Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

Pierre Schapira
Jean-Pierre Schneiders

Finitude et classes caractéristiques pour les D-modules et les faisceaux constructibles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n° 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A21_0>

CENTRE DE MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FINITUDE ET CLASSES CARACTERISTIQUES POUR LES D-MODULES ET LES FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

Pierre SCHAPIRA et Jean-Pierre SCHNEIDERS

Exposé n°XIX

24 Avril 1990

Finitude et classes caractéristiques pour les D-modules et les faisceaux constructibles

PIERRE SCHAPIRA JEAN-PIERRE SCHNEIDERS

0. Introduction. Soit M une variété analytique réelle, X un complexifié de M, $\mathcal{M}$ un système d'équations aux dérivées partielles sur X, i.e. un module cohérent sur l'anneau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels sur X. Il est bien connu que si $\mathcal{M}$ est elliptique sur M, i.e. la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ ne rencontre pas de fibré conormal à M dans X hors de la section nulle :

$$\text{(0.1)} \qquad \mathrm{char}(\mathcal{M}) \cap T^*_M X \subset T^*_X X$$

alors les solutions hyperfonctions du système $\mathcal{M}$ sont des fonctions analytiques, ce que traduit l'isomorphisme :

$$\text{(0.2)} \qquad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_M) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M).$$

Si de plus M est compact, on en déduit la finitude des espaces $Ext^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)$. La somme alternée des dimensions de ces espaces, $\chi(M, \mathcal{M}, \mathcal{B}_M)$, est alors calculée par des invariants topologiques ; c'est le théorème de Atiyah-Singer [A-S].

Ces résultats admettent diverses généralisations. En particulier, on peut remplacer la variété M par un ouvert Ω relativement compact de X à frontière lisse, non caractéristique pour $\mathcal{M}$. La finitude est alors obtenue par Bony-Schapira [B-S] et l'équivalent du théorème de Atiyah-Singer par Boutet de Monvel et Malgrange, cf. [B], (ces travaux s'étendent au cas relatif [H-S],[B-M]). Il existe bien d'autres variantes. On peut traiter le cas d'un ouvert relativement compact d'une variété réelle à frontière hyperbolique pour $\mathcal{M}$ (cf. [B]), le cas où $\mathcal{M}$ est à support compact dans X (cf. Angeniol-Lejeune [A-L]) qui contient comme cas particulier celui des faisceaux $\mathcal{O}_X$-cohérents: si G est un tel faisceau, on considère $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} G$, (cf. O'Brian-Toledo-Tong [O-T-T]). On peut aussi adapter à ce cadre l'étude des modules holonômes (cf. Kashiwara [K1]). On peut enfin considérer les faisceaux constructibles sur une variété réelle (cf. Kashiwara [K4]) ; il n'y a plus alors d'opérateurs différentiels.

Nous nous proposons de donner ici un cadre permettant un traitement unifié de ces résultats.

1. Notations et rappels. Soit X une variété analytique réelle. On désigne par $\pi : T^*X \longrightarrow X$ son fibré cotangent. Si M est une sous-variété, on note $T^*_M X$ son fibré conormal. En particulier $T^*_X X$ désigne la section nulle. On notera $\delta : \Delta \hookrightarrow X \times X$ l'immersion diagonale et l'on identifiera T^*X à $T^*_\Delta(X \times X)$ par la première projection définie sur $T^*(X \times X) \simeq T^*X \times T^*X$. Si Λ est une partie de T^*X, on note Λ^a son image par l'application antipodale.

On notera $D(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de $\mathbf{C}$-vectoriels, et $D^b(X)$ (resp. $D^b_{\mathbf{R}-c}(X)$) la sous-catégorie pleine formée des objets à cohomologie bornée (resp. bornée et $\mathbf{R}$-constructible). Rappelons qu'un faisceau F est $\mathbf{R}$-constructible sur X s'il existe une stratification sous-analytique $X = \bigsqcup_{\alpha} X_\alpha$ telle que $F|_{X_\alpha}$ soit localement constant de rang fini pour tout α.

A F objet de $D^b(X)$, on associe ([K-S1], [K-S2]) son micro-support $SS(F)$. C'est un fermé conique involutif de T^*X et si F est $\mathbf{R}$-constructible c'est aussi un ensemble sous-analytique isotrope.

