Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. David

Rectifiabilité quantifié et le problème du voyageur de commerce

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 14, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A14_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

RECTIFIABILITE QUANTIFIE ET LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE

G. DAVID

Exposé n° XIV

22 Janvier 1991

RECTIFIABILITE QUANTIFIE ET LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE

Guy DAVID

1. Introduction

Le but de cet exposé est de présenter un résultat de P. Jones [Jn2] et quelques uns de ses développements. Le thème central sera l'utilisation de quantités mesurant la rectifiabilité d'un ensemble E pour obtenir d'autres informations, géométriques ou analytiques, sur E.

Dans ce qui suit, E sera un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, que l'on pourra sans dommage supposer fermé. On se donnera également un entier $d \leq n$ (moralement, la dimension de E), et l'on notera Λ^d la mesure de Hausdorff d-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^n$.

Commençons par rappeler quelques notions de théorie de la rectifiabilité qui éclaireront notre démarche. Pour simplifier, nous supposerons que E est fermé, et que $\Lambda^d(E \cap B)$ est fini pour toute boule B.

Définition 1. *Soit E comme ci-dessus. Nous dirons que E est rectifiable (de dimension d) s'il existe un nombre au plus dénombrable d'applications lipschitziennes $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, et un ensemble E_0 tel que $\Lambda^d(E_0) = 0$, tels que*

$$E \subset E_0 \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^d) \right\}. \tag{1}$$

Signalons que la définition ci-dessus n'est que l'une des multiples définitions équivalentes possibles. La définition la plus classique demande l'égalité, en presque tout point $x \in E$, des densités supérieure et inférieure de E au point x (autrement dit, l'analogue du théorème de différentiabilité de Lebesgue). On peut également demander que E soit recouvert, modulo un ensemble négligeable E_0, par une union dénombrable de graphes lipschitziens (au lieu d'images lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$), ou même de surfaces d-dimensionnelles de classe C^1.

Tout ensemble E comme ci-dessus a une décomposition $E = E_1 \cup E_2$, où E_1 est rectifiable, et E_2 est "irrégulier" (ou encore "totalement non-rectifiable") ce qui signifie que $\Lambda^d(E_2 \cap F) = 0$ pour tout ensemble rectifiable F. Les ensembles E_1 et E_2 ont des comportements opposés à bien des égards. Par exemple, E_1 admet un d-plan tangent en presque tout point (nous omettons la définition précise), alors que E_2 n'a de plan tangent en presque aucun point.

Un exemple typique d'ensemble irrégulier est l'ensemble de Cantor de dimension 1 contenu dans $\mathbb{R}^2$ obtenu en faisant le produit de deux ensembles de Cantor de dimension 1/2 contenus dans $\mathbb{R}$. L'absence de tangentes saute alors aux yeux.

Les propriétés dont nous venons de parler ne sont qu'un petit morceau de la théorie de la rectifiabilité. Nous invitons le lecteur à consulter [Fa], [Ma], ou carrément [Fe] pour en savoir plus.

Disons quelques mots de nos motivations initiales. Pour l'essentiel, il s'agissait de décider pour quels ensembles E certaines intégrales singulières définissent un opérateur borné sur $L^2(E)$ (E est muni d'une mesure, par exemple la restriction de Λ^d à E). Les exemples connus (graphes lipschitziens pour les résultats positifs, ensembles de Cantor pour les résultats négatifs) suggèrent que la notion de rectifiabilité devrait jouer un rôle important. Toutefois, la rectifiabilité d'un ensemble n'est pas quelque chose de quantitatif: une union dénombrable d'ensembles rectifiable est encore rectifiable. C'est ennuyeux, car la continuité sur L^2 d'opérateurs d'intégrales singulières, elle, est quantitative. Ceci justifie l'idée d'essayer de mesurer la rectifiabilité d'un ensemble de manière aussi précise que possible.

