Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Gérard

# Mesures semi-classiques et ondes de Bloch

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1990-1991), exp. n° 16, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A16_0>

*CENTRE*
*DE*
*MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

---

# EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

# MESURES SEMI-CLASSIQUES
# ET ONDES DE BLOCH

**P. GERARD**

Exposé n° XVI

23 Avril 1991

## 1. Introduction.

Soit $V$ un potentiel réel périodique par rapport au réseau $2\pi\mathbf{Z}^n$ de $\mathbf{R}^n$. On se propose de décrire, lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, les oscillations de la solution $\psi^\varepsilon = \psi^\varepsilon(t,x)$ de l'équation de Schrödinger

$$(S) \qquad \begin{cases} i\varepsilon \dfrac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial t} = (-\dfrac{\varepsilon^2}{2}\Delta_x + V(\dfrac{x}{\varepsilon}))\psi^\varepsilon \\ \psi^\varepsilon_{|t=0} = \psi^\varepsilon_0(x), \end{cases}$$

où, par exemple, $\psi^\varepsilon_0(x) = a(x)e^{iS(x)/\varepsilon}$ avec $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $S$ réelle et régulière.

Un tel problème apparaît naturellement en Physique du solide (voir par exemple Guillot-Ralston-Trubowitz [GRT]). On souhaiterait en particulier connaître, pour tout $t$, la limite vague quand $\varepsilon$ tend vers 0 de la densité de probabilité $|\psi^\varepsilon(t,x)|^2 dx$. Une première approche consiste à chercher une solution approchée de $(S)$ du type

$$(1.1) \qquad \tilde{\psi}^\varepsilon(t,x) = \alpha(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)e^{i\Sigma(t,x)/\varepsilon} \ .$$

On la trouvera par exemple dans le livre de Bensoussan-Lions-Papanicolaou [BLP] et dans [GRT], et nous la rappelons dans le paragraphe 2 ci-dessous. Une telle approche montre que la dynamique des oscillations de $(S)$ est formellement décrite par une infinité d'hamiltoniens $\lambda_j(\xi)$, qui sont les valeurs propres de l'opérateur

$$(1.2) \qquad A(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - i\frac{\partial}{\partial y})^2 + V(y)$$

sur le tore. Néanmoins, on n'obtient ici de résultat rigoureux que sous l'hypothèse très stricte - et essentiellement jamais vérifiée en dehors peut-être de la dimension 1 - que, pour tout $\xi$ près de $\{dS(x), x \in \text{supp } a\}$, l'opérateur $A(\xi)$ n'admet que des valeurs propres simples. En général, les croisements de valeurs propres font apparaître des singularités, et les équations eikonales et de transport deviennent difficiles à résoudre, voire dénuées de sens.

Pour éviter cette difficulté, on introduit un §3 en outil qui permet de décrire les oscillations de $\psi^\varepsilon$ sans passer par l'intermédiaire d'un développement du type (1.1) et possède suffisamment de souplesse pour des géométries très singulières. Il s'agit d'une mesure sur le fibré cotangent $T^*\mathbf{R}^n$, dont la définition est analogue à celle d'une mesure microlocale de défaut (ou $H$-mesure). (cf. Tartar [T], [PG], Francfort-Murat [F-M]).

Notre résultat est énoncé et démontré au §4. Outre le formalisme du §3, on utilise une idée due à Buslaev [B] consistant à résoudre (S) en ajoutant la variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$ (voir [B] et C. Gérard-Martinez-Sjöstrand [GMS] pour l'utilisation de cette méthode dans le cadre de la théorie spectrale). Un résultat de presque-orthogonalité (proposition 3.3) permet de montrer que, sous une hypothèse générique sur la phase $S$, les contributions de chaque hamiltonien $\lambda_j$ évoluent sans interactions.

Nous discutons brièvement au §5 les extensions de ce résultat. Indiquons tout de suite qu'une méthode tout à fait analogue s'applique à l'équation des ondes

$$(W) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u^\varepsilon - \sum_{i,j} \partial_{x_i} a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \partial_{x_j} u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon_{|t=0} = 0 \ , \ \partial_t u^\varepsilon_{|t=0} = a(x) e^{iS(x)/\varepsilon} \end{cases}$$

où $A(y) = (a_{ij}(y))$ vérifie $0 < mI \leq A(y) \leq MI$, la densité d'énergie étant dans ce cas

$$\rho^\varepsilon(t,x) = |\partial_t u^\varepsilon|^2(t,x) + \sum_{i,j} a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \partial_i u^\varepsilon \overline{\partial_j u^\varepsilon}(t,x).$$

Le résultat obtenu donne alors une indication sur la structure des correcteurs introduits dans Brahim-Ostmane-Francfort-Murat [BFM].

## 2. Optique géométrique.

On suit ici [BLP]. En substituant l'expression (1.1) à $\psi^\varepsilon$ dans (S), on obtient, avec $D = -i\partial$ et

$$\alpha(t,x,y,\varepsilon) = \alpha_0(t,x,y) + \varepsilon \alpha_1(t,x,y),$$

$$(2.1) \qquad -\frac{\partial \Sigma}{\partial t} \alpha + i\varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{1}{2}(\varepsilon D_x + D_y + \frac{\partial \Sigma}{\partial x})^2 \alpha + V(y)\alpha + 0(\varepsilon^2)$$

En identifiant les termes d'ordre 1 :

$$(2.2) \qquad -\frac{\partial \Sigma}{\partial t} \alpha_0 = \frac{1}{2}(D_y + \frac{\partial \Sigma}{\partial x})^2 \alpha_0 + V(y)\alpha_0,$$

ce qui signifie que $-\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t,x)$ est une valeur propre de l'opérateur $A(\frac{\partial \Sigma}{\partial x}(t,x))$ (où $A(\xi)$ est défini en (1.2)). Si $\lambda(\xi)$ est une valeur propre de $A(\xi)$ dépendant régulièrement de $\xi$ (par exemple si elle est simple), alors on a une équation eikonale du type

$$(2.3) \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \lambda(\frac{\partial \Sigma}{\partial x}) = 0$$

Si cette valeur propre est simple, soit $\phi(y,\xi)$ une fonction propre normalisée associée. On a alors

$$(2.4) \qquad \alpha_0(t,x,y) = c(t,x)\phi(y, \frac{\partial \Sigma}{\partial x}(t,x)) \ ,$$

et $c$ se calcule en égalant dans (2.1) les termes d'ordre $\varepsilon$,

$$\left[A(\frac{\partial\Sigma}{\partial x})-\lambda(\frac{\partial\Sigma}{\partial x})\right]\alpha_1=i\frac{\partial\alpha_0}{\partial t}-\frac{1}{2}[D_x(D_y+\frac{\partial\Sigma}{\partial x})+(D_y+\frac{\partial\Sigma}{\partial x})D_x]\alpha_0\ . \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) est résoluble si et seulement si le second membre est orthogonal au noyau de l'opérateur du premier membre, i.e. à $\phi(y,\frac{\partial\Sigma}{\partial x})$. On obtient, en remarquant que $\frac{\partial}{\partial t}\phi$ est orthogonale à $\phi$,