On note or_X le faisceau d'orientation sur X et ω_X ($\simeq or_X[dimX]$) le complexe dualisant. Si $F \in Ob(D^b(X))$ on pose :

$$D'F = R\mathcal{H}om(F, \mathbf{C}_X),$$
$$DF = R\mathcal{H}om(F, \omega_X).$$

Enfin si M est une sous-variété fermée de X, on note μ_M le foncteur de microlocalisation de Sato. Rappelons que μ_M envoie $D^b(X)$ dans $D^b(T^*_M X)$.

Soit maintenant X une variété complexe de dimension n. On identifiera souvent X à $X^{\mathbf{R}}$, la variété réelle sous-jacente (de dimension 2n). On note $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{D}_X$, resp. $\mathcal{D}_X^\infty$) le faisceau des fonctions holomorphes (resp. des opérateurs différentiels holomorphes d'ordre fini, resp. d'ordre infini) sur X. On note $\mathcal{O}_X^{(p)}$ le faisceau des p-formes holomorphes et on pose :

$$\Omega_X = \mathcal{O}_X^{(n)} \otimes or_X$$

(comme X est orientable, on peut oublier or_X). On note $D^b_c(\mathcal{D}_X)$ (resp. $D^b_c(\mathcal{D}_X^{op})$) la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche (resp. à droite) formée des complexes à cohomologie bornée et cohérente. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent (ou plus généralement un objet de $D^b_c(\mathcal{D}_X)$) on note $char(\mathcal{M})$ sa variété caractéristique. On a alors [K-S1] :

$$char(\mathcal{M}) = SS(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)). \tag{1.1}$$

On note respectivement par $\underline{f}^{-1}, \underline{f}_*, \underline{\boxtimes}$, les opérations d'images inverses, images directes, produit externe, dans les catégories de $\mathcal{D}$-modules.

Si X et Y sont deux variétés complexes, $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme de variétés, $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) un $\mathcal{D}_X$-module (resp. un $\mathcal{D}_Y$-module) ou plus généralement des objets de la catégorie dérivée, on pose donc :

$$\underline{f}^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{D}_{Y\to X} \otimes^L_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{M},$$
$$\underline{f}_*\mathcal{N} = Rf_*(\mathcal{N} \otimes^L_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X}),$$
$$\mathcal{M} \underline{\boxtimes} \mathcal{N} = \mathcal{D}_{X\times Y} \otimes_{\mathcal{D}_X \boxtimes \mathcal{D}_Y} (\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}).$$

(Dans la deuxième formule $\mathcal{N}$ est un module à droite. D'autre part $\boxtimes$ désigne le produit externe des faisceaux.)

Enfin, on pose :

$$\underline{D}'\mathcal{M} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$$
$$\underline{D}\mathcal{M} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X[n]).$$

(Dans cette dernière formule, $\mathcal{M}$ est un module à droite.)

2. Paires elliptiques. Soit X une variété analytique complexe de dimension complexe n, $\mathcal{M}$ un objet de $D^b_c(\mathcal{D}_X)$ ou $D^b_c(\mathcal{D}_X^{op})$, F un objet de $D^b_{\mathbf{R}-c}(X)$.

DÉFINITION 2.1. On dit que $(\mathcal{M}, F)$ est une paire elliptique si :

$$char(\mathcal{M}) \cap SS(F) \subset T^*_X X. \tag{2.1}$$

Soit $(\mathcal{M}, F)$ une paire elliptique. Posons :

$$\begin{aligned} Sol(\mathcal{M}, F) &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M} \otimes F, \mathcal{O}_X), \\ DR(\mathcal{M}, F) &= \Omega_X \otimes^L_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \otimes F. \end{aligned}$$

THÉORÈME 2.2. *Soit $(\mathcal{M}, F)$ une paire elliptique.*

(a) Régularité. Le morphisme naturel

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, D'F \otimes \mathcal{O}_X) \longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M} \otimes F, \mathcal{O}_X)$$

est un isomorphisme.

(b) Supposons maintenant $supp(\mathcal{M}) \cap supp(F)$ compact.