Dans ce contexte, la première tentative de ce type est due, je crois, à P. Jones [Jn1]. La manière dont il mesure la rectifiabilité de E (c'est-à-dire, finalement, son écart avec les plans affines de dimension d) est la suivante. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout rayon $t > 0$, il pose

$$\beta(x,t) = \inf_P \left\{ \sup_{y \in E \cap B(x,t)} \frac{\operatorname{dist}(y,P)}{t} \right\}, \tag{2}$$

où la borne inférieure est prise sur tous les d-plans affines P. Lorsque $E \cap B(x,t) = \emptyset$, on prend naturellement $\beta(x,t) = 0$.

Grâce au facteur t au dénominateur, $\beta(x,t)$ mesure l'écart entre $E \cap B(x,t)$ et le d-plan le plus proche de manière invariante par dilatations.

Lorsque E est rectifiable, on s'attend à ce que $\lim\limits_{t \to 0} \beta(x,t) = 0$ pour presque tout $x \in E$, mais l'idée de P. Jones est de donner quand c'est possible des estimations plus précises sur certaines intégrales faisant intervenir $\beta(x,t)$.

2. Le voyageur de commerce

Plaçons-nous pour l'instant en dimension $d = 1$, et soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble, que nous supposerons d'abord fini.

L'une des versions du problème classique du voyageur de commerce consiste à chercher un algorithme rapide qui donne une courbe Γ contenant E, dont la longueur $\Lambda^1(\Gamma)$ soit minimale. Ce n'est pas de ce problème que nous parlerons.

Soyons moins exigeant, et demandons-nous s'il existe un algorithme (rapide) qui donne une courbe $\Gamma_0 \supset E$ telle que $\Lambda^1(\Gamma_0) \leq C \inf\limits_{\Gamma \supset E} \Lambda^1(\Gamma)$. Ce problème n'a de sens que si la constante C n'est plus autorisée à dépendre du nombre de points de E, et par conséquent l'on peut tout aussi bien prendre un ensemble E infini. On peut supposer que E est fermé, car de toute façon son adhérence sera contenue dans Γ.

Lorsque E est infini, il n'y a plus de raison qu'il existe une courbe Γ de longueur finie qui contienne E. Une condition évidemment nécessaire est que $\Lambda^1(E)$ soit fini, mais cela n'est pas suffisant, puisqu'il faut également que E soit rectifiable.

Théorème 2 [Jn2],[Ok]. *Soit E un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une courbe $\Gamma \supset E$ de longueur finie si et seulement si le nombre*

$$\beta(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t=0}^{\mathit{diam}\, E} \beta(x,t)^2 \frac{dx\, dt}{t^n}$$

est fini. De plus, si c'est le cas, on a

$$C^{-1}\{\beta(E) + \mathit{diam}\, E\} \leq \inf_{\Gamma \supset E} \Lambda^1(\Gamma) \leq C\{\beta(E) + \mathit{diam}\, E\}, \tag{3}$$

où bien sûr l'inf porte sur les courbes Γ contenant E, et la constante C ne dépend pas de E.

Le fait que la condition $\beta(E) < +\infty$ est suffisante, ainsi que la réciproque en dimension ambiante $n = 2$, sont dus à P. Jones. Kate Okikiolu a établi la réciproque quand $n > 2$, et sa démonstration est également plus naturelle lorsque $n = 2$. Signalons que la démonstration de P. Jones donne aussi un algorithme rapide pour construire une courbe $\Gamma_0 \supset E$ telle que $\Lambda^1(\Gamma_0) \leq C(\beta(E) + \operatorname{diam} E)$.

Il convient de faire quelques remarques sur ce théorème. La première apparition des $\beta(x,t)$ est dans [Jn1], où le fait que $\beta(E) < +\infty$ est établi lorsque E est un (morceau de) graphe lipschitzien. Cette estimation des $\beta(x,t)$ permet notamment à Jones de donner une nouvelle démonstration de la continuité sur $L^2(E)$ de l'opérateur de Cauchy lorsque E est un graphe lipschitzien (le théorème de Coifman, McIntosh et Meyer [CMM]). Très grossièrement, l'idée est de majorer, à l'aide d'une fonction d'aire, l'erreur qu'on fait en remplaçant E par une droite à chaque échelle.