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\langle\partial_x(D_y+\frac{\partial\Sigma}{\partial x})(c\phi),\phi\rangle+\frac{1}{2}\langle(D_y+\frac{\partial\Sigma}{\partial x}).\partial_x(c\phi),\phi\rangle=0 \tag{2.6}$$

En dérivant par rapport à $\xi$ l'équation $(A(\xi)-\lambda(\xi))\phi(\xi)=0$, on obtient

$$(A'(\xi)-\lambda'(\xi))\phi(\xi)+(A(\xi)-\lambda(\xi))\phi'(\xi)=0\ . \tag{2.7}$$

Prenant le produit scalaire de (2.7) par $\phi$, on en déduit

$$\langle A'(\xi)\phi,\phi\rangle\equiv\langle(D_y+\xi)\phi,\phi\rangle=\lambda'(\xi) \tag{2.8}$$

tandis qu'en prenant le produit scalaire de (2.7) par $\phi'$, on constate que

$$\langle A'(\xi)\phi,\phi'(\xi)\rangle\equiv\langle(D_y+\xi)\phi,\phi'\rangle=\langle(A(\xi)-\lambda(\xi))\phi',\phi'\rangle \tag{2.9}$$

donc est une matrice hermitienne. On écrit alors (2.6) sous la forme

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial c}{\partial t}&+\frac{1}{2}\left[\partial_x.(c\langle(D_y+\frac{\partial\Sigma}{\partial x})\phi,\phi\rangle)+\langle(D_y+\frac{\partial\Sigma}{\partial x})\phi,\phi\rangle.\partial_x c\right]\\&+\frac{1}{2}\left[-c\langle(D_y+\frac{\partial\Sigma}{\partial x})\phi,\partial_x\phi\rangle+\langle(D_y+\frac{\partial\Sigma}{\partial x})\partial_x\phi,\phi\rangle c\right]\end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de (2.8) et (2.9), donne l'équation

$$0=\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\partial_x.(\lambda'(\frac{\partial\Sigma}{\partial x})c)+\frac{1}{2}\lambda'(\frac{\partial\Sigma}{\partial x}).\partial_x c\ . \tag{2.10}$$

Si toutes les valeurs propres $\lambda_j(\xi)$ étaient simples, on en déduirait, en décomposant 1 suivant les fonctions propres $\phi_j$,

$$1=\sum_{j=1}^{\infty}m_j(x)\phi_j(y,\frac{\partial S}{\partial x})\ , \tag{2.11}$$

que $\psi^\varepsilon$ est égale modulo $0(\varepsilon)$ (pour $t$ petit) à

$$\tilde{\psi}^\varepsilon(t.x)=\sum_{j=1}^{\infty}c_j(t,x)\phi_j(\frac{x}{\varepsilon}\ ,\frac{\partial\Sigma_j}{\partial x})e^{i\Sigma_j(t,x)/\varepsilon} \tag{2.12}$$

où $c_j$ est caractérisée par (2.10) avec $\lambda=\lambda_j$ et $c_{j|_{t=0}}=am_j$.

Comme on l'a déjà remarqué, les $\lambda_j$ sont en réalité de multiplicité variable et peu régulières : on peut montrer qu'elles sont lipschitziennes. (voir le lemme 4.1 ci-dessous). L'analyse ci-dessus devient alors délicate à justifier (par exemple l'équation de transport (2.10)). Nous allons néanmoins donner une justification partielle de (2.12) en calculant $\lim_{\varepsilon\to 0}|\psi^\varepsilon(t,x)|^2$ au sens des mesures, y compris pour de grandes valeurs de $t$, où de toute façon une formule comme (2.12) devrait être modifiée à cause des caustiques associées à l'équation (2.3).

## 3. Mesures semi-classiques.

Soit $(u^\varepsilon)$ une famille bornée de $L^2(\mathbf{R}^n)$.

On sait (voir [T], [PG]), que les oscillations microlocales de $(u^\varepsilon)$ sont décrites - après extraction d'une sous-suite - par une mesure de Radon positive $\mu_1$ sur $S^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times S^{n-1}$, définie par

$$\lim(A(u^\varepsilon - u), u^\varepsilon - u) = \int_{S^*\mathbf{R}^n} \sigma_0(A)(x,\xi)\mu_1(dxd\xi)$$

où $u$ est la limite faible de $u^\varepsilon$, et où $A$ décrit la classe des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0, dont le symbole est nul en dehors d'un compact en $x$, et où $\sigma_0(A)$ désigne le symbole principal de $A$. Nous allons ici suivre la même idée pour décrire les oscillations de $(u^\varepsilon)$ "à l'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$", en faisant dépendre "l'opérateur test" $A$ de $\varepsilon$ comme un opérateur $\varepsilon$-pseudodifférentiel de l'analyse semi-classique (voir par exemple [R]). Précisément, on prendra $A^\varepsilon = a(x, \varepsilon D)$, où l'on supposera $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. La famille $(A^\varepsilon)$ est donc une famille bornée d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0, mais sa structure particulière simplifie beaucoup les calculs.

Rappelons quelques propriétés fondamentales de ces opérateurs :

$$a(x,\varepsilon D) \quad \text{est uniformément borné sur} \quad L^2. \tag{3.1}$$

$$a(x,\varepsilon D)^* = \bar{a}(x,\varepsilon D) + \varepsilon R_\varepsilon, \tag{3.2}$$

$$b(x,\varepsilon D)a(x,\varepsilon D) = (ba)(x,\varepsilon D) + \varepsilon \tilde{R}_\varepsilon, \tag{3.3}$$

où $R_\varepsilon, \tilde{R}_\varepsilon$ sont uniformément bornés sur $L^2$.

La propriété (3.1) découle immédiatement du lemme de Schur appliqué au noyau $k_\varepsilon$ de $a(x,\varepsilon D)$, donné par

$$k_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^n} k(x, \frac{x-y}{\varepsilon}) \ , \ k(x,y) = \int e^{iy\xi} a(x,\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}, \tag{3.4}$$

en particulier $k \in \mathcal{S}$.