(i) *Finitude. Les espaces $H^j(X; Sol(\mathcal{M}, F))$ et $H^j(X; DR(\mathcal{M}, F))$ sont de dimension finie.*

(ii) *Dualité. L'accouplement $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}\otimes F, \mathcal{O}_X)\otimes(\Omega_X\otimes^L_{\mathcal{D}_X}\mathcal{M}\otimes F) \longrightarrow \Omega_X\otimes^L_{\mathcal{D}_X}\mathcal{O}_X$ suivi du morphisme d'intégration*

$$H^n_c(X; \Omega_X \otimes^L_{\mathcal{D}_X} \mathcal{O}_X) \simeq H^{2n}_c(X; or_X) \longrightarrow \mathbf{C}$$

induit une dualité parfaite sur les espaces $H^j(X; Sol(\mathcal{M}, F))$ et $H^{n-j}(X; DR(\mathcal{M}, F))$.

(iii) *Paramètres. Soit Y une autre variété complexe et notons q_1 et q_2 les projections de $X \times Y$ sur X et Y respectivement. Alors le morphisme naturel :*

$$(Rq_{2*}q_1^{-1}R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M} \otimes F, \mathcal{O}_X)) \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow Rq_{2*}R\mathcal{H}om_{q_1^{-1}\mathcal{D}_X}(q_1^{-1}(\mathcal{M} \otimes F), \mathcal{O}_{X\times Y})$$

est un isomorphisme.

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION:

(a) résulte immédiatement de ce que le morphisme $R\mathcal{H}om(F, \mathbf{C}_X)\otimes G \longrightarrow R\mathcal{H}om(F, G)$ est un isomorphisme si $SS(F) \cap SS(G) \subset T^*_X X$ (cf. [K-S 2]).

(b) Par une technique développée dans [Sc] on se ramène au cas où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module admettant une présentation libre de type fini. En réalifiant X et en complexifiant (i.e. en ajoutant le système de Cauchy-Riemann à $\mathcal{M}$) on peut supposer que F est porté par une variété analytique réelle M de complexifié X. On montre alors en utilisant [K3] que l'on peut représenter F par un complexe borné dont les composantes sont du type $\bigoplus_\alpha \mathbf{C}_{U_\alpha}$, la famille $\{U_\alpha\}_\alpha$ étant localement fini et les U_α étant des ouverts sous-analytiques relativement compacts de M vérifiant :

$$D'_M \mathbf{C}_{U_\alpha} \simeq \mathbf{C}_{\overline{U}_\alpha},$$

(ici D'_M désigne le foncteur de dualité sur M).

Le complexe $R\Gamma(X; Sol(\mathcal{M}, F))$ est alors représenté par un complexe dont les composantes sont du type $\bigoplus_\alpha \Gamma(\overline{U}_\alpha; \mathcal{A}_M)^{N_j}$ ou par un complexe quasi-isomorphe dont les composantes sont du type $\bigoplus_\alpha \Gamma(U_\alpha; \mathcal{B}_M)^{N_j}$, les morphismes étant des matrices d'opérateurs différentiels.

Représentant $\Gamma(U_\alpha; B_M)$ comme le quotient $\Gamma_K(M; B_M)/\Gamma_{K\setminus U_\alpha}(M; B_M)$ où K est un compact contenant $supp(F) \cap supp(\mathcal{M})$, on voit que $R\Gamma(X; Sol(\mathcal{M}, F))$ est représenté par un complexe d'espaces du type $\mathcal{DFS}$ quasi-isomorphe à un complexe d'espaces du type $\mathcal{FS}$. On conclut alors comme dans [B-S] en utilisant un théorème de Schwartz [Schw].

REMARQUES 2.3. (a) On peut améliorer le théorème 2.2 en s'inspirant du théorème de finitude de [K4] et remplacer l'hypothèse que $supp(\mathcal{M}, F)$ est compact par l'hypothèse qu'il existe une fonction réelle φ de classe C^∞ sur X telle que si $\Lambda_\varphi = \{(x; d\varphi(x)); x \in X\}$, alors :

$$\begin{cases} supp(\mathcal{M}) \cap supp(F) \cap \{x \in X; \varphi(x) \leq t\} & \text{est compact pour tout } \quad t \in \mathbf{R}, \\ (car(\mathcal{M}) + SS(F)^a) \cap \Lambda_\varphi & \text{est compact.} \end{cases}$$

Il faut alors remplacer $R\Gamma(X; DR(\mathcal{M}, F))$ par $R\Gamma_c(X; DR(\mathcal{M}, F))$ dans l'énoncé du théorème.