Le théorème 2 a d'autres applications, très jolies, mais que nous ne pourrons pas expliquer ici. La caractérisation des courbes régulières en fonction des $\beta(x,t)$ (voir plus bas) permet notamment à C. Bishop et P. Jones de prouver des estimations sur la mesure harmonique de l'intersection du bord d'un domaine simplement connexe (mais aussi horrible qu'on veut) avec une courbe régulière. Voir [BJ], qui sera complété par une publication ultérieure des mêmes auteurs.

3. Le voyageur de commerce à plusieurs dimensions

Comment généraliser le théorème 2 à des dimensions $d > 1$? Si l'on veut que la question ait encore un sens pour des ensembles finis, on ne peut se contenter de minimiser l'aire d'une surface Γ passant par E : l'infimum est nul, car on peut par exemple joindre les points de E par quelques tubes très fins. On peut rendre le problème plus raisonnable, par exemple en exigeant que Γ n'ait pas trop de courbure. Ce que nous ferons ici est d'exiger que Γ ait un paramétrage aussi sympathique que possible.

Voici donc un problème qui semble intéressant : étant donné un ensemble fini E, chercher une fonction f, définie sur le cube unité Q_0 de $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que $f(Q_0) \supset E$, et telle que $\| \nabla f \|_\infty$ soit minimal. Noter que, lorsque $d = 1$, on retrouve le problème du voyageur de commerce (on se contente de paramétrer la courbe Γ à vitesse constante).

Comme lorsque $d = 1$, on peut aussi se borner à chercher le minimum de $\| \nabla f \|_\infty$, à une constante près, mais pour un ensemble E peut-être infini. Le premier problème est alors de décider pour quels ensembles E il est possible de trouver une fonction lipschitzienne $f : Q_0 \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(Q_0) \supset E$.

Contrairement au cas de la dimension 1, le choix de la norme $\| \nabla f \|_\infty$ ne s'impose pas, et il est possible que d'autres normes conviennent mieux (un exemple possible est une norme $\| \nabla f \|_p$, où $p > d$ est préférable à cause de Sobolev).

Nous n'insisterons pas beaucoup plus, car malheureusement nous n'avons pas la moindre idée pour résoudre ces problèmes. Nous donnerons, plus loin dans l'exposé, des versions avec une plus forte invariance par les dilatations, pour lesquelles on pourra dire quelque chose.

4. Ensembles Ahlfors-réguliers.

Définition 3. *Un ensemble Ahlfors-régulier de dimension d (nous dirons simplement régulier) est un ensemble fermé E tel qu'il existe une mesure μ portée par E et une constante $C > 0$ avec*

$$C^{-1}r^d \leq \mu(E \cap B(x,r)) \leq Cr^d \tag{4}$$

pour tout $x \in E$ et $r > 0$.

Nous avons introduit la mesure μ pour que notre définition ne fasse pas intervenir la mesure de Hausdorff Λ^d. Malgré tout, si μ est une mesure vérifiant (4), il est assez facile de voir que μ est équivalente à la restriction à E de Λ^d, de sorte qu'on aurait pu prendre directement $\mu = \Lambda^d_{|E}$.