Les propriétés (3.2), (3.3) s'obtiennent aisément en écrivant

$$a(x,\varepsilon D) = \int e^{ix\eta} \hat{a}(\eta, \varepsilon D) \frac{d\eta}{(2\pi)^n} \tag{3.5}$$

et en remarquant que

$$b(x,\varepsilon D)e^{ix\eta} = e^{ix\eta} b(x, \varepsilon D + \varepsilon\eta) \ . \tag{3.6}$$

Utilisant (3.2), (3.3) comme dans [PG 2,3], on obtient la

**Proposition 3.1.**— *Il existe une suite* $(\varepsilon_k)$ *tendant vers* 0 *et une mesure de Radon positive* $\mu$ *sur* $T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *telles que*

$$\forall a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)\ ,\ (a(x, \varepsilon_k D)u^{\varepsilon_k}, u^{\varepsilon_k}) \to \int_{T^*\mathbf{R}^n} a(x,\xi)\mu(dxd\xi). \tag{3.7}$$

*Si* $u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u$, *on a* $\mu \geq |u(x)|^2 dx\delta(\xi)$, *avec égalité s'il y a convergence forte.*

- Lorsque (3.7) a lieu, on dit que $\mu$ est la *mesure semi-classique* de $(u^{\varepsilon_k})$ et on note $M(u^{\varepsilon_k}) = \mu$.

Contrairement au cas des mesures de défaut microlocales, nous avons choisi de ne pas faire figurer la limite faible $u$ dans la formule (3.7). Cela tient au fait que, dans les problèmes semi-classiques, cette limite n'est pas toujours aisément identifiable à partir des données (par exemple si $(\varepsilon D_t + x^2)\psi^\varepsilon = 0$ , $\psi^\varepsilon_{t=0} = e^{ix^2/\varepsilon}$, la limite faible de $\psi^\varepsilon(1,x)$ n'est pas zéro).

- Donnons quelques exemples avec $u = 0$.

Si $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ , $S \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et $dS(x) \neq 0$ presque partout,

$$M(f(x)e^{iS(x)/\varepsilon^\alpha}) = \begin{cases} |f(x)|^2 dx\delta(\xi - dS(x)) & \text{si } \alpha = 1 \\ |f(x)|^2 dx\delta(\xi) & \text{si } \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

(3.9) Si $f \in L^2(\mathbf{R}^n), \xi_0 \in \mathbf{R}^n$ ,

$$M(\frac{1}{\varepsilon^{n/2}} f(\frac{x}{\varepsilon})) = \delta(x)|\hat{f}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

$$M(\frac{1}{\varepsilon^{n\alpha/2}} f(\frac{x}{\varepsilon^\alpha})e^{ix\xi_0/\varepsilon}) = \begin{cases} \|f\|^2\ \delta(x)\delta(\xi - \xi_0), \\ \quad \text{si } 0 < \alpha < 1. \\ \quad 0 \text{ si } \alpha > 1. \end{cases}$$

- On dispose de critères simples assurant que, si $u^\varepsilon \rightharpoonup u$, le "défaut" $\mu - |u(x)|^2 dx\delta(\xi)$ contient toute l'obstruction à la convergence forte de $u^\varepsilon$.

**Définitions.**— *On dit que* $(u^\varepsilon)$ *est compacte à l'infini si*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>R} |u^\varepsilon(x)|^2 dx \to 0 \quad si \quad R \to +\infty\ .$$

*On dit que* $(u^\varepsilon)$ *est* $\varepsilon$*-oscillante si*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi|>R/\varepsilon} |\hat{u}^\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \to 0 \quad si \quad R \to +\infty\ .$$

- si $(u^\varepsilon)$ est $\varepsilon$-oscillante et si $M(u^\varepsilon) = \mu$, alors $\mu(K \times \mathbf{R}^n) < \infty$ pour tout compact $K$, et la projection $\pi_x(\mu)$ sur $\mathbf{R}^n_x$ est la limite vague de $|u^\varepsilon(x)|^2 dx$. Si de plus $(u^\varepsilon)$ est compacte à l'infini, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int |u^\varepsilon(x)|^2 dx = \mu(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) < +\infty .$$

- Lien avec la mesure de défaut microlocale $\mu_1$ : si $(u^\varepsilon)$ est $\varepsilon$-oscillante et si $M(u^\varepsilon) = \mu$ ne charge pas $\{\xi = 0\}$, on montre aisément que $u^\varepsilon \rightharpoonup 0$ et la formule

$$\forall a \in C_0(S^*\mathbf{R}^n), \int_{S^*\mathbf{R}^n} a(x,\xi)\mu_1(dxd\xi) = \int_{T^*\mathbf{R}^n} a(x, \frac{\xi}{|\xi|})\mu(dxd\xi) .$$

- Construction d'une suite admettant une mesure semi-classique donnée. En adaptant les arguments de [T], on montre la

**Proposition 3.2.**— *Soit $\mu$ une mesure positive sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Alors il existe une suite $(\varepsilon_k)$ tendant vers 0, et une suite $(u^{\varepsilon_k})$ tendant faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, telles que*

$$M(u^{\varepsilon_k}) = \mu .$$

*Si $\mu$ est finie, on peut choisir $(u^{\varepsilon_k})$ $\varepsilon_k$-oscillante et compacte à l'infini.*

- Venons en à deux propriétés fondamentales des mesures semi-classiques. La première est un critère de presque orthogonalité :

**Proposition 3.3.**— *Soient $(u^\varepsilon), (v^\varepsilon)$ deux suites de $L^2(\mathbf{R}^n)$ convergeant faiblement vers 0. Si $M(u^\varepsilon)$ et $M(v^\varepsilon)$ existent et sont mutuellement singulières, alors*

$$M(u^\varepsilon + v^\varepsilon) = M(u^\varepsilon) + M(v^\varepsilon) .$$

Il suffit en effet de prouver que, pour tout

$$a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \ , \ (a(x,\varepsilon D)u^\varepsilon, v^\varepsilon) \to 0 .$$

Pour cela, on note que l'hypothèse $M(u^\varepsilon) \perp M(v^\varepsilon)$ permet d'écrire, pour tout $\delta > 0$,

$$a = a_1^\delta + a_2^\delta ,$$

où $a_1^\delta, a_2^\delta \in C_0^\infty$ sont bornées indépendamment de $\delta$ et, posant $M(u^\varepsilon) = \mu$ et $M(v^\varepsilon) = \nu$,

$$\int |a_1^\delta|\mu \leq \delta \ , \ \int |a_2^\delta|\nu \leq \delta .$$

On écrit alors

$$|(a(x,\varepsilon D)u^\varepsilon, v^\varepsilon)| \leq |(a_1^\delta(x,\varepsilon D)u^\varepsilon, v^\varepsilon)| + |(u^\varepsilon, a_2^\delta(x,\varepsilon D)^* v^\varepsilon)|$$

et on constate que, par l'inégalité de Schwarz et le calcul symbolique (3.2), (3.3), la limite supérieure de chacun des deux termes est majorée par $C\delta$. ∎

- La seconde propriété indique comment tirer d'une équations aux dérivées partielles des informations sur la mesure semi-classique de sa solution.