(b) On pourrait aussi introduire la notion de "paires presque-elliptiques" (de même que la notions de système presque elliptique est introduite dans [B]), en considérant une homotopie $\{F_t\}, t \in [0,1]$ (cf. [K-S2, Ex.V.10]) telle que $(\mathcal{M}, F_t)$ est une paire elliptique pour $t > 0$ et $F_0 = F$.

EXEMPLES ET COMMENTAIRES. (a) Pour tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$, $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_X)$ est une paire elliptique. On retrouve ainsi un théorème de finitude classique si $\mathcal{M}$ est à support compact, ainsi qu'un théorème de dualité de Mebkhout [M]. Cette formulation englobe des résultats de géométrie analytique complexe (Cartan-Serre [C-S], Serre [Se], Ramis-Ruget [R-R]), si l'on associe à un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{G}$ le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$.

(b) Pour tout faisceau $\mathbf{R}$-constructible F sur X, $(\mathcal{O}_X, F)$ est une paire elliptique. Si G est un faisceau $\mathbf{R}$-constructible sur une variété réelle M, on se ramène au cas complexe en posant $F = i_*G$, $\quad i : M \hookrightarrow X$ désignant une complexification de M. Le formalisme des paires elliptiques contient donc celui de la dualité de Verdier dans le cas $\mathbf{R}$-constructible (mais la théorie des faisceaux constructibles est évidemment beaucoup plus simple).

(c) Soit M une variété analytique réelle de complexifié X. Alors $\mathcal{M}$ est elliptique sur M si et seulement si $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_M)$ est une paire elliptique. Remarquons que dans ce cas l'isomorphisme du théorème 2.2 (a) n'est rien d'autre que l'isomorphisme (0.2). On retrouve donc par ce théorème des résultats bien classiques, le résultat de dualité remontant au moins à Grothendieck [G].

(d) Si Ω est un ouvert relativement compact de X à frontière analytique, $(\mathcal{M}, \mathbf{C}_\Omega)$ est elliptique si et seulement si $\partial\Omega$ est non caractéristique. On retrouve ainsi le théorème de finitude de Bony-Schapira (théorème étendu ensuite par Kawai [Kaw]).

3. Classes caractéristiques. A tout faisceau $\mathbf{R}$-constructible F sur une variété réelle X, M. Kashiwara associe un cycle Lagrangien $CC(F)$ porté par le micro-support de F, et montre comment l'intégrale de la restriction à la section nulle de la classe de cohomologie correspondante calcule (dans le cas F à support compact) l'indice d'Euler-Poincaré de F (cf. [K4], [K-S2]. On peut faire une construction analogue avec les paires elliptiques.

Comme au paragraphe 2, soit X une variété complexe de dimension complexe n. On considère ici des $\mathcal{D}$-modules à droite.

LEMME 3.1. *Soit $(\mathcal{M}, F)$ une paire elliptique. Il existe un morphisme naturel :*

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M} \otimes F, \mathcal{M} \otimes F) \longrightarrow R\Gamma_{\Delta}(\underline{D}(\mathcal{M} \otimes F) \underline{\boxtimes} (\mathcal{M} \otimes F) \otimes^{L}_{\mathcal{D}_{X \times X}} \mathcal{O}_{X \times X})$$

(Cette formule est classique en l'absence de F, et l'on peut alors obtenir un isomorphisme si on remplace $R\Gamma_{\Delta}$ par $R\Gamma_{[\Delta]}$. Cela résulte immédiatement de [K2].)