La condition (4) intervient naturellement quand on étudie la continuité sur $L^2(E, d\mu)$ de certains opérateurs d'intégrale singulière. La seconde inégalité de (4) est alors nécessaire, alors que la première inégalité est bien utile pour appliquer les technique de Calderón-Zygmund (si (4) est vérifiée, E est un espace de type homogène à la Stein et Weiss). Dans un tel cadre, il est logique de demander un contrôle de $E \cap B(x,r)$ pour toute boule $B(x,r)$: si un noyau singulier définit un opérateur borné sur E, il en est de même (avec la même norme) pour $E \cap B(x,r)$. Bien que ce soit une motivation importante pour le sujet de cet exposé, nous essaierons de parler le moins possible d'intégrales singulières. Signalons toutefois que, si Γ est une courbe rectifiable du plan complexe, le noyau de Cauchy définit un opérateur borné sur $L^2(\Gamma)$ si et seulement si Γ est une courbe régulière (c'est-à-dire si $\Lambda^1(\Gamma \cap B(x,r)) \leq Cr$ pour toute boule $B(x,r)$).

Donnons maintenant une version du théorème 2 dans le cadre des ensembles reguliers. Pour des raisons d'invariance par dilatations et intersections avec des boules, il faut s'attendre à devoir utiliser des mesures de Carleson.

Définition 4. *Soit ν une mesure positive sur $E \times \mathbb{R}^*_+$. Nous dirons que ν est une mesure de Carleson s'il existe une constante C telle que*

$$\nu([E \cap B(x,r)] \times]0,r]) \leq Cr^d \tag{5}$$

pour tout $x \in E$ et tout $r \geq 0$.

Théorème 5 [Jn2]. *Soit E un ensemble régulier de dimension 1. Alors il existe une courbe régulière Γ contenant E si et seulement si*

$$\beta(x,t)^2 \frac{d\mu(x)dt}{t} \tag{6}$$

est une mesure de Carleson sur $E \times \mathbb{R}_+^*$.

Si l'on applique brutalement le théorème 2, on obtient seulement que (6) implique que, pour toute boule $B(x,r)$, il existe une courbe $\Gamma(x,r)$ de longueur $\leq Cr$ et telle que $\Gamma(x,r) \supset E \cap B(x,r)$. Ceci dit, la démonstration de [Jn2] donne une seule courbe Γ tout aussi aisément.

5. Retour à la dimension d > 1

Nous avons énoncé le théorème 5 surtout parce qu'il est plus facile à généraliser. Enonçons un résultat dès maintenant ; les définitions nécessaires seront données juste après.

Théorème 6 [DS1]. *Pour un ensemble régulier de dimension d, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(7) *Il existe une surface ω-régulière Γ qui contient E ;*
(8) *Il existe des constantes $\theta > 0$ et $M \geq 0$ telles que, pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, on puisse trouver une application M-lipschitzienne $z\ :\ [0,r]^d \to \mathbb{R}^n$ telle que*

$$\Lambda^d\{E \cap B(x,r) \cap z([0,r]^d)\} \geq \theta r^d \ ;$$

(9) *$\beta_q(x,t)^2 \frac{d\mu(x)dt}{t}$ est une mesure de Carleson (ceci vaut pour $1 \leq q < \frac{2d}{d-2}$ lorsque $d \geq 2$, pour $1 \leq q < +\infty$ lorsque $d = 1$) ;*
(10) *toutes les intégrales singulières d'un certain type définissent des opérateurs bornés sur $L^2(E, d\mu)$.*

Dans la condition (7), une surface ω-régulière est un ensemble de la forme $\Gamma = z(\mathbb{R}^d)$, où le paramétrage z a les propriétés suivantes. Il existe un poids ω dans la classe $A_1(\mathbb{R}^d)$ de Mückenhoupt [c'est-à-dire tel que $\int_B \omega(x)dx \leq C \mid B \mid (\inf_B \operatorname{ess} \omega)$ pour toute boule] tel que l'application z vérifie $\mid \nabla z \mid \leq C\omega^{1/d}$ d'une part, et $\int_{\{x:z(x)\in B\}} \omega(x)dx \leq C$ rayon(B) pour toute boule B de l'espace ambiant d'autre part. Pour des raisons techniques, on a besoin dans la démonstration d'un peu d'espace supplémentaire, et on obtient un paramétrage $z\ :\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n+1}$. Retenons surtout que les surfaces ω-régulières sont des ensembles qui admettent un paramétrage convenable, tout comme les courbes régulières en dimension 1.