Soient $p_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi)$ , $j = 1, \cdots, m$, des fonctions polynomiales en $\xi$. On pose

$$P^\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^j p_j(x, \varepsilon D_x) , \tag{3.10}$$

et on suppose que $(u^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2$ et satisfait à

$$P^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon \ , \ f^\varepsilon \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbf{R}^n) . \tag{3.11}$$

Alors, si $M(u^\varepsilon) = \mu$ existe, on a

$$p_0 \mu = 0 \tag{3.12}$$

En effet, (3.12) serait une conséquence immédiate de la définition de $\mu$ et de (3.3) si les $p_j$ étaient dans $\mathcal{S}$. Pour s'y ramener, on utilise le lemme suivant, qui généralise (3.3).

**Lemme 3.4.**— *Soient $p \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ polynomiale en $\xi$, $k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, et $a$ la transformée de Fourier de $k$ par rapport à la seconde variable. Alors*

$$a(x, \varepsilon D) p(x, \varepsilon D) = (ap)(x, \varepsilon D) + \varepsilon R_\varepsilon \tag{3.13}$$

*où $R_\varepsilon$ est uniformément borné sur $L^2$.*

Pour montrer ce lemme, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} a(x, \varepsilon D) p(x, \varepsilon D) u &= \int \frac{1}{\varepsilon^n} k(x, \frac{x-y}{\varepsilon}) p(y, \varepsilon D_y) u(y) dy \\ &= \int u(x - \varepsilon z)\, {}^t p(x - \varepsilon z, -D_z) k(x, z) dz \end{aligned}$$

avec ${}^t p(x - \varepsilon z, -D_z) k(x, z) = p(x, D_z) k(x, z) + \varepsilon r_\varepsilon(x, z)$ où $r_\varepsilon$ est bornée dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. ∎

- Lorsque $f_\varepsilon = o(\varepsilon)$ dans (3.11) et que $p_0$ est réel, on a une information supplémentaire sur $\mu$, qui est une équation de transport, à rapprocher de celles de [T], [PG 1,3], [FM] dans le cas des mesures de défaut microlocales. Nous préférons l'énoncer dans le cadre d'une équation d'évolution.

**Proposition 3.5.**— *Soit $P^\varepsilon$ comme dans (3.10), $p_0$ réel, et soit $u^\varepsilon \in C(\mathbf{R}_t, L^2(\mathbf{R}^n))$ une solution de*

$$\left\{\begin{array}{l}(\varepsilon D_t + P^\varepsilon)u^\varepsilon = \varepsilon f^\varepsilon \\ u^\varepsilon_{|t=0} = u^\varepsilon_0\end{array}\right. \tag{3.14}$$

*où $f^\varepsilon \to 0$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_t, L^2(\mathbf{R}^n))$. Si $M(u_0^\varepsilon) = \mu_0$ existe, alors $M(u^\varepsilon(t)) = \mu(t)$ existe pour tout $t \in \mathbf{R}$, varie continûment en fonction de $t$ pour la topologie vague, et satisfait à l'équation*

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t \mu + \{p_0, \mu\} = (2 \text{ Im } p_1 + \partial_x.\partial_\xi p_0)\mu \\ \mu_{|t=0} = \mu_0\end{array}\right. \tag{3.15}$$

*De plus, pour toute fonction $\varphi \in C_0(\mathbf{R}_t)$, on a*

$$M(\varphi u^\varepsilon)(t,x,\tau,\xi) = |\varphi(t)|^2 \mu(t,x,\xi)\delta(\tau + p_0(x,\xi)) \ . \tag{3.16}$$

- Dans l'énoncé ci-dessus, on a noté

$$\{f, g\} = \partial_\xi f.\partial_x g - \partial_\xi g.\partial_x f \ .$$

Pour prouver (3.15), on se ramène d'abord au cas où les $p_j$ sont dans $\mathcal{S}$ grâce au lemme 3.4, ce qui permet d'oublier $p_j$ pour $j \geq 2$. On utilise ensuite la version précisée au second ordre en $\varepsilon$ des formules (3.2) et (3.3) :

$$a(x, \varepsilon D)^* = \bar{a}(x, \varepsilon D) - i\varepsilon\partial_x.\partial_\xi \bar{a}(x, \varepsilon D) + \varepsilon^2 R_\varepsilon \ , \tag{3.17}$$

$$b(x, \varepsilon D)a(x, \varepsilon D) = ba(x, \varepsilon D) - i\varepsilon\partial_\xi b \ \partial_x a(x, \varepsilon D) + \varepsilon^2 \tilde{R}_\varepsilon, \tag{3.18}$$

où $R_\varepsilon, \tilde{R}_\varepsilon$ sont uniformément bornés sur $L^2$. On en déduit que, pour tout $a \in \mathcal{S}$, la suite des $(a(x, \varepsilon D)u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))$ est équicontinue sur $\mathbf{R}_t$, et que toute mesure semi-classique associée à une sous-suite $(u^{\varepsilon_k}(t))$ satisfait à (3.15).

Comme (3.15) a une solution unique, on en déduit le résultat. La formule (3.16) est alors conséquence de (3.12). ■

**Exemple :** équation de Schrödinger. Soit $V \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tel que $\lim \inf_{x \to \infty} V(x) > -\infty$. Alors l'opérateur

$$H^\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta_x + V(x)$$

est essentiellement autoadjoint, et on peut considérer, pour $\psi_0^\varepsilon \in L^2(\mathbf{R}^n)$,

$$\psi^\varepsilon(t) = e^{-itH^\varepsilon/\varepsilon}\psi_0^\varepsilon \tag{3.19}$$

Si $M(u_0^\varepsilon) = \mu_0$ existe, le résultat ci-dessus entraîne que $M(u^\varepsilon(t)) = \mu(t)$ est la solution de l'équation de Vlasov.

$$\tag{3.20} \begin{cases} \partial_t \mu + \xi.\nabla_x \mu - \nabla_x V(x).\nabla_\xi \mu = 0 \\ \mu|_{t=0} = \mu_0 \end{cases}$$

qui est l'équation de la mécanique statistique associée au potentiel $V$. Si $V$ est seulement $C^1$, on montre que, pour tout $a$ comme le lemme 3.4,

$$i[a(x,\varepsilon D), V] = \varepsilon \nabla_x V.\nabla_\xi a(x,\varepsilon D) + o(\varepsilon)$$

dans l'espace des opérateurs bornés sur $L^2$. On en déduit que toute mesure semi-classique associée à une sous-suite $(\psi^{\varepsilon_k}(t))$ satisfait à (3.20). Cependant, sans hypothèse supplémentaire sur $V$, on ne peut conclure à l'unicité des solutions de (3.20) puisque $\nabla_x V$ est seulement continue. Un problème ouvert est de savoir si l'on peut caractériser de telles mesures parmi les solutions de (3.20). Un autre problème ouvert serait de caractériser la ou les mesures semi-classiques de $\psi^\varepsilon(t)$ lorsque V est encore moins régulier, $H^\varepsilon$ restant essentiellement autoadjoint.