LEMME 3.2. *Il existe un morphisme naturel $\delta^{-1}\mathcal{D}_{X \times X}$-linéaire :*

$$\delta^{-1}\left[\underline{D}(\mathcal{M} \otimes F) \underline{\boxtimes} (\mathcal{M} \otimes F)\right] \longrightarrow \delta^{-1} R\Gamma_{\Delta}(\Omega_{X \times X})[2n].$$

Ce morphisme est obtenu par la contraction $\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{D}_X$ linéaire :

$$\delta^{-1}\left[\underline{D}(\mathcal{M} \otimes F) \boxtimes (\mathcal{M} \otimes F)\right] \longrightarrow \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X[n]$$

et l'isomorphisme (de Sato) :

$$\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{\infty} \simeq H^n_{\Delta}(\Omega_{X \times X}).$$

Soit $(\mathcal{M}, F)$ une paire elliptique. Le micro-support du faisceau $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M} \otimes F, \mathcal{O}_X)$ est contenu dans l'ensemble :

$$\Lambda = \mathrm{car}(\mathcal{M}) + SS(F)^a. \tag{3.1}$$

Posons pour simplifier les notations :

$$H = \underline{D}(\mathcal{M} \otimes F) \underline{\boxtimes} (\mathcal{M} \otimes F) \otimes^{L}_{\mathcal{D}_{X \times X}} \mathcal{O}_{X \times X},$$

et considérons la suite de morphismes :

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M} \otimes F, \mathcal{M} \otimes F) &\longrightarrow R\Gamma_{\Delta}(H) \\ &\simeq \quad R\pi_* \; \mu_{\Delta}(H) \\ &\xleftarrow{\sim} R\pi_* \; R\Gamma_{\Lambda} \; \mu_{\Delta}(H) \\ &\longrightarrow R\pi_* \; R\Gamma_{\Lambda} \; \mu_{\Delta}(\delta_* \delta^{-1} H) \\ &\longrightarrow R\pi_* \; R\Gamma_{\Lambda} \; \mu_{\Delta}\big(R\Gamma_{\Delta}(\Omega_{X \times X} \otimes^{L}_{\mathcal{D}_{X \times X}} \mathcal{O}_{X \times X}) \; [2n)]\big) \\ &\simeq \quad R\pi_* R\Gamma_{\Lambda} \; \mu_{\Delta}(R\Gamma_{\Delta} \; \mathbf{C}_{X \times X}[4n]) \\ &\simeq \quad R\pi_* R\Gamma_{\Lambda} \; \mu_{\Delta} \; \delta_* \; \omega_X \\ &\simeq \quad R\pi_* R\Gamma_{\Lambda} \; \pi^{-1} \; \omega_X. \end{aligned}$$

On en déduit un morphisme :

$$Hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}\otimes F,\mathcal{M}\otimes F)\longrightarrow H^0_\Lambda(T^*X;\pi^{-1}\omega_X) \tag{3.2}$$

DÉFINITION 3.3. Soit $(\mathcal{M}\otimes F)$ une paire elliptique. On appelle classe d'Euler microlocale de $(\mathcal{M}\otimes F)$ et on note $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M}\otimes F)$ l'image de $1\in Hom(\mathcal{M}\otimes F,\mathcal{M}\otimes F)$ dans $H^0_\Lambda(T^*X;\pi^{-1}\omega_X)$ par la flèche (3.2). On appelle classe d'Euler, et on note $\mathrm{eu}(\mathcal{M}\otimes F)$ la restriction de $\mu\mathrm{eu}(\mathcal{M}\otimes F)$ à la section nulle.

4. Opérations sur les classes caractéristiques. Commençons par rappeler quelques constructions de [K-S2, Ch.IX].

Soit $f:Y\longrightarrow X$ un morphisme de variétés réelles auquel on associe les flèches :

$$T^*Y\xleftarrow[{}^tf']{}Y\underset{X}{\times}T^*X\xrightarrow[f_\pi]{}T^*X.$$

Soit Λ_X (resp. Λ_Y) une partie conique fermée de T^*X (resp. T^*Y). L'isomorphisme $\omega_X\boxtimes\omega_Y\xrightarrow{\sim}\omega_{X\times Y}$ permet de définir le morphisme

$$H^0_{\Lambda_X}(T^*X;\pi^{-1}\omega_X)\times H^0_{\Lambda_Y}(T^*Y;\pi^{-1}\omega_Y)\to H^0_{\Lambda_X\times\Lambda_Y}(T^*(X\times Y);\pi^{-1}\omega_{X\times Y}). \tag{4.1}$$