La condition (8) est une version locale plus faible de (7). On demande qu'à chaque échelle, le voyageur de commerce multidimensionnel puisse visiter un pourcentage fixé de sa clientèle. On peut également demander, dans cette condition, que la fonction z soit bilipschitzienne, à condition toutefois d'autoriser z à avoir des valeurs dans $\mathbb{R}^{2d+1}$ si $n < 2d+1$.

Pour la condition (9), on a dû modifier légèrement la fonction $\beta(x,t)$ définie en (2), et prendre la fonction

$$\beta_q(x,t) = \inf_P \left\{ t^{-d} \int_{E\cap B(x,t)} [t^{-1}\operatorname{dist}(y,P)]^q d\mu(y) \right\}^{1/q} \tag{11}$$

qui est mieux adaptée, compte tenu des injections de Sobolev.

L'équivalence entre (9) et les conditions précédentes donne un analogue du théorème 5.

Les intégrales singulières mentionnées en (10) sont données par des formules du type

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_E K(x-y)f(y)d\mu(y), \tag{12}$$

où K est une fonction impaire, C^∞, définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et dont les dérivées successives vérifient $|\nabla^k K(x)| \leq C_k |x|^{-d-k}$. L'un des ennuis avec le théorème 6 est que, dans (10), la continuité de tous les opérateurs de type (12) est requise [on préférerait que la continuité de l'opérateur de Cauchy, par exemple, suffise].

6. Autres conditions

On peut énoncer d'autres conditions équivalentes à celles du théorème 6. Nous ne souhaitons pas en donner une liste complète, mais nous allons décrire quelques autres moyens de mesurer la rectifiabilité d'un ensemble E.

Dans ce contexte, il est utile de garder à l'esprit certains moyens d'étudier la régularité des fonctions. Ainsi, utiliser les $\beta(x,t)$ correspond à contrôler une fonction par la manière dont elle peut être approximée par des fonctions affines. Dans le cas où E est le graphe d'une fonction lipschitzienne A, par exemple, les $\beta(x,t)$ sont équivalents aux nombres

$$\gamma(x,t) = \inf_{a \text{ affine}} \left\{ t^{-1} \sup_{y \in B(x,t)} |A(y) - a(y)| \right\},$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des fonctions affines a. L'étude de la régularité de A en fonction des $\gamma(x,t)$ est classique (voir [Do]).

Voici deux nombres qui mesurent également l'écart entre E et un espace affine :

$$Sy(x,t) = t^{-1} \sup_{y,z \in E \cap B(x,t)} \text{dist}(2y - z, E) \tag{13}$$

et

$$Cv(x,t) = t^{-1} \sup_{y,z \in E \cap B(x,t)} \text{dist}\left(\frac{y+z}{2}, E\right). \tag{14}$$

Le nombre $Sy(x,t)$ (resp. $Cv(x,t)$) mesure à quel point E est, près de $B(x,t)$, symétrique par rapport à chacun de ses points (resp. convexe). Noter que, pour un ensemble E régulier de dimension d, il est facile de vérifier que $Sy(x,t) \equiv 0$ (resp. $Cv(x,t) \equiv 0$) entraîne que E est un d-plan affine. Noter aussi qu'en termes d'étude de fonctions, $Sy(x,t)$ et $Cv(x,t)$ ont pour analogue une borne supérieure de secondes différences du type

$$d(x,t) = \frac{2A(x) - A(x+t) - A(x-t)}{t}.$$

Les conditions équivalentes du théorème 6 entraînent également que $Sy_q(x,t)^2 \frac{d\mu(x)dt}{t}$ et $Cv_q(x,t)^2 \frac{d\mu(x)dt}{t}$ sont des mesures de Carleson, où q est dans le même intervalle que pour la condition (9), et où Sy_q et Cv_q sont obtenus à partir de Sy et Cv en remplaçant le sup par une moyenne d'ordre q. La réciproque est également vraie, mais nous verrons au prochain paragraphe qu'on peut faire mieux.