- La proposition 3.5 admet diverses généralisations au cas d'équations pseudo-différentielles à symboles peu réguliers. En voici une que nous utiliserons au paragraphe 4.

**Proposition 3.6.—** *Soit $\lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction bornée et globalement lipschitzienne. Soit $u^\varepsilon \in C(\mathbf{R}_t, L^2(\mathbf{R}^n))$ la solution de l'équation*

$$\tag{3.21} \begin{cases} (\varepsilon D_t + \lambda(\varepsilon D_x))u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon \end{cases}$$

*On suppose que $(u_0^\varepsilon)$ est $\varepsilon$-oscillante, compacte à l'infini et que $M(u_0^\varepsilon) = \mu_0$ existe, de projection $\pi_\xi(\mu_0)$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\xi$. Alors, pour tout $t$, il en est de même de $(u^\varepsilon(t))$ et $\mu(t) = M(u^\varepsilon(t))$ satisfait à*

$$\tag{3.22} \partial_t \mu + \lambda'(\xi).\partial_x \mu = 0 \ ,$$

$$\textit{i.e.} \quad \mu(t,x,\xi) = \mu_0(x - t\lambda'(\xi), \xi).$$

- Notons que la dernière formule a un sens car $\pi_\xi(\mu_0) \ll d\xi$. Les propriétés $(u^\varepsilon(t))$ $\varepsilon$-oscillante et $\pi_\xi(M(u^\varepsilon(t))) \ll d\xi$ ne font intervenir que des mulplicateurs de Fourier qui commutent à (3.21) ; elle se déduisent donc aisément de l'estimation $L^2$ pour (3.21). Les autres faits sont conséquences du lemme suivant :

**Lemme 3.7.**— *Soient $a \in \mathcal{S}, (v^\varepsilon)$ une suite bornée de $L^2$ telle que*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{E/\varepsilon} |\hat{v}^\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \to 0 \quad si \quad m(E) \to 0$$

*(i) Si $\lambda$ est lipschitzienne, on a*

$$\frac{1}{\varepsilon}[\lambda(\varepsilon D), a(x,\varepsilon,D)]v^\varepsilon + i\partial_x a(x,\varepsilon,D).\partial_\xi \lambda(\varepsilon D)v^\varepsilon \to 0 \quad dans \quad L^2.$$

*(ii) Si $b \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, on a*

$$(a(x,\varepsilon D)b(\varepsilon D)v^\varepsilon, v^\varepsilon) \to \int a(x,\xi)b(\xi)\mu(dxd\xi)$$

- Pour démontrer (i), on écrit, en utilisant (3.5) :

$$\frac{1}{\varepsilon}[\lambda(\varepsilon D), a(x,\varepsilon D)] = \int e^{ix\eta}\hat{a}(\eta,\varepsilon D)\frac{(\lambda(\varepsilon D+\varepsilon\eta)-\lambda(\varepsilon D))}{\varepsilon}\frac{d\eta}{(2\pi)^n}.$$

Grâce au théorème de convergence dominée en $\eta$, on est ramené à prouver que, pour tout $\eta \in \mathbf{R}^n$,

$$(\frac{\lambda(\varepsilon D+\varepsilon\eta)-\lambda(\varepsilon D)}{\varepsilon} - \eta\partial_\xi\lambda(\varepsilon D))v^\varepsilon \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2,$$

ou encore, par la formule de Plancherel,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\frac{\lambda(\xi+\varepsilon\eta)-\lambda(\xi)}{\varepsilon} - \eta\partial_\xi\lambda(\xi)|^2 g^\varepsilon(\xi)d\xi \to 0 \ , \tag{3.23}$$

où $g^\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n}|\hat{v}^\varepsilon(\frac{\xi}{\varepsilon})|^2$. Par hypothèse, $g^\varepsilon$ est bornée dans $L^1$ et

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_E g^\varepsilon(\xi)d\xi \to 0 \quad \text{si} \quad m(E) \to 0 \ .$$

Or, pour tout $p < \infty$, on a

$$\frac{\lambda(\xi+\varepsilon\eta)-\lambda(\xi)}{\varepsilon} - \eta.\partial_\xi\lambda(\xi) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^p(d\xi),$$

donc, d'après le théorème d'Egorov, il existe une suite $(\varepsilon_k)$ et, pour tout $\delta > 0$, un ensemble $E^\delta$ tel que $m(E^\delta) \le \delta$ et

$$\frac{\lambda(\xi+\varepsilon_k\eta)-\lambda(\xi)}{\varepsilon_k} - \eta.\partial_\xi\lambda(\xi) \to 0 \text{ uniformément pour } \xi \notin E^\delta \ .$$

Comme cette dernière quantité est uniformément bornée sur $\mathbf{R}^n$, on en conclut que toute valeur d'adhérence de l'intégrale (3.23) est nulle, d'où le résultat.

Quant à l'assertion (ii), elle s'obtient en approchant $b$ par une fonction régulière et en utilisant le théorème d'Egorov comme ci-dessus. ■

- Terminons ce paragraphe en citant diverses généralisations. Tout d'abord on peut localiser la notion de mesure semi-classique : si $(u^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on choisit des opérateurs test $a(x, \varepsilon D)$ où $a(x,\xi) = \hat{k}(x,\xi)$ et $k = k(x,y)$ est à support compact dans $\Omega \times \mathbf{R}^n$.

On peut également, comme dans [PG2], étudier des suites à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ ; la mesure $\mu$ prend alors ses valeurs dans les opérateurs à trace sur $\mathcal{H}$. Voici un exemple élémentaire. Soit $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,y)$ bornée dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega_x, H^s(\mathbf{T}^n_y))$ pour $s > \frac{n}{2}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut alors supposer que, pour tous $y, y' \in \mathbf{T}^n$,

$$(a(x,\varepsilon D)u^\varepsilon(y), u^\varepsilon(y')) \to \int a(x,\xi)\mathcal{M}(dxd\xi, y, y') \tag{3.24}$$

où $\mathcal{M}(y,y')$ est une mesure sur $T^*\mathbf{R}^n$, dépendant de $(y,y')$ de façon $H^s$, et positive au sens des noyaux sur $L^2(\mathbf{T}^n_y)$. On note $\mathcal{M} = M(u^\varepsilon)$.