Supposons maintenant :

$$f \quad \text{est propre sur} \quad \pi(\Lambda_Y). \tag{4.2}$$

Le morphisme $Rf_!\,\omega_Y\to\omega_Y$ permet de définir le morphisme :

$$f_*:H^0_{\Lambda_Y}(T^*Y;\pi^{-1}\omega_X)\to H^0_{f_\pi{}^tf'^{-1}(\Lambda_Y)}(T^*X;\pi^{-1}\omega_X). \tag{4.3}$$

Supposons enfin :

$${}^tf' \quad \text{est propre sur} \quad f_\pi^{-1}(\Lambda_X). \tag{4.4}$$

Le morphisme (construit dans [K-S2, Ch.IX]) $R^tf'_!\,f_\pi^{-1}\omega_X\to\omega_Y$ permet de construire le morphisme :

$$f^*:H^0_{\Lambda_X}(T^*X;\pi^{-1}\omega_X)\to H^0_{{}^tf'f_\pi^{-1}(\Lambda_X)}(T^*Y;\pi^{-1}\omega_Y). \tag{4.5}$$

Si l'on applique ces constructions au morphisme diagonal $\delta:X\hookrightarrow X\times X$, on en déduit que si Λ_1 et Λ_2 sont deux parties coniques fermées de T^*X vérifiant :

$$\Lambda_1\cap\Lambda_2^a\subset T^*_XX, \tag{4.6}$$

alors on a un morphisme naturel de produit :

$$H^0_{\Lambda_1}(T^*X;\pi^{-1}\omega_X)\times H^0_{\Lambda_2}(T^*X;\pi^{-1}\omega_X)\to H^0_{\Lambda_1+\Lambda_2}(T^*X;\pi^{-1}\omega_X). \tag{4.7}$$

Soit maintenant à nouveau X une variété complexe et soit $(\mathcal{M}, F)$ une paire elliptique sur X satisfaisant à :

$$\text{(4.8)} \qquad \operatorname{supp}(\mathcal{M}) \cap \operatorname{supp}(F) \quad \text{est compact.}$$

On définit l'indice d'Euler-Poincaré de $(\mathcal{M}, F)$ par la formule :

$$\text{(4.9)} \qquad \chi(X; \mathcal{M}, F) = \sum_j (-1)^j \dim_{\mathbf{C}} H^j(X; Sol(\mathcal{M}, F))$$

Notons $\int_X \cdot$ le morphisme d'intégration

$$\int_X \cdot : \ H^0_c(X; \omega_X) \simeq H^{2n}_c(X; or_X) \to \mathbf{C}.$$

CONJECTURE 4.1. En adaptant la preuve du théorème de Kashiwara calculant l'indice d'un faisceau constructible (cf. [K-S2, Ch. IX]) on devrait obtenir la formule :

$$\text{(4.10)} \qquad \chi(X; \mathcal{M}, F) = \int_X \operatorname{eu}(\mathcal{M}, F).$$

La formule (4.10) est l'analogue pour les $\mathcal{D}$-modules d'une formule de O'Brian-Toledo-Tong [O-T-T] (qui étend aux faisceaux $\mathcal{O}_X$-cohérents la formule de Riemann-Roch). Cette formule devrait d'ailleurs avoir une version relative utilisant (4.3) et les résultats de [H-S]; (cf.[B-M] pour une version relative en K-théorie du théorème de Atiyah-Singer).

Soit enfin $f : Y \to X$ un morphisme de variétés complexes. Nous dirons que f est non caractéristique pour la paire elliptique $(\mathcal{M}, F)$ sur X si l'application composée $\delta_X \circ f : Y \to X \to X \times X$ est non caractéristique pour $\operatorname{char}(\mathcal{M}) \times SS(F)$.

CONJECTURE 4.2. Supposons f non caractéristique pour $(\mathcal{M}, F)$. Alors:

$$\text{(4.11)} \qquad \mu\operatorname{eu}(\underline{f}^{-1}\mathcal{M}, f^{-1}F) = f^* \mu\operatorname{eu}(\mathcal{M}, F)$$

On en déduirait immédiatement la formule:

$$\text{(4.12)} \qquad \mu\operatorname{eu}(\mathcal{M}, F) = \mu\operatorname{eu}(\mathcal{M}, \mathbf{C}_X) \times \mu\operatorname{eu}(\mathcal{O}_X, F),$$

le produit étant défini par (4.7).

