}^\varepsilon(x,\theta)=\sum H_k^\varepsilon(x,\theta_k)$.

Dans le cadre tracé ci-dessus, on peut répondre positivement aux questions posées dans l'introduction :

THÉORÈME 6.2. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a les résultats suivants.*

i) Il existe $t_o>0$ *tel que pour tout* $\varepsilon\in]0,1]$ *le problème de Cauchy* (6.4) (6.5) *possède une (unique) solution* u^ε *dans l'espace des foncions continues sur* $[0,t_o]$ *à valeurs dans* $H^s_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

ii) Il existe une fonction $\mathcal{U}(t,x,T,X)$, *continue sur* $[0,t_o]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, *presque périodique en* (T,X), *telle que* :

$$u^\varepsilon(t,x)-\mathcal{U}(t,x,t/\varepsilon\,,x/\varepsilon)\;=\;o(1)\;\;dans\,L^\infty([0,t_o]\times\mathbb{R}^n) \tag{6.7}$$

iii) Le profil $\mathcal{U}$ *est (la) solution des équations* :

$$\begin{cases}\mathcal{U}=\mathbb{E}\,\mathcal{U}\\ \mathbb{E}\,\{L(\partial_t,\partial_x)\mathcal{U}+\underline{B}(\mathcal{U})\partial_X\mathcal{U}\}=\mathbb{E}\,\{\underline{F}(t,x,\mathcal{U})\}\\ \mathcal{U}\,|_{t=0,T=0}(x,X)=\mathcal{H}^\circ(x,MX)\end{cases} \tag{6.8}$$

Dans (6.8), on a utilisé les notations suivantes : $\underline{F}(t,x,u)=F(t,x,0,u)$, $\underline{B}(u)\partial_X=\sum_{j=1}^{n}\underline{B}_j(u)\partial_{X_j}$ et $\underline{B}_j(u)=\partial_uA_j(0).u$; $L(\partial_t,\partial_x)$ désigne l'opérateur $\partial_t+\sum_{j=1}^{n}A_j(0)\partial_{x_j}$. En outre $\mathbb{E}$ est l'extension aux fonctions presque périodiques en (T,X) de l'opérateur défini de la façon suivante

$$\mathbb{E}\{U(t,x)e^{i(\lambda T+\alpha.X)}\}=\begin{cases}\Pi(\lambda,\alpha)\,U(t,x)e^{i(\lambda T+\alpha.X)} & \text{si }(\lambda,\alpha)\in Car(L)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{6.9}$$

où $Car(L)=\{(\lambda,\alpha)\,/\,det\;\;(\lambda Id+\alpha A(0))=0\}$ est le cône caractéristique de L, et où, pour $(\lambda,\alpha)\in Car(L)\backslash 0$, $\Pi(\lambda,\alpha)$ est le projecteur spectral sur l'espace propre de $\alpha.A(0)$ associé à la valeur propre $-\lambda$; pour $(\lambda,\alpha)=(0,0)$, $\Pi(0)=Id$.

7. A la recherche des phases.

On veut maintenant retrouver d'une part la forme (1.7) des développements, et d'autre part la formulation de [HMR] des équations de transport. Étant maintenant débarrassé des questions de convergence et d'asymptotique, il ne reste plus qu'à étudier de façon indépendante l'équation (6.8).

La relation $\mathcal{U}=\mathbb{E}\mathcal{U}$ montre que $\mathcal{U}$ est de la forme :

$$(7.1) \qquad \mathcal{U}(t,x,T,X) = \sum_{(\lambda,\alpha)\in\mathscr{C}} U_{\lambda,\alpha}(t,x)\, e^{\,i(\lambda T+\alpha.X)} \quad \text{avec} \quad U_{\lambda,\alpha} = \Pi(\lambda,\alpha)\, U_{\lambda,\alpha}$$

où $\mathscr{C} = Car(L) \cap (\mathbb{R}\times {}^t M\mathbb{Z}^m)$. La série (7.1) converge normalement. Il est bon de mettre à part la moyenne U_0 de $\mathcal{U}$, qu'on notera aussi $\overline{\mathcal{U}}$, et l'oscillation de $\mathcal{U}$ que l'on note $\mathcal{U}^*=\mathcal{U}-\overline{\mathcal{U}}$.

Soit ℓ une droite $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Le projecteur $\Pi(\lambda,\alpha)$ est le même pour tous les $(\lambda,\alpha)\in\ell\backslash\{0\}$. On le note $\Pi(\ell)$. Sommant les termes (7.1) de même direction ℓ et on définit :

$$(7.2) \qquad \mathcal{U}^*_\ell(t,x,T,X) = \sum_{(\lambda,\alpha)\in\mathscr{C}\cap\ell\backslash\{0\}} U_{\lambda,\alpha}(t,x)\, e^{\,i(\lambda T+\alpha.X)}$$

et on a la polarisation $\Pi(\ell)\, \mathcal{U}^*_\ell = \mathcal{U}^*_\ell$. Si on chosisit une base $(\lambda_\ell,\alpha_\ell)$ de ℓ, et si l'on pose $\varphi_\ell(T,X) =\lambda_\ell T+\alpha_\ell.X$, on voit que $\mathcal{U}^*_\ell$ s'écrit comme une fonction de φ_ℓ :

$$(7.3) \qquad \mathcal{U}^*_\ell(t,x,T,X) = \tilde{\mathcal{U}}^*_\ell(t,x,\varphi_\ell(T,X))$$

où $\tilde{\mathcal{U}}^*_\ell(t,x,\theta_\ell)$ est une fonction quasi-périodique de sa variable réelle θ_ℓ.