L'hypothèse de régularité sur $(u^\varepsilon)$ permet alors de considérer la suite bornée de $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

$$v^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{ikx/\varepsilon}\hat{u}^\varepsilon(x,k) \tag{3.25}$$

où les $\hat{u}^\varepsilon(x,k)$ sont les coefficients de Fourier de $u^\varepsilon(x,\cdot)$. De (3.24), on déduit que

$$M(\hat{u}^\varepsilon(\cdot,k)) = \int \mathcal{M}(y,y')e^{ik(y-y')}\frac{dydy'}{(2\pi)^{2n}} := \hat{\mathcal{M}}(k), \tag{3.26}$$

et on note que $\hat{\mathcal{M}}(x,\xi,k).\langle k\rangle^{2s}$ est dans $\ell^2(\mathbf{Z}^n)$ pour la topologie vague sur $T^*\mathbf{R}^n$. Par ailleurs, en utilisant (3.6), on constate que, pour toute suite $(w^\varepsilon)$,

$$M(e^{ik.x/\varepsilon}w^\varepsilon)(x,\xi) = M(w^\varepsilon)(x,\xi - k)\ . \tag{3.27}$$

Supposons alors que, pour $k, \ell \in \mathbf{Z}^n$ distincts, on ait

$$\hat{\mathcal{M}}(x,\xi - k, k) \perp \hat{\mathcal{M}}(x,\xi-\ell,\ell). \tag{3.28}$$

Alors la proposition 3.3 et les estimations sur $\hat{\mathcal{M}}(x,\xi,k)$ et $\hat{u}^\varepsilon(x,k)$ pour $k \to \infty$ permettent de conclure que

$$M(v^\varepsilon) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \hat{\mathcal{M}}(x,\xi - k, k)\ . \tag{3.29}$$

## 4. Mesure des ondes de Bloch.

Nous pouvons maintenant décrire notre résultat pour le problème (S) envisagé au paragraphe 1. Indiquons tout d'abord les hypothèses sur la donnée de Cauchy $\psi_0^\varepsilon$. On suppose qu'il existe une famille $(u_0^\varepsilon)$ sur $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{T}_y^n$ telle que

$$\forall(\alpha,\beta)\in \mathbf{N}^{2n}\ ,\ |(\varepsilon D_x)^\alpha D_y^\beta u_0^\varepsilon|_{L^2} \le C_{\alpha,\beta} \tag{4.1}$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \iint_{|x|>R} |u_0^\varepsilon(x,y)|^2 dxdy \to 0 \quad \text{si} \quad R\to +\infty\ . \tag{4.2}$$

$$\psi_0^\varepsilon(x) = u_0^\varepsilon(x, \frac{x}{\varepsilon}). \tag{4.3}$$

L'hypothèse (4.1) peut évidemment être relaxée. Remarquons en tout cas qu'elle entraîne que $(\psi_0^\varepsilon)$ est $\varepsilon$-oscillante, et que (4.2) assure qu'elle est compacte à l'infini. On suppose, de plus, que, au sens de (3.24), $\mathcal{M}_0 = M(u_0^\varepsilon)$ existe et vérifie

$$\pi_\xi(tr\mathcal{M}_0) << d\xi \tag{4.4}$$

$$k,\ell\in\mathbf{Z}^n, k\neq\ell \Longrightarrow \pi_\xi(tr\mathcal{M}_0)(\xi-k)\perp \pi_\xi(tr\mathcal{M}_0)(\xi-\ell), \tag{4.5}$$

où $tr\mathcal{M}_0$ désigne la mesure positive et finie $\int_{\mathbf{T}^n}\mathcal{M}_0(y,y)dy$.

Voici deux exemples de suites $\psi_0^\varepsilon$ satisfaisant aux hypothèses ci-dessus.

**Exemple 1 :** On se donne $S\in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ telle que

$$\det(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(x)) \neq 0 \text{ p.p.}$$

et $a = a(x,y)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}^n)$. On pose

$$u_0^\varepsilon(x,y) = a(x,y)e^{iS(x)/\varepsilon}\ ,\ \psi_0^\varepsilon(x) = a(x,\frac{x}{\varepsilon})e^{iS(x)/\varepsilon}$$

Alors $\mathcal{M}_0(x,\xi,y,y') = a(x,y)\overline{a(x,y')}dx\delta(\xi - dS(x))$,

$$\pi_\xi(tr\mathcal{M}_0) = \iint dxdy|a(x,y)|^2\delta(\xi-dS(x))\ .$$

En dehors du fermé négligeable $F = \{\det\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j} = 0\}$, l'application $x\mapsto dS(x)$ est un difféomorphisme local, donc, si $E$ est de mesure nulle, $(dS)^{-1}(E)$ est de mesure nulle, ce qui entraîne (4.4).

Par ailleurs (4.5) est clairement satisfaite si le support de $a$ en $x$ est assez petit.

**Exemple 2.** Soit $f \in \cap_{s\in\mathbf{R}} H^s(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ ; on pose

$$\psi_0^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} f(x, \frac{x}{\varepsilon}) .$$

Soit $Q$ le cube unité $[0,1]^n$, et soit, pour $(x,z,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^n$,

$$\tilde{f}(x,z,y) = \int_Q e^{iz.\xi} \left( \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{ik.y} \hat{f}(x, \xi + k) \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}.$$

Alors $\psi_0^\varepsilon(x) = u_0^\varepsilon(x, \frac{x}{\varepsilon})$, avec $u_0^\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^{n/2}} \tilde{f}(x, \frac{x}{\varepsilon}, y)$, et

$$\mathcal{M}_0(x,\xi,y,y') = m(x,y,\xi)\overline{m(x,y',\xi)}\delta(x)d\xi \ ,$$

$$m(x,y,\xi) = 1_Q(\xi) \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} e^{ik.y} \hat{f}(x, \xi + k) \ ,$$

satisfait clairement (4.4), (4.5).

- Passons maintenant aux hypothèses sur l'opérateur $A(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + D_y)^2 + V(y)$. Pour simplifier, on supposera $V \in C^\infty(\mathbf{T}^n)$. L'opérateur $A(\xi)$ étant elliptique auto-adjoint sur $\mathbf{T}^n$, il admet une suite de valeurs propres

$$\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq \cdots \leq \lambda_j(\xi) \leq \cdots$$

répétées avec leur ordre de multiplicité. D'après les résultats de Wilcox [W], il existe, pour tout $j$, un fermé $F_j$ de mesure nulle en dehors duquel $\lambda_j$ est une fonction analytique réelle, et une fonction $\phi_j(y,\xi)$ mesurable telle que $A(\xi)\phi_j(\xi) = \lambda_j(\xi)\phi_j(\xi)$, $\int |\phi_j(y,\xi)|^2 dy = 1$, $\phi_j$ analytique en $\xi \notin F_j$, et de sorte que, pour $\xi$ en dehors de l'ensemble négligeable $F = \cup_{j=1}^\infty F_j$, la famille $(\phi_j(\xi))$ soit une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{T}^n)$. On trouvera par ailleurs une étude précisée des singularités des fonctions $\lambda_j$ dans l'article de C.Gérard [CG].

Pour simplifier l'énoncé du résultat, on fait l'hypothèse suivante :

(4.6) Pour tout $j$, l'ensemble des $\xi \in \mathbf{R}^n$ tels que $\lambda_j(\xi)$ soit de multiplicité au moins 2 est d'intérieur vide.

Ce résultat est évident en dimension $n = 1$, et, si $n = 2$, il est une conséquence des résultats récents de Feldman-Knörrer-Trubowitz [F-K-T] et Knörrer-Trubowitz [K-T]. En général, compte tenu de [F-K-T], (4.6) est reliée à l'irréductibilité de la variété de Bloch

$$S = \{(\xi,\lambda) \ , \ \lambda \ \text{ est une valeur propre de } \ A(\xi)\} \ .$$

- Notons que, compte tenu des résultats de Wilcox, (4.6) entraîne

(4.7) Pour tous $j,k$ distincts, $m\{\xi \in \mathbf{R}^n, \lambda_j(\xi) = \lambda_k(\xi)\} = 0$ .

- Par ailleurs, puisque $A(\xi)e^{iky} = e^{iky}A(\xi + k)$ pour $k \in \mathbf{Z}^n$, les fonctions $\lambda_j$ sont $\mathbf{Z}^n$-périodiques, et on peut également supposer que les $\phi_j(\xi)$ le sont. On a enfin le résultat de régularité suivant :

**Lemme 4.1.**— *Pour tout $j$, la fonction $\lambda_j$ est lipschitzienne.*

Soit $\sigma > 0$ assez grand pour que $V(y)+\sigma \geq c_0 > 0$, et soit $B(\xi) = (A(\xi)+\sigma)^{-1}$. Alors $B(\xi)$ est un opérateur compact autoadjoint positif, et ses valeurs propres $\mu_j = \lambda_j^{-1} - \sigma$ sont données par la formule du min-max

$$\mu_j(\xi) = \min_{F, \operatorname{codim} F = j-1} \max_{u \in F, \|u\|=1} \langle B(\xi)u, u \rangle \ , \tag{4.8}$$

où $\langle \ , \ \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbf{T}^n)$. On a $\|B(\xi)\| \leq \frac{1}{c_0}$ et $B'(\xi) = -B(\xi)A'(\xi)B(\xi)$. Or

$$\langle (A(\xi) + \sigma)u, u \rangle \geq \frac{1}{2}\|(D_y + \xi)u\|^2 = \frac{1}{2}\|A'(\xi)u\|^2.$$

Posant $u = B(\xi)v$, on en déduit

$$\frac{1}{2}\|A'(\xi)B(\xi)v\|^2 \leq \|v\| \ \|B(\xi)v\| \leq \frac{1}{c_0}\|v\|^2 \ ,$$

donc $\|B'(\xi)\| \leq \sqrt{\frac{2}{c_0^3}}$. La formule (4.6) montre alors que $\mu_j$ est un min-max de fonctions lipschitziennes bornées, de rapport de lipschitz borné, donc est lipschitzienne.

**Théorème.**— *Sous les hypothèses (4.1)...(4.6), la solution $\psi^\varepsilon(t)$ du problème (S), §1, admet une mesure semi-classique $\mu(t)$ continue en $t$ pour la topologie vague, donnée par*

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \ , \tag{4.9}$$

$$\partial_t \mu_j + \lambda_j'(\xi).\partial_x \mu_j = 0 \ , \ \pi_\xi(\mu_j(t)) \ll d\xi \ , \tag{4.10}$$

$$\mu_j(0, x, \xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} | \int \phi_j(y, \xi) e^{iky} \frac{dy}{(2M)^n} |^2 \langle \mathcal{M}_0(x, \xi - k)\phi_j(\xi), \phi_j(\xi) \rangle \ . \tag{4.11}$$

*De plus, la mesure semi-classique de $\psi^\varepsilon(t,x) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n)$ est*

$$\tilde{\mu}(t, x, \tau, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(t, x, \xi)\delta(\tau + \lambda_j(\xi)) \ . \tag{4.12}$$

*Enfin, on a*

$$\int_{T^*\mathbf{R}^n} \mu(t, dxd\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \|\psi^\varepsilon(t)\|^2_{L^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \|\psi_0^\varepsilon\|^2_{L^2} \ . \tag{4.13}$$

**Schéma de la démonstration :** En s'inspirant de Buslaev [B] et C.Gérard-Martinez-Sjöstrand [G-M-S], on définit $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x,y)$ par

$$\begin{cases} [\varepsilon D_t + \frac{1}{2}(\varepsilon D_x + D_y)^2 + V(y)]u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon_{|t=0} = u^\varepsilon_0. \end{cases}$$

Alors (4.1) et (4.2) entraînent, pour tout $t$ dans un compact de $\mathbf{R}$,

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n}, \forall d \in \mathbf{N}, \|(\varepsilon D_t)^d(\varepsilon D_x)^\alpha D_y^\beta u^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C_{\alpha,\beta,d} \tag{4.14}$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int\int_{|x|>R} |u^\varepsilon(t,x,y)|^2 dxdy \to 0 \quad \text{si} \quad R \to \infty \ , \tag{4.15}$$

et on a, par unicité de la solution de (S),

$$\psi^\varepsilon(t,x) = u^\varepsilon(t,x,\frac{x}{\varepsilon}) \ . \tag{4.16}$$

Pour $j = 1,2,\cdots$, on pose alors

$$u^\varepsilon_j(t,x) = \int \overline{\phi_j(y,\varepsilon D_x)} u^\varepsilon(t,x,y)dy \ , \tag{4.17}$$

de sorte que

$$(\varepsilon D_t + \lambda_j(\varepsilon D_x))u^\varepsilon_j = 0 \tag{4.18}$$

Notons que le lemme 3.7 (ii) et (4.4) entraînent que

$$M(u^\varepsilon_j(0))(x,\xi) = \langle \mathcal{M}_0(x,\xi)\phi_j(\xi), \phi_j(\xi)\rangle \ . \tag{4.19}$$

On peut donc appliquer la proposition 3.6 et conclure que

$$\partial_t M(u^\varepsilon_j(t)) + \lambda'_j(\xi).\partial_x M(u^\varepsilon_j(t)) = 0 \ , \tag{4.20}$$

$$\pi_\xi M(u^\varepsilon_j(t)) \ll \pi_\xi tr\mathcal{M}_0 \ll d\xi \tag{4.21}$$

$$M(u^\varepsilon_j) = M(u^\varepsilon_j(t)) \otimes \delta(\tau + \lambda_j(\xi)) \ . \tag{4.22}$$

D'autre part, la propriété de base orthonormale des $\phi_j$ permet de reconstruire $u^\varepsilon(t)$,

$$u^\varepsilon(t,x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\varepsilon D_x, y)u^\varepsilon_j(t,x) \ . \tag{4.23}$$

Compte tenu de (4.21), (4.22), (4.7), les termes de la somme (4.23) sont orthogonaux en $t,x$ au sens de la proposition 3.3. On en déduit que la mesure $\mathcal{M}(t,x,\tau,\xi,y,y')$ de $u^\varepsilon$ au sens de (3.24) est donnée par

$$\mathcal{M}(t,x,\tau,\xi,y,y') = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\xi,y)\overline{\phi_j(\xi,y')} M(u^\varepsilon_j(t))\delta(\tau + \lambda_j(\xi)) \tag{4.24}$$

Mais alors (4.21) et l'hypothèse (4.5) assurent que $\mathcal{M}$ vérifie (3.28). La suite $\psi^\varepsilon$ donnée par (4.16) a donc une mesure donnée par (3.29), ce qui est exactement (4.12). Les formules (4.9)...(4.11) s'en déduisent en intégrant en $\tau$, étant entendu que (4.23) assure que, pour tout $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $(a(x,\varepsilon D)u^\varepsilon(t,y), u^\varepsilon(t,y'))$ est équicontinue en $t$ à valeurs dans $H^s(\mathbf{T}^n_y \times \mathbf{T}^n_{y'})$ pour tous $s$. Enfin, (4.13) est conséquence de (4.14), (4.15) et du fait que $\|\psi^\varepsilon(t)\|_{L^2}$ ne dépend pas de $t$. ∎

**Corollaire 4.2.**— *Sous les hypothèses (4.1)...(4.6), on a pour tout* $t \in \mathbf{R}$ , $\psi^\varepsilon(t) \rightharpoonup 0$.

En effet, les formules (4.9), (4.10), entraînent que $\mu(t)$ ne charge pas $\{\xi = 0\}$.

Terminons en appliquant le théorème précédent à l'exemple 1. On obtient

$$(4.24) \qquad \int \varphi(x,\xi)\mu(t,dxd\xi) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\int \varphi(x+t\lambda_j'(dS(x)),dS(x)+k)m_{jk}(x)dx \ ,$$

$$(4.25) \qquad m_{jk}(x) = |\int_{\mathbf{T}^n}\phi_j(y,dS(x))e^{iky}\frac{dy}{(2n)^n}|^2|\int_{\mathbf{T}^n} a(x,y)\overline{\phi_j(y,dS(x))dy}|^2,$$

et la limite de $|\psi^\varepsilon(t,x)|^2$ s'obtient en prenant l'image directe de $\mu(t)$ par $\pi_x$. On obtiendrait le même résultat en utilisant formellement (2.12).

## 5. Extensions.

On peut montrer que l'analyse ci-dessus reste valable si l'on perturbe $V(\frac{x}{\varepsilon})$ par $\varepsilon W(x,\frac{x}{\varepsilon})$ où $W = W(x,y)$ est périodique en $y$. Le système (4.18) devient alors couplé entre les $u_j^\varepsilon$ à l'ordre $\varepsilon$, mais (3.12) prouve que les $u_j^\varepsilon$ sont presque orthogonales en $(t,x)$. On obtient donc encore une équation du type (4.10), modifiée par un facteur d'ordre 0.

En revanche, la généralisation à un potentiel du type $V(x,\frac{x}{\varepsilon})$ ou à un hamiltonien avec champ magnétique (remplacer $\varepsilon D_x$ par $\varepsilon D_x + A(x)$) semble plus délicate pour deux raisons essentielles :

- un problème de quantification : les fonctions $\lambda_j$ sont alors des fonctions lipschitziennes de $(x,\xi)$ et il n'est pas évident de leur associer des opérateurs $\lambda_j(x,\varepsilon D)$ uniformément bornés sur $L^2$ et jouissant d'un calcul symbolique acceptable.

- un problème de géométrie : les équations de transport (4.10) auxquelles on s'attend sont difficiles à interpréter.

**Remerciements :** Je tiens à remercier Christian Gérard pour ses précieuses informations à propos du spectre de Bloch.

**Note :** P.L. Lions m'a appris tout récemment qu'il venait d'obtenir, par une autre méthode, le résultat d'existence de la mesure $\mu$ (proposition 3.1), dans un travail en collaboration avec T. Paul.

## Bibliographie

[BLP] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for periodic structures, North Holland, 1978.

[BFM] S. Brahim-Ostmane, G. Francfort, F. Murat, Correctors for the homogenization of the wave and heat equations, Publication Analyse Numérique, Paris VI, à paraître au J. Math. pures et appl.

[B] V.S. Buslaev, Semiclassical approximation for equations with periodic coefficients, Russian Math. Surveys, 42 (1987), 97-125.

[FKT] J. Feldman, H. Knörrer, E. Trubowitz, The perturbatively stable spectrum of a periodic Schrödinger operator, Inventiones Math. 100 (1990), 259-300.

[FM] G. Francfort, F. Murat, Oscillations and Energy Densities in the wave equation, à paraître.

[CG] C. Gérard, Resonance Theory for periodic Schrödinger Operators, Bull. Soc. Math. France, 118 (1990), 27-54.

[GMS] C. Gérard, A. Martinez, J. Sjöstrand, A Mathematical Approach to the Effective Hamiltonian in Perturbed Periodic Problems, Prépublication Orsay et article à paraître.

[PG1] P. Gérard, Compacité par compensation et régularité deux-microlocale, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles 1988-1989, Ecole Polytechnique.

[PG2] P. Gérard, Microlocal Defect Measures, à paraître aux Comm. Part. Diff. Equations.

[PG3] P. Gérard, Microlocal Analysis of Compactness, Séminaire de Mathématiques Appliquées 1989-1990, Collège de France, à paraître.

[GRT] J.C. Guillot, J. Ralston, E. Trubowitz, Semi-classical Approximations in solid State Physics, Comm. Math. Phys. 116 (1988), 401-415.

[KT] H. Knörrer, E. Trubowitz, A directional compactification of the complex Bloch variety, Comm. Math. Helvetici 65 (1990), 114-149.

[R] D. Robert, Autour de l'approximation semi-classique, Progress in Mathematics n°68, Birkhaüser, 1987.

[T] L. Tartar, $H$-measures, a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations, Proc. Roy. Soc. Ed., 114 A (1990).

[W] C.H. Wilcox, Theory of Bloch waves, Journal d'Analyse Mathématique, 33 (1978), 146-167.

Patrick Gérard

Université de Paris-Sud

Département de Mathématiques

91405 ORSAY CEDEX

# ERRATUM DE L'EXPOSE XVI

## P. GERARD

page 7 ligne 5 :

lire $j = 0, \cdots, m$

au lieu de

$j = 1, \cdots, m$

Formule (3.10) lire :

$$\sum_{j=0}^{m}$$

au lieu de

$$\sum_{j=1}^{m}$$