Là encore la formule (4.11) devrait avoir une démonstration formellement analogue à celle de Kashiwara concernant les faisceaux $\mathbf{R}$-constructibles.

On voit ainsi apparaître l'intérêt des classes d'Euler microlocales : celles-ci permettent de définir des opérations d'images inverses ou de produits, ce qu'il n'était pas possible de faire en travaillant uniquement sur X.

Références

[A-L] **B.Angéniol** et **M. Lejeune-Jalabert** : *Le théorème de Riemann-Roch singuliers pour les D-modules.* In "Systèmes différentiels et singularités", Astérisque 130, 130-160, (1985)

[A-S] **M. Atiyah** et **I.M. Singer** : *The index of elliptic operators on compact manifolds.* Bull Am. Math. Soc. 69, 422-433, (1963)

[B] **L. Boutet de Monvel** : *The index of almost elliptic systems.* E. de Giorgi Colloquium, Research Notes in Math. 125, Pitman, 17-29, (1985)

[B-M] **M. Boutet de Monvel** et **B. Malgrange** : *Le théorème de l'indice relatif.* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. (1990)

[B-S] **J-M. Bony** et **P. Schapira** : *Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles.* Inventiones Math. 17, 95-105, (1972)

[C-S] **H. Cartan** et **J.P. Serre** : *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes.* C.R. Acad. Sci. 237, 128-130, (1953)

[G] **A. Grothendieck** : *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles.* J. Anal. Math. 2, p.243-280, (1952-1953)

[H-S] **C. Houzel** et **P. Schapira** : *Images directes des modules différentiels.* C.R. Acad. Sci. Paris, 298, série I, 461-464, (1984)

[K1] **M. Kashiwara** : *Systems of microdifferential equations.* Progress in Math., Birkhauser, (1983)

[K2] **M. Kashiwara** : *On the holonomic systems of linear differential equations II.* Inventiones Math. 49, 121-135, (1978)

[K3] **M. Kashiwara** : *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems.* Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 20, 319-365, (1984)

[K4] **M. Kashiwara** : *Index theorem for constructible sheaves.* In Astérisque, 130, Systèmes différentiels et singularités, 193-209, (1985)

[K-S1] **M. Kashiwara** et **P. Schapira** : *Microlocal study of sheaves.* Astérisque 128, (1985)

[K-S2] **M. Kashiwara** et **P. Schapira** : *Sheaves on manifolds.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 292, Springer-Verlag, (1990)

[Kaw] **T. Kawai** : *Finite-dimensionality of cohomology groups attached to systems of linear differential equations.* J. Math. Kyoto Univ. 13, 73-95, (1973)

[M] **Z. Mebkhout** : *Théorèmes de dualité globale pour les D-modules cohérents.* Math. Scand. 50, p. 25-43, (1982)

[O-T-T] **N. O'Brian, D. Toledo** et **Y.L. Tong** : *Hirzebruch-Riemann-Roch for coherent sheaves.* Amer J. Math. 103, 253-271, (1981)

[R-R] **J.P. Ramis** et **G. Ruget** : *Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe.* Publ. IHES 38, 77-91

[S] **P. Schapira** : *Microdifferential systems in the complex domains.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 269, Springer-Verlag, (1985)

[Schn] **J-P. Schneiders** : *Un théorème de dualité relative pour les modules différentiels.* C.R. Acad. Sci. Paris. 303, série I, p. 235-238, (1986). Thèse, Univ. Liège, 1986 et article à paraître.

[S-Schn] **P. Schapira** et **J-P. Schneiders** : *Paires elliptiques I - Finitude et dualité.* C.R. Acad. Sci. (1990), sous presse Tome 311

[Se] **J.P. Serre** : *Un théorème de dualité.* Comm. Math. Helv. 29, 9-26, (1955)

[Schw] **L. Schwartz** : *Homomorphismes et applications complètement continus.* C.R. Acad. Sci. Paris 236, 2472-2473, (1953)

P.S. Mathématiques. Université Paris-Nord
93430 Villetaneuse France

J-P.S.Chargé de recherche FNRS
Mathématiques. Université de Liège
15, AV. des Tilleuls Liège B.4000 Belgique