Avec ces notations, $\mathcal{U}$ se recompose à partir des $\mathcal{U}^*_\ell$

$$(7.4) \qquad \mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} + \sum_\ell \mathcal{U}^*_\ell$$

la somme portant sur un l'ensemble dénombrable de directions ℓ. Avec (7.3), on retrouve l'écriture (1.7) de u^ε en terme des phases φ_ℓ:

$$(7.5) \qquad u^\varepsilon(t,x) = \overline{\mathcal{U}}(t,x) + \sum_\ell \tilde{\mathcal{U}}^*_\ell(t,x,\varphi_\ell(t,x)/\varepsilon) + o(1)$$

À nouveau, les séries (7.4) (7.5) sont sommables.

En fait, les développements (7.5) sont plus généraux que ceux envisagés dans l'introduction car ils ne supposent pas la finitude du nombre de phases φ_ℓ en jeu. Pour que la somme dans (7.5) ne porte que sur un nombre fini de directions ℓ, on doit ajouter, comme [HMR], une hypothèse de finitude qui s'exprime à l'aide de la notion de stabilité par interaction :

DÉFINITION 7.1. *Soit $\mathfrak{L}$ un ensemble de droites ℓ contenues dans $Car(L)$ et telles que $\mathscr{C}_\ell = \ell\cap\mathscr{C} \neq \{0\}$. On dit que $\mathfrak{L}$ est stable pour l'interaction [resp. stable pour l'interaction d'ordre $\leq k$] si pour tout ensemble fini [resp d'au plus k éléments] $\{\ell_j\}_{1\leq j\leq p}\subset\mathfrak{L}$, on a :*

$$(\mathscr{C}_{\ell_1}+\ldots+\mathscr{C}_{\ell_p})\cap Char \subset \mathscr{C}_{\mathfrak{L}} = \bigcup_{\ell\in\mathfrak{L}} \mathscr{C}_\ell$$

THÉORÈME 7.2. *Soit $\mathfrak{L}$ un ensemble stable pour l'interaction. Soit $\mathcal{U}$ une solution de* (6.8). *On suppose que le spectre de $\mathcal{U}_{|t=0}$ est contenu dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}$, c'est-à-dire que $U_{\lambda,\alpha}(0,x)\equiv 0$ si $(\lambda,\alpha)\notin\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}$. Alors, pour tout $t\in[0,t_0]$ le spectre de $\mathcal{U}$ reste contenu dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}$. En outre, si F est polynomiale (en u et $\overline{u}$) de degré $\leq k$, (k entier≥ 2), le même résultat a lieu lorsque $\mathfrak{L}$ est stable pour les interactions d'ordre$\leq k$.*

Notons que le spectre de $\mathcal{U}_{|t=0}$ est complètement déterminé par $\mathscr{H}^\circ$: cela résulte de (7.1) et du fait que $\mathcal{U}=\mathscr{H}^\circ$ pour $t=0$, $T=0$.

Le théorème affirme en particulier, que si le spectre de $\mathcal{U}_{|t=0}$ est contenu dans la réunion d'un ensemble fini $\mathfrak{L}$ de droites, stable par interaction (d'ordre ≤ 2 dans le cas d'un problème quasilinéaire (6.2)), alors la solution admet la représentation (7.5) avec un nombre fini de phases φ_ℓ. On renvoie au paragraphe suivant pour des exemples de situations de ce type.

Pour finir, mentionnons seulement que l'on peut aussi retrouver la formulation de [HMR] des équations de transport. Pour cela, il suffit de multiplier les équations de profils (6.8) par les projecteurs $\mathbb{E}_\ell$ qui à $\mathcal{U}$ de la forme (7.1) associent

$$\mathbb{E}_\ell \mathcal{U}(t,x,T,X) = \sum_{(\lambda,\alpha)\in\ell\setminus\{0\}} \{\Pi(\ell)U_{\lambda,\alpha}(t,x)\}\, e^{i(\lambda T+\alpha.X)} \tag{7.6}$$

Ces opérateurs s'expriment à l'aide d'opérateurs de moyenne usuels : pour une fonction presque périodique $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, on a :

$$\mathbb{E}_\ell \mathcal{F}(T,X) = \fint_{\ell^\perp} \mathcal{F}^*\ (T,X) = \lim_{\rho\to\infty} \rho^{-n} \int_{\rho Q} \mathcal{F}^*\{T,X)+Y\}\, dY \tag{7.7}$$

où Q un cube unité dans $\ell^\perp$.

(7.4) permet de diagonaliser en partie l'équation (6.8). En effet, $\mathbb{E}_\ell \mathbb{E}\, L(\partial_t,\partial_x)\mathcal{U} = \mathbb{X}_\ell \mathcal{U}_\ell^*$, où $\mathbb{X}_\ell$ est le champ de propagation (bicaratéristiques) $\partial_t + \sum a_i(\ell)\partial_{x_i}$, où,pour $i=1,..,n$ et pour $\ell\in\mathscr{C}$, $a_i(\ell)$ est le scalaire tel que $\Pi(\ell)A_i(0)\Pi(\ell) = a(\ell)\Pi(\ell)$.

Avec ces notations, en moyennant (6.8) et en le projetant par les différents $\mathbb{E}_\ell$, on voit que (6.8) équivaut à la famille suivante d'équations :

$$L(\partial_t, \partial_x)\overline{\mathcal{U}} + \mathbb{E}_0\{\underline{B}(\mathcal{U})\,\partial_X\mathcal{U}\} = \mathbb{E}_0\{F(\mathcal{U})\} \tag{7.8}$$

$$\mathbb{X}_\ell\, \mathcal{U}_\ell^* + \mathbb{E}_\ell\{\underline{B}(\mathcal{U})\,\partial_X\mathcal{U}\} = \mathbb{E}_\ell\{F(\mathcal{U})\} \tag{7.9}$$

En utilisant (7.3), (7.7) et la polarisation des $\mathcal{U}_\ell^*$, les équations (7.8) et (7.9) conduisent directement aux équations de transport de [HMR].

8. Exemples d'applications.

Donnons d'abord quelques exemples d'ensembles $\mathfrak{L}$ finis, stables pour l'interaction. Ensuite on donnera (exemple 8.5) une variante de [JR2] qui montre que des oscillations en nombre fini dans les données de Cauchy peuvent créer dans la solution des oscillations sur un nombre infini de phases.

EXEMPLE 8.1. Pour les systèmes à deux vitesses, n'importe quel $\mathscr{C}_\mathfrak{L}$ est stable pour l'interaction d'ordre ≤ 2. Ceci permet de retrouver le deuxième cas traité par J.M.Delort dans [D], et de généraliser son résultat, puisqu'on ne suppose plus aucune condition arithmétique.

EXEMPLE 8.2. Cas où le symbole principal est

$$\{\tau^2-|\xi|^2\}\,\{\tau^2-c^2\,|\xi|^2\} \tag{8.1}$$

avec $c>1$. Prenons $\mathfrak{L}=\{\ell_j\,, j=1,..,m\}$ correspondants à m directions caractéristiques situées sur la nappe extérieure $\tau^2 = |\xi|^2$ et telles qu'aucun des plans engendrés par $(\ell_j\,,\,\ell_k)$, $j\neq k$, ne rencontre la nappe intérieure $\tau^2=c^2|\xi|^2$ (en dehors de l'origine). Alors $\mathscr{C}_\mathfrak{L}$ est stable pour l'interaction d'ordre ≤ 2.

EXEMPLE 8.3. Prenons un système de symbole (8.1) avec ici $c<1$, et $\mathfrak{L}=\{\ell_j, 1\leq j\leq m\}$ correspondants à m directions caractéristiques situées sur la nappe intérireure $\tau^2 = |\xi|^2$. Le plan (ℓ_j, ℓ_k) recoupe maintenant la nappe extérieure $\tau^2 = c^2|\xi|^2$. Mais il se peut que, pour des raisons arithmétiques, aucune somme $(\alpha_1,\lambda_1)+(\alpha_2,\lambda_2)$ avec $(\alpha_j\,,\lambda_j)\in\mathscr{C}\cap\ell_j$, ne se trouve sur cette nappe extérieure. Si cela a lieu pour tous les couples $(\ell_k\,,\,\ell_m)$ alors, à nouveau $\mathscr{C}_\mathfrak{L}$ est stable pour l'interaction d'ordre ≤ 2.

Par exemple, plaçons nous en dimension $n=2$. Identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on considère les trois directions caractérisiques $(1, 1)$, $(1, j)$ et $(1, j^2)$ situés sur la nappe $\lambda^2=|\alpha|^2$. Ici j désigne une racine cubique de l'unité $\neq 1$. Pour qu'une combinaison à coefficients entiers $n(1,1)+m(1, j)$ soit située sur la nappe $\tau^2=c^2 |\xi|^2$ il faut que $c^2(n^2-nm+m^2)=(n+m)^2$ ce qui ne peut avoir lieu si $c^2 \notin \mathbb{Q}$. Le même raisonnement tient par permutation, et par conséquent, si $c^2 \notin \mathbb{Q}$, $\mathscr{C}_{\mathfrak{L}}$ est stable pour l'interaction d'ordre ≤ 2.

EXEMPLE 8.4. Un exemple donné par [HMR] concerne un système 3×3 en dimension $n=2$, de symbole

$$\tau\,\xi_2^2+(\xi_1^2-\tau^2)(\xi_1+3\tau) \tag{8.2}$$

La trace de la variété caractéristique sur le plan $\tau= 1$ est une cubique. Alors, [HMR] relient la construction de sous ensembles $\mathfrak{L}$ stables pour l'interaction quadratique et la construction de sous-groupes pour certaines des structures de groupe dont est munie la cubique.

EXEMPLE 8.5. Considérons en dimension $n=2$, le problème

$$\square u^\varepsilon=(\partial_t u^\varepsilon)^3, \quad u^\varepsilon_{|t=0}(x)=\varepsilon H(x/\varepsilon), \quad \partial_t u^\varepsilon_{|t=0}(x)=H_o(x/\varepsilon) \tag{8.3}$$

On choisit les données initiales de la forme particulière suivante

$$H(X)=\sum_{k=1}^{3} A(\alpha_k X), \quad H_o(X)=\sum_{k=1}^{3} A'(\alpha_k X) \tag{8.4}$$

où $A(\theta)$ est une fonction périodique C^∞ et les $\alpha_k\in\mathbb{R}^2$ sont deux à deux distincts et de longueur 1. A' désigne la dérivée de A. De plus, on choisit la fonction A telle que tous ses coefficients de Fourier soient différents de 0.

On ramène ce problème à un sytème du premier ordre

$$L\,\vec{u}^{\,\varepsilon}=F(\vec{u}^{\,\varepsilon}), \quad \vec{u}^{\,\varepsilon}_{|t=0}(x)=\vec{H}(x/\varepsilon) \tag{8.5}$$

avec $\vec{u}=(u_o, u_1, u_2)=(\partial_t u, \partial_{x_1}u, \partial_{x_2}u)$, $F(\vec{u})=((u_o)^3,0,0)$ et $\vec{H}=(H_o, \partial_{x_1}H, \partial_{x_2}H)$.

Les théorèmes généraux disent alors que $\vec{u}^{\,\varepsilon}(t, x)=\mathscr{U}(t, x, t/\varepsilon, x/\varepsilon)+o(1)$. Il est facile de voir qu'ici $\mathscr{U}$ ne dépend pas de x et vérifie

$$\mathscr{U}=\mathbb{E}\,\mathscr{U}\ ; \quad \partial_t\mathscr{U}=\mathbb{E}\,\underline{F}(\mathscr{U})\ ; \quad \mathscr{U}_{|t=0,T=0}(X)=\vec{H}(X) \tag{8.6}$$

$\mathscr{U}$ admet une représentation (7.1), l'ensemble $\mathscr{C}$ des fréquences étant ici l'ensemble des (λ,α) tels que $\alpha\in\mathbb{A}=\mathbb{Z}\alpha_1+\mathbb{Z}\alpha_2+\mathbb{Z}\alpha_3$ et $\lambda=0$ ou $\lambda=\pm|\alpha|$. Les données initiales (8.4) ont été choisies pour avoir une polarisation particulière, et les $U_{\lambda,\alpha}(0)$ sont nuls lorsque $\lambda=0$ ou $\lambda=-|\alpha|$. On a :

$$\mathscr{U}(0, T,X)=\sum_{k=1}^{3} A'(\alpha_k X+T)\,r_k \tag{8.7}$$

où r_k est le vecteur $(1, \alpha_k)$.
On remarque alors que pour $\alpha\in\mathbb{A}\setminus\{0\}$, $\Pi(0,\alpha)\vec{v}=0$ pour tout vecteur de la forme $\vec{v}=(v_o,0, 0)$. La forme de F implique alors que $\partial_t U_{0,\alpha}=0$ et on en déduit que les $U_{0,\alpha}(t)$ sont tous nuls. En outre, en explicitant les projecteurs $\Pi(\pm|\alpha|, \alpha)$, on conclut que la première composante $\mathscr{U}_o$ est solution de

$$\partial_t\mathscr{U}_o=\mathbb{P}\{(\mathscr{U}_o)^3\}, \quad \mathscr{U}_{o|t=0}(T,X)=\sum_{k=1}^{3} A'(\alpha_k X+T) \tag{8.8}$$

où $\mathbb{P}$ est l'opérateur qui à une somme $\sum a_{\lambda,\alpha}(t)\,e^{i(\lambda T+\alpha.X)}$ associe

(8.9) $$a_{0,0}(t) + \sum_{(\lambda,\alpha)\in\mathscr{D}\setminus\{0\}} \frac{1}{2} a_{\lambda,\alpha}(t)\, e^{i(\lambda T+\alpha.X)}$$

$\mathscr{D}$ étant l'ensemble des (λ,α) tels que $\lambda=\pm|\alpha|$ et $\alpha\in\mathbb{A}$.

En décomposant A en sa série de Fourier, $A=\sum a_m\, e^{im\theta}$ et en utilisant (8.7) (8.8), on obtient que

(8.10) $$\partial_t \mathscr{U}_o\big|_{t=0} = \sum b_\mu\, e^{i\varphi_\mu}$$

avec les phases $\varphi_\mu(T,X)=\sum \mu_k\,(\alpha_k.X+T)$, la somme portant sur les $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{Z}^3$ tels que $d\varphi_\mu = (\sum\mu_k, \sum \mu_k\, \alpha_k) \in\mathscr{D}$. Notons, $\mathfrak{m}$ cet ensemble d'indi-ces et $\mathfrak{m}_\#$ le sous ensemble des μ dont les trois composantes sont non nulles. Pour $\mu\in\mathfrak{m}_\#$ le calcul donne aussi que

(8.11) $$b_\mu = 3\,\mu_1\,\mu_2\mu_3\, a_{\mu_1}\, a_{\mu_2}\, a_{\mu_3} \neq 0$$

Notons $\mathfrak{L}$ l'ensemble des doites de $\mathbb{R}^3$ qui contiennent au moins un point de la forme $d\varphi_\mu$ pour un $\mu\in\mathfrak{m}_\#$. Les vecteurs $(1,\alpha_k)$ étant linéairement indépendants, les $d\varphi_\mu$ sont distincts pour des μ différents, et (8.10) (8.11) montrent que, pour $\ell\in\mathfrak{L}$, la première composante de $\partial_t\mathscr{U}_\ell\big|_{t=0}$ est $\neq 0$. En conclusion, on a montré que la première composante du profil $\mathscr{U}$ contient effectivement des oscillations dans toutes les directions $\ell\in\mathfrak{L}$.

Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à exhiber un choix de α_k tel que l'ensemble $\mathfrak{L}$ soit infini. Comme dans [JR2], on peut prendre :

(8. 16) $$\alpha_1=(1,0)\ ,\quad \alpha_2=(-1/2, \sqrt{3}/2)\ ,\quad \alpha_3=(-1/2, -\sqrt{3}/2)$$

Il résulte alors de [JR2] que dans ce cas, $\mathfrak{L}$ est non seulement infini, mais aussi que la réunion des droites de $\mathfrak{L}$ est dense dans le cone d'onde.

9. Élements de la preuve du théorème 6.2

A) Existence des solutions. On cherche les solutions u^ε sous la forme :

(9.1) $$u^\varepsilon(t,x)=U^\varepsilon(t,x,Mx/\varepsilon)$$

avec U^ε dans l'espace $E^s(t_o)$ des fonctions continues sur $[0,t_o]$ à valeurs dans $H^s(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$. Pour que u^ε soit solution de (6.4), il suffit que U^ε vérifie :

(9.2) $$\begin{cases}\partial_t U^\varepsilon + A(\varepsilon U^\varepsilon;\partial_x)U^\varepsilon + \varepsilon^{-1}A(\varepsilon U^\varepsilon;{}^tM\,\partial_\theta)\,U^\varepsilon = F^\varepsilon(U^\varepsilon)\\ U^\varepsilon\big|_{t=0}(x,\theta)=H^\varepsilon(x,\theta)\end{cases}$$

où $A(v;\xi)=\sum_{j=1}^n \xi_j A_j(v)$ et où l'on note ici pour simplifier, $F^\varepsilon(U)=F(t,x,\varepsilon U,U)$.

On écrit $A(\varepsilon\ v;\xi)= A(0,\xi\ )+\ \varepsilon\ B(\varepsilon v,v;\xi)$ où $B(w,v;\xi)$ est linéaire en v. Alors le seul terme singulier de l'équation (9.2) est $\varepsilon^{-1}A(0,{}^tM\partial_\theta)$ qui est symétrique et à coefficients constants.

On considère les linéarisations suivantes de (9.2) :

(9.3) $$\begin{cases}\partial_t U^\varepsilon + A(\varepsilon V^\varepsilon;\partial_x)U^\varepsilon + \varepsilon^{-1}A(\varepsilon V^\varepsilon;{}^tM\,\partial_\theta)\,U^\varepsilon = F^\varepsilon(V^\varepsilon)\\ U^\varepsilon\big|_{t=0}(x,\theta)=H^\varepsilon(x,\theta)\end{cases}$$

La symétrie des matrices A et le fait que $\varepsilon^{-1}A(0,{}^tM\partial_\theta)$ soit à coefficients constants, impliquent que la solution de (9.3) vérifie une estimation d'énergie L^2 de la forme :

(9.4) $$\| U^\varepsilon(t)\|_0 \le e^{Ct}\,\|H^\varepsilon\|_0 + C\int_0^t e^{C(t-\tau)}\,\|F^\varepsilon(\tau)\|_0\, d\tau$$

où C est une constante, indépendante de ε, qui n'est fonction que de la norme de V et $\nabla_{x,\theta} V$ dans $L^\infty([0,t_o]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$. La norme $\|.\|_0$ est celle de $L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$.

On peut maintenant commuter (9.3) aux dérivations ∂_x et ∂_θ en remarquant que le commutateur avec le terme singulier $\varepsilon^{-1}A(0,{}^tM\partial_\theta)$est nul. Les calculs sont alors identiques aux calculs standards pour les systèmes non singuliers (sans terme en ε^{-1}), et, avec les inégalités de Gagliardo-Nirenberg, on aboutit à des estimations H^s semblables à (9.4).

On peut alors considérer le schéma itératif standard :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t U^\varepsilon_{\nu+1}+A(\varepsilon U^\varepsilon_\nu;\partial_x)U^\varepsilon_{\nu+1} +\varepsilon^{-1}A(\varepsilon U^\varepsilon_\nu;{}^tM\,\partial_\theta)U^\varepsilon_{\nu+1} = F^\varepsilon(U^\varepsilon_{\nu+1})\\ U^\varepsilon_{\nu+1}\big|_{t=0}(x,\theta)=H^\varepsilon(x,\theta)\end{array}\right. \tag{9.5}$$

PROPOSITION 9.1. *Il existe $t_o>0$, tel que la suite $U^\varepsilon_{\nu+1}$ est uniformément bornée dans $E^s(t_o)$. Lorsque $\nu\to+\infty$, U^ε_ν converge vers $U^\varepsilon\in E^s(t_o)$, solution de* (9.2). *La convergence a lieu dans $E^\sigma(t_o)$ pour tout $\sigma<s$ et elle est uniforme en $\varepsilon\in]0,1]$.*

Avec (9.1), cette proposition démontre le point *i)* du théorème 6.2.

B) Existence des profils. On cherche les solutions de (6.8) sous la forme

$$\mathcal{U}(t,x,T,X)=\mathcal{U}_\#(t,x,T,MX) \tag{9.6}$$

où $\mathcal{U}_\#(t,\ x,T,\theta)$ est périodique en θ. Pour simplifier les notations, on omettra cependant l'indice # dans les énoncés ci-dessous. Précisons d'abord le cadre fonctionnel dans lequel nous voulons travailler.

DÉFINITION 9.2. *i) Pour $s\geq 0$, on note $\mathcal{E}^s(t_o)$ l'espace des fonctions continues bornées de $[0,t_o]\times\mathbb{R}$ à valeurs dans $H^s(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$.*

ii) On désigne par $\mathcal{P}^s(t_o)$ l'adhérence dans $\mathcal{E}^s(t_o)$ de l'espace des polynômes trigonométriques :

$$\mathcal{U}(t,x,\tau,\theta)=\sum_{\lambda,\alpha} U_{\lambda,\alpha}(t,x)\,e^{i(\lambda\tau+\alpha.\theta)} \tag{9.7}$$

où la sommation porte sur un ensemble fini contenu dans $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^m$, et où les $U_{\lambda,\alpha}$ sont des fonctions C^∞ à support compact dans $[0,t_o]\times\mathbb{R}^n$.

On vérifie d'abord que ces espaces sont bien adaptés aux non linéarités :

LEMME 9.3. *Pour $s>(n+m)/2$, $\mathcal{E}^s(t_o)$ et $\mathcal{P}^s(t_o)$ sont des algèbres de Banach, stables par composition avec les fonctions C^∞ nulles en* 0.

Le point suivant consiste à étudier l'opérateur $\mathbb{E}$. Introduisons l'opérateur $L_\#=\partial_\tau+A(0,{}^tM\partial_\theta)$, $CarL_\#=\{(\lambda,\alpha)\,/\,det\,\{\lambda Id+A(0,{}^tM\alpha)\}=0\}$ sa variété caractéristique et $\mathcal{C}=CarL_\#\cap(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}^m)$. L'opérateur $\mathbb{E}$ est défini sur l'espace des polynomes trigonométriques (9.7) par

$$\mathbb{E}\mathcal{U}(t,x,T,X)=\sum_{(\lambda,\alpha)\in\mathcal{C}}\{\Pi(\lambda,\alpha)U_{\lambda,\alpha}(t,x)\}\,e^{i(\lambda T+\alpha.X)} \tag{9.8}$$

où $\Pi(\lambda,\ \alpha)$ est le projecteur spectral de $A(0,{}^tM\alpha)$ pour la valeur propre $-\lambda$.

LEMME 9.4. *L'opérateur $\mathbb{E}$ se prolonge en opérateur continu de $\mathcal{E}^o(t_o)$ dans lui même, et pour tout $s\geq 0$, $\mathbb{E}$ opère ontinûment de $\mathcal{E}^s(t_o)$ dans lui même.*

La preuve est basée sur le fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^m$, le nombre de λ tels que $(\lambda, \alpha) \in \mathscr{C}$ est majoré par N, que les $\Pi(\lambda, \alpha)$ sont des projecteurs orthogonaux dans $\mathbf{C}^N$ de norme ≤ 1 et sur l'utilisation du lemme de Fatou.

Désignons par $\mathscr{E}^s$ et $\mathscr{P}^s$ les espaces de fonctions $\mathscr{U}(x,t,\theta)$ indépendantes de t. On remarque aussi que $\mathscr{P}^0$ est naturellement muni d'un produit scalaire pré-hilbertien :

$$(9.9) \qquad \langle \mathscr{U}, \mathscr{V} \rangle = \lim_{\rho \to \infty} \rho^{-1} \int_0^\rho \{ \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m} \langle \mathscr{U}(x,\tau,\theta), \mathscr{V}(x,\tau,\theta) \rangle \, dx \, d\theta \} \, d\tau$$

$\mathbb{E}$ est un projecteurs dans $\mathscr{P}^0$, orthogonal pour le produit scalaire $\langle .\,,.\rangle$. Notons $\mathscr{N}^s = \mathbb{E}\,\mathscr{P}^s$ et $\mathscr{N}^s(t_o) = \mathbb{E}\,\mathscr{P}^s(t_o)$. Puisque $\mathbb{E}$ est un projecteur continu, ces espaces sont fermés et sont les noyaux de $Id - \mathbb{E}$.

LEMME 9.5. *$\mathscr{N}^s$ est aussi le noyau dans $\mathscr{P}^s$ de l'opérateur $L_\#$. En conséquence, pour toute fonction $\mathscr{U} \in \mathscr{N}^s$ on a :*

$$\forall \tau \in \mathbb{R} : \ \| \mathscr{U}(.,\tau,.) \|_{H^s(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)} = \| \mathscr{U}(.,0,.) \|_{H^s(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m)} = \| \mathscr{U} \|_{\mathscr{E}^s}$$

En outre, le produit scalaire (9.9) *est hilbertien sur $\mathscr{N}^0$ et dans $\mathscr{N}^0$ on a :*

$$\| \mathscr{U} \|_{\mathscr{E}^0} = \| \mathscr{U}(.,0,.) \|_{L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n)} = \langle \mathscr{U}, \mathscr{U} \rangle^{1/2}$$

On peut maintenant passer à la résolution des équations qui dans les variables (t,x,τ,θ) correspondent au système (6.8):

$$(9.10) \qquad \begin{cases} \mathscr{U} = \mathbb{E}\,\mathscr{U}, \quad \mathbb{E}\,\{L(\partial_t,\partial_x)\mathscr{U} + \underline{B}(\mathscr{U};{}^tM\partial_\theta)\mathscr{U}\} = \mathbb{E}\,\{\underline{F}(t,x,\mathscr{U})\} \\ \mathscr{U}\,|_{t=0,T=0}(x,\theta) = \mathscr{H}^\circ(x,\theta) \end{cases}$$

On a noté $\underline{B}(u;\xi) = B(0,u;\xi)$ et $\underline{F}(t,x,u) = F(t,x,0,u)$. On résout (9.10) par itération dans $\mathscr{N}^s(t_o)$ à l'aide du schéma suivant :

$$(9.11) \qquad \begin{cases} \mathbb{E}\,\{L(\partial_t,\partial_x)\mathscr{U}_{\nu+1} + \underline{B}(\mathscr{U}_\nu;{}^tM\partial_\theta)\mathscr{U}_{\nu+1}\} = \mathbb{E}\,\{\underline{F}(t,x,\mathscr{U}_\nu)\} \\ \mathscr{U}_{\nu+1}\,|_{t=0,T=0}(x,\theta) = \mathscr{H}^\circ(x,\theta) \end{cases}$$

ce qui conduit à résoudre dans $\mathscr{N}^s(t_o)$ les problèmes linéarisés suivants :

$$(9.12) \qquad \begin{cases} \mathscr{L}\mathscr{U} \equiv \mathbb{E}\{L(\partial_t,\partial_x)\mathscr{U} + \underline{B}(t,x,\mathscr{V})\partial_X\mathscr{U}\} = \mathbb{E}\,\{\mathscr{F}\} \\ \mathscr{U}\,|_{t=0,T=0}(x,\theta) = \mathscr{H}^\circ(x,\theta) \end{cases}$$

où $\mathscr{F}$ et $\mathscr{V}$ sont donnés respectivement dans $\mathscr{P}^s(t_o)$ et $\mathscr{N}^s(t_o)$.

L'idée de base est que l'opérateur $\mathscr{L}$ est hyperbolique symétrique pour le produit scalaire (9.9). On en déduit l'estimation d'energie suivante :

$$(9.13) \qquad \langle \mathscr{U}(t), \mathscr{U}(t) \rangle \leq e^{Ct} \langle \mathscr{H}, \mathscr{H} \rangle + C \int_0^t e^{C(t-\tau)} \langle \mathscr{F}(\tau), \mathscr{F}(\tau) \rangle \, d\tau$$

où C ne dépend que de la norme de $\partial_\theta \mathscr{V}$ dans $L^\infty([0,t_o] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n)$.

Les dérivations ∂_x et ∂_θ commutant à $\mathbb{E}$, les estimations d'energie dans $\mathscr{N}^s$ s'en déduisent, et suivant les lignes classiques des théorèmes d'existence pour les problèmes hyperboliques symétriques on a :

PROPOSITION 9.6. *Il existe $t_o > 0$ tel que le schéma* (9.11) *définisse une suite $\mathscr{U}_\nu$ bornée dans $\mathscr{N}^s(t_o)$ qui converge dans $\mathscr{N}^\sigma(t_o)$ pour tout $\sigma < s$, vers la solution $\mathscr{U} \in \mathscr{N}^s(t_o)$ de* (9.10).

C) Preuve de l'asymptotique. Il s'agit ici de démontrer l'estimation (6.7) du théorème 6.2. En fait, nous savons que la solution u^ε est de la forme (9.1). Compte tenu de l'injection $H^s(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)\subset L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^m)$ lorsque $s>(n+m)/2$, l'estimation (6.7) est une conséquence du résultat plus précis suivant :

PROPOSITION 9.7. *Quitte à diminuer $t_o>0$, si l'on pose $\underline{U}^\varepsilon(t,x,\theta)=\mathcal{U}(t,x,t/\varepsilon,\theta)$ alors $U^\varepsilon-\underline{U}^\varepsilon \to 0$ dans $E^\sigma(t_o)$ pour tout $\sigma<s$, lorsque $\varepsilon\to 0$.*

On notera que la famille $\underline{U}^\varepsilon$ est bornée dans $E^s(t_o)$ puisque $\mathcal{U}\in\mathcal{E}^s(t_o)$. D'après la proposition 9.1, les U^ε sont eux aussi bornés dans $E^s(t_o)$. Il en est donc de même de la famille $U^\varepsilon-\underline{U}^\varepsilon$ et il suffit de montrer la convergence dans $E^{s-1}(t_o)$. D'autre part, compte tenu des propositions 9.1 et 9.6, il nous suffit donc de montrer que pour tout entier ν fixé, si l'on pose $\underline{U}^\varepsilon_\nu(t,x,\theta)=\mathcal{U}_\nu(t,x,t/\varepsilon,\theta)$ alors $U^\varepsilon_\nu-\underline{U}^\varepsilon_\nu\to 0$ dans $E^{s-1}(t_o)$ lorsque $\varepsilon\to 0$. Ceci se démontre par récurrence sur ν. Revenons alors sur le problème (9.3) avec des coefficients V et F tels que :

a) *La famille* V^ε est bornée dans $E^s(t_o)$ et il existe $\mathcal{V}\in\mathcal{N}^s(t_o)$ tel que si l'on pose $\underline{V}^\varepsilon(t,x,X)=\mathcal{V}(t,x,t/\varepsilon,X)$ alors $V^\varepsilon-\underline{V}^\varepsilon\to 0$ dans $E^{s-1}(t_o)$ lorsque $\varepsilon\to 0$.

b) *La famille* F^ε est bornée dans $E^s(t_o)$ et il existe $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^s(t_o)$ tel que si l'on pose $\underline{F}^\varepsilon(t,x,X)=\mathcal{F}(t,x,t/\varepsilon,X)$ alors $F^\varepsilon-\underline{F}^\varepsilon\to 0$ dans $E^{s-1}(t_o)$ lorsque $\varepsilon\to 0$.

La proposition 9.7 découle alors des deux résultats suivants :

PROPOSITION 9.8. *Sous les hypothèses ci-dessus, soit U^ε la solution de* (9.3) *et soit $\mathcal{U}$ la solution de* (9.10). *Alors,si l'on pose $\underline{U}^\varepsilon(t,x,X)=\mathcal{U}(t,x,t/\varepsilon,X)$, on a $U^\varepsilon-\underline{U}^\varepsilon\to 0$ dans $E^{s-1}(t_o)$ lorsque $\varepsilon\to 0$.*

LEMME 9.9. *Soit V vérifiant la conditon a) ci-dessus. Alors la fonction $F(t,x,X)=F(t,x,\varepsilon V(t,x,X),V(t,x,X))$ vérifie la condition b) avec $\mathcal{F}(t,x,T,X)=\underline{F}(t,x,\mathcal{V}(t,x,T,X))$.*

Le lemme est clair. La preuve de la proposition 9.8 consiste à construire pour tout $\delta>0$ une solution "asymptotiquement δ approchée". On approche $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{F}$ à δ près par des polynômes trigonométriques $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{F}_0$. Notons $\underline{V}_0(t,x,\theta)=\mathcal{V}_0(t,x,t/\varepsilon,\theta)$ et $L_o=L(\partial_t,\partial_x)+\varepsilon^{-1}A(0,{}^tM\partial_\theta)+\underline{B}(\underline{V}_o;{}^tM\partial_\theta)$. On construit, par une inversion de type elliptique dans des développements à nombre fini de termes, un terme correctif polynomial $\mathcal{U}_1$ tel que si l'on pose $\underline{U}_1(t,x,\theta)=\mathcal{U}_1(t,x,t/\varepsilon,\theta)$ on a

(9.14) $$\| L_o(U-\{\underline{U}_o+\varepsilon\,\underline{U}_1\})\|_{E^{s-1}(t_o)}\le K\delta+c(\varepsilon,\delta)$$

(9.15) $$\| (U-\{\underline{U}_o+\varepsilon\,\underline{U}_1\})_{|t=0}\|_{H^{s-1}}\le K\delta+c(\varepsilon,\delta)$$

où K est une constante indépendante de ε et δ alors que c est une fonction telle que pour tout $\delta>0$ fixé, $c(\varepsilon,\delta)\to 0$ lorsque $\varepsilon\to 0$. On en tire que $\|U-\underline{U}_o\|_{E^{s-1}(t_o)}$ puis que $\|U-\underline{U}\|_{E^{s-1}(t_o)}$ est majoré par une expression en $K\delta+c(\varepsilon,\delta)$. La proposition 9.9 en résulte.

Références.

[CB] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Ondes asymptotiques et approchées pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, J. Math. Pures App., 48, 1969, 117-158.

[D] J.M.DELORT, *Oscillations semi–linéaires multiphasées compatibls en dimension deux ou trois d'espace*; à paraître.

[G] O. GUES, Thèse Rennes, 1989 et article à paraître.

[HK] J. HUNTER, J. KELLER, *Weakly nonlinear high frequency waves*, Comm. Pure Appl. Math., 36, 1983, 547-569.

[HMR] J. HUNTER, A. MAJDA, R. ROSALES, *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves II: several space variables*, Stud. Appl. Math., 75, 1986, 187-226.

[J] J-L. JOLY, *Sur la propagation des oscillations par un système hyperbolique semi–linéaire en dimension* 1, *C. R. Acad.Sc. Paris*, 296, 1983.

[JMR] J.-L. JOLY, G. METIVIER, J. RAUCH, *Resonant one dimensional nonlinear geometric optics*; preprint.

[JR1] J-L. JOLY, J. RAUCH, *Justification of multidimensinal single phase semilinear geometric optics*, à paraître.

[JR2] J-L. JOLY, J. RAUCH, *Nonlinear resonance can create dense oscillations*; à paraître.

[MR] A. MAJDA, R. ROSALES, *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves I: a single space variable*, Stud. Appl. Math., 71, 1984, 149-179.