Donnons une dernière manière de mesurer la régularité de E, cette fois en termes proches de la théorie de Littlewood-Paley. Pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ impaire, notons $\psi_t(x) = t^{-d}\psi(\frac{x}{t})$, puis $\psi_t * \mu(x) = \int_E \psi_t(x-y)d\mu(y)$. Les conditions du théorème 6 sont également équivalentes à la condition

(15) Pour toute fonction impaire $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, la mesure $\mid \psi_t * \mu(x) \mid^2 \dfrac{d\mu(x)dt}{t}$ est une mesure de Carleson.

Commentaire : il est assez classique de mesurer la régularité d'une fonction f par la taille des $\psi_t * \mu$. Ce qui est amusant ici est que $\psi_t * \mu(x)$ n'est pas spécialement petit, même quand E est un d-plan, hors de E : la cancellation a lieu lorsque $x \in E$ et E ressemble à un d-plan, et ceci à cause de l'imparité de ψ. Notons aussi l'un des défauts du résultat : on a besoin de beaucoup de fonctions ψ pour obtenir (7)-(10) à partir de (15).

7. Conditions "faibles"

Pour énoncer ces conditions, il sera plus facile d'utiliser le vocabulaire suivant :

Définition 7. *Nous appellerons ensemble de Carleson un ensemble $\mathcal{A} \subset E \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathbb{1}_E(x,t)\frac{d\mu(x)dt}{t}$ soit une mesure de Carleson.*

En d'autres termes, la mesure pour $\frac{d\mu(x)dt}{t}$ de $\mathcal{A} \cap (B(x,r) \times]0,r])$ est $\leq Cr^d$. comme $\frac{d\mu dt}{t}$ n'est pas finie, c'est une manière précise de demander que l'évènement $(x,t) \in \mathcal{A}$ soit relativement rare.

Nous pouvons maintenant énoncer quelques propriétés faibles. Nous dirons que E "vérifie un lemme géométrique faible" (ou, en abrégé, $E \in LGF$) s'il est régulier de dimension d et si, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\mathcal{A}(\epsilon) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}_+^* \ : \ \beta(x,t) > \epsilon\}$ est un ensemble de Carleson. Le nom vient de ce que la condition (6) du théorème 5 est appelée "lemme géométrique" dans [Jn1] ; la condition que nous venons d'énoncer est nettement plus faible, car (6) implique que $\mathcal{A}(\epsilon)$ est un ensemble de Carleson avec une constante de l'ordre de ϵ^{-2} (alors que $E \in LGF$ ne nous dit rien de la croissance en ϵ de la constante de Carleson de $\mathcal{A}(\epsilon)$).

Le "lemme géométrique faible" est apparu assez naturellement, car il s'agit d'une condition auxiliaire très pratique (voir par exemple [DS2]). Cependant, il n'entraîne pas, à lui seul, que E est rectifiable.

Définition 8. *Soit E un ensemble régulier. Nous dirons que E est faiblement symétrique (resp. faiblement convexe) si pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\mathcal{B}(\epsilon) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}_+^* \ : \ Sy(x,t) > \epsilon\}$ (resp. l'ensemble $\mathcal{C}(\epsilon) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}_+^* \ : \ Cv(x,t) > \epsilon\}$) est un ensemble de Carleson.*

Les conditions de symétrie faible et de convexité faible sont effectivement plus faibles (en apparence) que les conditions quadratiques évoquées plus haut. La surprise est que, contrairement à ce qui se passe avec le lemme géométrique faible, elles sont encore équivalentes.

Théorème 9 [DS3]. *Si E est un ensemble régulier de dimension d, les conditions (7)-(10) du théorème 6 sont satisfaites si et seulement si E est faiblement symétrique, et si et seulement si E est faiblement convexe.*

En fait, on n'a besoin du fait que l'ensemble $\mathcal{B}(\epsilon)$, ou $\mathcal{C}(\epsilon)$, soit un ensemble de Carleson que pour une seule valeur de ϵ (qui dépend de d, de n, et des constantes de régularité). Malgré tout, comme on ne connaît pas trop ϵ, il est aussi simple de demander que $\mathcal{B}(\epsilon)$ ou $\mathcal{C}(\epsilon)$ soit un ensemble de Carleson pour tout ϵ (et de toute façon, c'est le cas).

L'analogie avec l'étude des fonctions ne semble plus marcher ici. En fait, il semble que la condition importante soit que E n'ait pas de trous trop nombreux (ce qui est impossible si E est faiblement convexe ou faiblement symétrique). En dimension $d = 1$, les choses sont encore plus claires de ce point de vue, puisqu'on a le résultat suivant.

Théorème 10 [DS3]. *Un ensemble régulier de dimension 1 est contenu dans une courbe régulière si et seulement si il est "faiblement connexe".*

Pour définir la faible connexité, donnons-nous une (grande) constante M, et soit $\mathcal{G}(M)$ l'ensemble des points $(x,t) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $y \in E \cap B(x,t)$ tel que $| y - x | \geq \frac{t}{2}$, on puisse trouver une chaîne de points $y_0 = x$, y_1, $y_2, \cdots y_N = y$, de longueur $N \leq M$, et telle que $y_i \in E$ pour tout i et $| y_{i+1} - y_i | \leq \frac{9}{10} | x - y |$ pour $i = 0, \cdots, N-1$. L'ensemble régulier E de dimension 1 sera dit faiblement connexe s'il existe $M > 0$ tel que le complémentaire de $\mathcal{G}(M)$ soit un ensemble de Carleson.

La démonstration du théorème 10 est étonnamment simple. En gros, on se contente de relier entre eux tous les couples de points qui ne sont pas déjà reliés par une chaîne de points de E, et on constate qu'on n'a pas dû ajouter trop de masse, et que le résultat obtenu est connexe. Malheureusement, rien de si simple ne semble marcher en dimension $d > 1$.

Références bibliographiques

[BJ] C. BISHOP & P. JONES Harmonic measure and arclength. *Ann. of Math.*, to appear.

[CMM] R. R. COIFMAN, A. McINTOSH & Y. MEYER L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes. *Ann. of Math.* 116 (1982), 361-387.

[DS1] G. DAVID & S. SEMMES *Singular integrals on surfaces : Au-delà des graphes lipschitziens.* Astérisque, SMF, à paraître.

[DS2] G. DAVID & S. SEMMES Quantified rectifiability and Lipschitz mappings. Preprint.

[DS3] G. DAVID & S. SEMMES manuscrits.

[Do] J. R. DORRONSORO A characterization of potentials spaces. *Proc. A.M.S.* 95 (1985), 21-31.

[Fa] K. FALCONER *The geometry of fractal sets.* Cambridge Univ. Press, 1984.

[Fe] H. FEDERER *Geometric measure theory.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 153, Springer-Verlag 1963.

[Jn1] P. JONES Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure. Proc. Conf. on Harmonic analysis and partial differential equations, El Escorial 1987 (ed. J. Garcia-Cuerva), pp. 24-68. *Springer-Varlag, Lecture notes in math.* 1384 (1989).

[Jn2] P. JONES Rectifiable sets and the traveling salesman problem. *Inventiones Mathematicae* 102 (1990), 1-16.

[Ok] K. OKIKIOLU Characterization of subsets of rectifiable curves in $\mathbb{R}^n$. Preprint.

[Ma] P. MATTILA *Lecture notes on geometric measure theory.* Universidad de Extramadura (Espagne), 1986.

Guy DAVID
Département de Mathématiques
Université Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX