

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J.-M. TREPRAU

Propagation dans les variétés CR

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n° 17,
p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990___A19_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PROPAGATION DANS LES VARIETES CR

J.-M. TREPRAU

Nous présentons dans cet exposé un résultat général de propagation pour les fonctions CR , analogue à celui qu'on obtiendrait, dans un cadre analytique réel, en appliquant le théorème de propagation de N. Hanges et J. Sjöstrand [5]. Nous indiquerons quelques applications. Pour le détail des énoncés et des démonstrations, nous renvoyons le lecteur à [11].

1. Les fonctions CR et leurs singularités.

Si M est une sous-variété réelle de \mathbf{C}^n et z un point de M , l'espace des vecteurs antiholomorphes tangents à M en z est un sous-espace $T_z^{0,1}M$ de CT_zM . M est une **variété CR** , de **dimension CR p** , si la dimension sur \mathbf{C} de $T_z^{0,1}M$ est constante, égale à p . Alors, les sections de $T^{0,1}M$ sont les **champs CR** (pour Cauchy-Riemann) de M . M est **générique** si $TM + \sqrt{-1}TM = TC^n|_M$. Si M est générique de codimension q , M est CR de dimension CR $p = n - q$.

Dans la suite, M est une sous-variété générique de \mathbf{C}^n , de dimension CR p et de codimension q , $p + q = n$.

Soit $Z_j = X_j + iX_{p+j}$, $j = 1, \dots, p$, une base de champs CR sur M ; X_1, \dots, X_{2p} sont $2p$ champs de vecteurs réels indépendants. Une **fonction CR** sur M est une solution du système :

$$(1.1) \quad Z_1 u = 0, \dots, Z_p u = 0 .$$

Nous considérerons le plus souvent des fonctions CR continues, mais les résultats s'étendent sans difficulté aux distributions quand M est régulière (cf. le théorème de représentation de [12]).

Localement, une transformation linéaire met M sous la forme $M = \{z \in \mathbf{C}^n, \Im z'' - G(z', \Re z'') = 0\}$ où $z = (z', z'') \in \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$ et G est nulle à l'ordre deux à l'origine. Un **wedge** en 0 dans la direction $\theta \in \mathbf{R}^q \setminus 0$ est alors un domaine de la forme $\mathcal{W} = \{z \in \mathbf{C}^n, \Im z'' - G(z', \Re z'') \in \Gamma \text{ et } |z| < \epsilon\}$ où Γ est un voisinage conique de θ dans \mathbf{R}^q . En général, on en déduit la notion de **wedge en** $(z, \theta) \in \dot{T}_M \mathbf{C}^n$, le fibré normal à M dans \mathbf{C}^n (le point indique qu'on a enlevé la section nulle).

On obtient des fonctions CR en prenant la restriction ou plus généralement la valeur au bord sur M de fonctions holomorphes. Une fonction CR u est **prolongeable en** $z \in M$ si u se prolonge holomorphiquement près de z ; u est **\mathcal{W} -prolongeable** en (z, θ) si u se prolonge holomorphiquement à un wedge en (z, θ) ; u est **\mathcal{W} -prolongeable en** z si u est \mathcal{W} -prolongeable en au moins un (z, θ) ; u est **décomposable en** z si u est somme près de z de fonctions CR \mathcal{W} -prolongeables en z .

Dans les questions de prolongement et de propagation, les orbites du système $\{X_1, \dots, X_{2p}\}$ jouent un rôle crucial. Si $z \in M$, l'orbite de z , notée $\mathcal{O}_M(z)$, définit en z un germe de sous-variété de M (voir [9]), dont la dimension est évidemment comprise entre le rang $2p$ du système de vecteurs et la dimension $2p + q$ de M . Si on remplace M par U , voisinage ouvert de z dans M , la dimension de $\mathcal{O}_U(z)$ ne peut que décroître avec U , donc est stationnaire. A la limite, on obtient un germe de sous-variété en z , l'orbite locale $\mathcal{O}_M(z, \text{loc})$ de z . Voyons quelques exemples :

- 1) Si $q = n$, M est totalement réelle, il n'y a pas d'équations. Toute fonction est CR et les orbites se réduisent à un point. On montre que toute fonction est décomposable [2].
- 2) Si $q = 1$, M est une hypersurface. L'orbite locale de $z \in M$ est soit de dimension $2(n-1)$ (c'est une hypersurface complexe) soit de dimension $2n-1$ (c'est le germe de M). Dans tous les cas les fonctions CR sont décomposables en z [1], dans le second elles sont même \mathcal{W} -prolongeables en z [10].
- 3) Dans le cas général, dès que $p \geq 1$, toutes les dimensions comprises entre $2p(\mathcal{O}_M(z, \text{loc}))$ est un germe de p -variété complexe) et $2p+q(\mathcal{O}_M(z, \text{loc}))$ est égale au germe de M sont possibles pour les orbites ; la dimension $2p+q$ est "la plus courante".

A.E. Tumanov a démontré le résultat suivant :

Théorème.— (A.E. Tumanov [13]) *Si la dimension de $\mathcal{O}_M(z, \text{loc})$ est $2p+q$, les fonctions CR sont \mathcal{W} -prolongeables en z*

L'analyse de Tumanov permet en fait la généralisation suivante :

Théorème 1.— *Si la dimension de $\mathcal{O}_M(z, \text{loc})$ est $2p+q-s$, les fonctions CR ont un prolongement CR (près de z) sur une variété-coin \tilde{M} de codimension s , d'arête M . De plus, au-dessus de $\mathcal{O}_M(z, \text{loc})$, le tangent à \tilde{M} est engendré par le tangent à M et le complexifié du tangent à l'orbite $\mathcal{O}_M(z, \text{loc})$.*

On retrouve le théorème de Tumanov quand $s = 0$, on n'obtient rien quand $s = q$. Les fonctions CR singulières construites par M.S. Baouendi et L.P. Rothschild [3] montrent que ces énoncés sont optimaux.

Nous verrons que les orbites jouent un rôle aussi important dans la propagation. Donnons déjà un exemple (voir F. Trèves [12]) : l'analogue CR du théorème de Holmgren est vrai, donc aussi ses conséquences classiques, donc le support d'une fonction CR est une réunion d'orbites.

Soit $T_M^* \mathbf{C}^n$ le fibré conormal à M dans \mathbf{C}^n , de fibre en $z \in M$ l'espace des formes holomorphes ω telles que $\Im \omega|_{T_z M} = 0$. $T_M \mathbf{C}^n$ et $T_M^* \mathbf{C}^n$ sont naturellement en dualité. Pour analyser les directions de prolongement d'une fonction CR u , M.S. Baouendi, C.H. Chang et F. Trèves [2] ont introduit le front d'onde hypoanalytique WFu de u .

Dans [8], J. Sjöstrand a appliqué sa théorie des transformations FBI à cette notion. Rappelons les propriétés essentielles de WFu :

(1.2) WFu est une partie fermée conique de $T_M^* \mathbf{C}^n$.

(1.3) u est \mathcal{W} -prolongeable en (z, θ) si et seulement si la fibre $WF_z u$ est contenue dans l'intérieur du polaire de $\mathbf{R}^{+*} \theta$.

(1.4) Si $M \supset M'$ générique, $(WFu)|_{M'} = WF(u|_{M'})$.

La propriété (1.3) contient le théorème du Edge of the Wedge. Une conséquence évidente de (1.3) est que u est \mathcal{W} -prolongeable en z si et seulement si $WF_z u$ est saillant,

i.e. contenu dans un demi-espace ouvert. La propriété (1.4) est une version CR du théorème de micro Holmgren ; elle a comme conséquence, avec les mêmes notations, que u est \mathcal{W} -prolongeable en $z \in M'$ si et seulement si $u|_{M'}$ l'est.

Pour terminer cette introduction, notons que $T_M^* \mathbf{C}^n$ est naturellement isomorphe à la variété caractéristique Σ_M du système (1.1) par :

$$\theta : T_M^* \mathbf{C}^n \rightarrow \Sigma_M ; \theta(\omega) = i_M^* \omega$$

On peut donc aussi bien situer les singularités sur Σ_M , ce qui est souvent plus agréable. Par contre, (1.4) serait moins simple à écrire.

2. Propagation microlocale.

Dans la suite, N est une sous-variété CR de M , de même dimension CR p que M , de codimension $2p + r$, $r + s = q$.

Par définition, $T^{0,1}N = T^{0,1}M|_N$: les champs CR sont tangents à N et quand $z \in N$, $\mathcal{O}_N(z, \text{loc})$ et $\mathcal{O}_M(z, \text{loc})$ coïncident. On note :

$$\mathcal{L} = \theta^{-1}(T_N^* M) = T_M^* \mathbf{C}^n \cap iT_N^* \mathbf{C}^n$$

Nous utiliserons la propriété suivante :

Lemme.— \mathcal{L} est une sous-variété CR de $T^* \mathbf{C}^n$, de même dimension et même dimension CR que M .

On peut donc parler des orbites de $\dot{\mathcal{L}}$ (on enlève la section nulle). Elles sont non-triviales dès que $p \neq 0$ (si $p = 0$ il n'y a pas de champ) et $s \neq 0$ (si $s = 0$, \mathcal{L} est réduit à la section nulle).

Théorème 2.— Si u est une fonction CR, $WFu \cap \dot{\mathcal{L}}$ est une réunion d'orbites de $\dot{\mathcal{L}}$.

Si on traduit l'énoncé sur Σ_M , on trouve que $\theta(WFu) \cap \dot{T}_N^* M$ est invariant par les champs hamiltoniens $\hat{X}_j = H_{\sigma(X_j)}$, $j = 1, \dots, 2p$, des symboles des champs X_j . Quand tout est analytique réel, c'est un cas particulier du théorème de Hanges-Sjöstrand [5].

Le théorème reste vrai pour une sous-variété CR \mathcal{L} quelconque de $\dot{T}_M^* \mathbf{C}^n$ (voir [11]). Dans les applications, il est souvent utile d'appliquer le théorème à une sous-variété générique $M' \subset M$ et d'invoquer (1.4).

Je vais démontrer le théorème sous l'hypothèse simplificatrice que N est complexifiable, c'est à dire générique dans une sous-variété complexe \hat{N} de \mathbf{C}^n . Alors, M de classe \mathcal{C}^2 suffit. En gros, la démonstration est la suivante : on transforme le problème par la théorie de Sjöstrand et on applique le théorème des 3 cercles, comme c'est classique dans ces questions (cf. J.M. Bony [4], dans un contexte CR, [6], [8]). La différence est qu'ici la feuille qui propage n'a pas en général de structure complexe. On se ramène à la situation standard en construisant un disque complexe qui a son bord dans la feuille.

Démonstration du Théorème 2 (quand N est complexifiable)

1ère étape : réduction par la théorie de Sjöstrand.

Après localisation, on peut supposer que les tangents en 0 à M, N, \hat{N} sont $\mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s, \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^r \times \{0\}, \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^r \times \{0\}$. La phase $\varphi(z, \tilde{z}) = \frac{i}{2}(z - \tilde{z})^2$ est admissible (voir [8]). Lui est associée la transformation canonique complexe non homogène :

$$\chi : (z, \zeta) \mapsto (z + i\zeta, \zeta)$$

Localement χ transforme $\dot{T}_M^* \mathbf{C}^n$ en une variété étalée :

$$\mathcal{L}_M =: z \in \Omega, \zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial z}(z)$$

où ϕ est réelle de classe \mathcal{C}^2 . Soit $H_\phi^{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace de Sjöstrand des fonctions $u(z, \lambda)$ sur $\Omega \times \mathbf{R}^+$, holomorphes en z et vérifiant pour tout compact $K \subset \Omega$, tout $\epsilon > 0$, une estimation de la forme :

$$z \in K, \lambda > 0, |u(z, \lambda)| \leq C e^{\lambda(\phi(z) + \epsilon)}$$

avec $C = C(K, \epsilon)$. Si $u \in H_\phi^{\text{loc}}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$, on note " $u \underset{\phi}{\sim} 0$ en z_0 " si dans un voisinage K de z_0 , u vérifie une estimation de la forme :

$$z \in K, \lambda > 0, |u(z, \lambda)| \leq C e^{\lambda(\phi(z) - \epsilon)}$$

avec $\epsilon > 0$. A la phase φ (et au choix d'une fonction troncature) est associée une transformation FBI $u \mapsto Tu \in H_\phi^{\text{loc}}(\Omega)$, u fonction CR, dont la propriété fondamentale est de caractériser l'appartenance à WFu de $(z, \zeta) \in \dot{T}_M^* \mathbf{C}^n$, pour z petit. On a :

$$(2.1) \quad (z, \zeta) \notin WFu \Leftrightarrow Tu \underset{\phi}{\sim} 0 \quad \text{en } z + i\zeta$$

Dans le cas qui nous occupe, χ transforme $\dot{T}_N^* \mathbf{C}^n$ en une variété \mathbf{C} -lagrangienne étalée :

$$\mathcal{L}_{\hat{N}} =: z \in \Omega, \zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial H}{\partial z}(z)$$

où H est holomorphe. $\mathcal{L} = \dot{T}_M^* \mathbf{C}^n \cap i \dot{T}_N^* \mathbf{C}^n = \dot{T}_M^* \mathbf{C}^n \cap \dot{T}_{\hat{N}}^* \mathbf{C}^n$ est transformée en $\mathcal{L}_M \cap \mathcal{L}_{\hat{N}} = \mathcal{L}^\circ$ qui est de la forme :

$$\mathcal{L}^\circ =: z \in M^\circ, \zeta = \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial z}(z)$$

avec M° de classe \mathcal{C}^1 et $\partial \phi|_{M^\circ} = \partial H|_{M^\circ}$. On sait (Lemme ci-dessus) que \mathcal{L}° a même dimension et même dimension CR que M . On vérifie qu'il en est de même pour M° qui est donc générique. D'après (2.1), on est ramené à étudier la propagation sur M° de la relation " $u \underset{\phi}{\sim} 0$ en z " quand $u \in H_\phi^{\text{loc}}(\Omega)$. Comme H est holomorphe, on peut remplacer ϕ par $\phi - 2\text{Re } H$ et u par $ue^{-2\lambda H}$. Comme $d(\phi - 2\text{Re } H)|_{M^\circ} = 0$ il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme.— Soit M une sous-variété générique de classe \mathcal{C}^1 dans \mathbf{C}^n et ϕ une fonction réelle de classe \mathcal{C}^2 , s'annulant sur M à l'ordre 2. Si $u \in H_\phi^{\text{loc}}(\Omega)$, l'ensemble $\{z \in M, u \underset{\phi}{\sim} 0 \text{ en } z\}$ est une réunion d'orbites de M .

2ème étape : construction d'un disque complexe.

Pour démontrer le lemme, il suffit de considérer la propagation non-caractéristique, i.e. de montrer que si $0 \in M$, si $\Sigma = \{h = 0\}$ est un germe d'hypersurface en 0 dans M , non caractéristique (ça suppose $p > 0$!) si u est un germe de fonction H_ϕ en 0, avec $u \underset{\phi}{\sim} 0$, dans $\Sigma_- = \{h < 0\}$, alors $u \underset{\phi}{\sim} 0$ en 0.

Suivant une technique classique en analyse complexe, on construit un disque complexe Z , c'est à dire $Z : \bar{D} = \{\tau \in \mathbf{C}, |\tau| \leq 1\} \rightarrow \mathbf{C}^n$ de classe \mathcal{C}^α (ici $\alpha > \frac{1}{2}$) et holomorphe dans D , avec les propriétés suivantes :

(2.2) Le bord ∂Z de Z est contenu dans M , i.e. : $Z(\tau) \in M$ si $|\tau| = 1$.

(2.3) $\|Z\|_{\mathcal{C}^\alpha(\bar{D})}$ est petit.

(2.4) $Z(1) = 0$ et $Z(-1) = z_0 \in \Sigma_-$.

3ème étape : les 3 cercles

Après des normalisations triviales, on se ramène à montrer que si $u(z, \lambda)$, holomorphe pour $|z| \leq R$ vérifie :

$$(2.5) \quad |u(z, \lambda)| \underset{=}{\leq} e^{\lambda d(z, M)^2} \quad \text{pour tout } z .$$

$$(2.6) \quad |u(z, \lambda)| \underset{=}{\leq} e^{-\lambda \epsilon} \quad \text{pour } |z - z_0| \leq r .$$

alors :

$$(2.7) \quad |u(z, \lambda)| \underset{=}{\leq} e^{-\lambda \epsilon'} \quad \text{pour } |z| \leq r' .$$

Soit Z le disque construit plus haut (assez petit) et ϕ un biholomorphisme de \bar{D} tel que $\phi(1) = 1$ et que $Z \circ \phi$ envoie un disque $\delta \bar{D}$, $\delta > 0$, dans $\{|z - z_0| \leq r/2\}$. Nous noterons encore Z pour le disque composé $Z \circ \phi$. Par construction, pour $z' \in \mathbf{C}^n, |z'| \leq R/2$, on a les estimations :

$$|\tau| = 1 : |u(Z(\tau) + z', \lambda)| \underset{=}{\leq} e^{\lambda |z'|^2} \quad \text{d'après (2.2), (2.5).}$$

$$|\tau| = \delta : |u(Z(\tau) + z', \lambda)| \underset{=}{\leq} e^{-\lambda \epsilon} \quad \text{d'après (2.6).}$$

Les 3 cercles donnent l'estimation :

$$\begin{aligned} \delta \leq |\tau| \leq 1 : |u(Z(\tau) + z', \lambda)| &\underset{=}{\leq} e^{\lambda(|z'|^2 - (\epsilon + |z'|^2) \frac{\log |\tau|}{\log \delta})} \\ &\underset{=}{\leq} e^{\lambda(|z'|^2 - \epsilon_1(1 - |\tau|))} \end{aligned}$$

avec $\epsilon_1 = \epsilon / \log 1/\delta$. En particulier, quand $z' = o(\kappa^{1/2})$, κ petit :

$$|u(Z(1 - \kappa) + z', \lambda)| \leq e^{-\lambda \epsilon_2 \kappa}$$

Finalement, on décompose z , pour $|z| \leq \kappa$, en :

$$z = Z(1 - \kappa) + (z - Z(1 - \kappa))$$

Alors $z' = o(\kappa^{1/2})$ car Z est de classe C^α , $\alpha > \frac{1}{2}$, et $Z(1) = 0$. Pour $\kappa > 0$ assez petit, on obtient (2.7).

Remarque : Dans le cas général, on ne peut pas réduire autant la fonction ϕ . Au lieu d'une fonction holomorphe H , on se ramène à disposer d'une fonction H dont toutes les traces sur les variétés translatées $M + \eta$ sont CR , $\eta \in (T_M \mathbf{C}^n)_0$. Au lieu d'un disque, on construit une famille de disques Z paramétrée par M . Finalement, pour appliquer le raisonnement précédent, on prolonge holomorphiquement à chacun des disques $Z + \eta$ la restriction de H à son bord.

3. Application : fonctions CR indécomposables

Je me contenterai de donner un exemple (analytique réel ; c'est donc le théorème de Hanges-Sjöstrand qu'on utilise) pour montrer l'idée de la construction et des obstructions dimensionnelles. L'exemple que j'avais donné en 1985 correspond au cas $p = 1$, $r = 0$, $s = 2$ dans la généralisation ci-dessous. Pour d'autres résultats, voir [11].

L'idée est la suivante : avec les notations du §2, on choisit M et N de telle sorte que la fibre F en $z \in N$ de l'orbite de $(z, \zeta) \in \dot{T}_N^* M$ ne soit pas saillante. Cela suppose $p \geq 1$ et $s \geq 2$! Alors, si u est une fonction CR et si $(z, \zeta) \in WFu$, pour toute décomposition $u = u_1 + \dots + u_N$ F coupe donc est contenu dans WFu_j pour un j ; ce u_j n'est pas W -prolongeable en z (cf.(1.3)) donc u n'est pas décomposable en z .

Soit $M = \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s$ (coordonnées z', \bar{z}', x'', t) muni de la structure CR formelle, réelle-analytique donc représentable, définie par les champs :

$$j = 1, \dots, p-1 \quad Z_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

$$Z_p = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_p} + i \sum_{\alpha=1, \dots, r} x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{p+\alpha}} + i x_p^{r+1} \Theta$$

où on a noté $z' = (x_1 + iy_1, \dots, x_p + iy_p)$, $x'' = (x_{p+1}, \dots, x_{p+r})$, $t = (t_1, \dots, t_s)$ et $\Theta = t_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - t_2 \frac{\partial}{\partial t_1}$. Donc $p \geq 1$ et $s \geq 2$. On voit que X_1, \dots, X_{2p} et leurs crochets successifs engendrent $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{p+r}}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p}, \Theta$. L'orbite N de 0 est

$$N = \mathbf{C}^p \times \mathbf{R}^r \times \{0\}$$

Dans les coordonnées canoniques (z', x'', θ) de T_N^*M , on calcule les champs hamiltoniens :

$$j = 1, \dots, p-1 \quad \hat{Z}_{j|T_N^*M} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

$$\hat{Z}_{p|T_N^*M} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_p} + i \sum_{\alpha=1, \dots, r} x_p^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{p+\alpha}} + i x_p^{r+1} \hat{\Theta}$$

où $\hat{\Theta} = \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_1}$. On voit que $\mathcal{L} = \dot{T}_N^*M \cap \{\theta_3 = \dots = \theta_s = 0\}$ est une orbite : il y a des fonctions *CR* indécomposables en 0 (une distribution indécomposable est donnée par $u(z', x'', t) = 1(z', x'') \otimes \delta(t)$).

Remarque : Si $p = 1$ ou $p = n - 1$, toute fonction *CR* est décomposable localement (voir §1). Du point de vue des dimensions, l'exemple précédent couvre donc tous les cas sauf $p \in \{1, \dots, n - 2\}, s = 1$.

4. Application : propagation locale.

Il s'agit d'étudier la propagation sur M de la relation “ u est \mathcal{W} -prolongeable en z ” ou, ce qui revient au même “ $WF_z u$ est saillant”. Soit $sg - \text{supp } u$ (resp. $\mathcal{W}\text{-supp } u$) le complémentaire de l'ensemble des points $z \in M$ tels que u est prolongeable en z (resp. \mathcal{W} -prolongeable en z).

Quand $M \supset N$, p -variété complexe, $T_N^*M = \Sigma_{M|N}$ et le théorème 2 fournit des isomorphismes linéaires entre les fibres de $\Sigma_{M|N}$ qui échangent les fibres de $\theta(WFu)|_N$. Il y a donc propagation sur N de la relation “ $WF_z u$ est saillant”. Quand N est une variété complexe de dimension $\leq p$, on se ramène au cas précédent en introduisant comme dans [6] une sous-variété générique $M', N \subset M' \subset M$ de dimension *CR* la dimension complexe de N et en invoquant (1.4). On obtient la généralisation au \mathcal{W} -prolongement du Théorème de N. Hanges et F. Trèves [6] :

Théorème 3.— *On suppose M de classe \mathcal{C}^2 . Si $\Lambda \subset M$ est une courbe complexe connexe, si u est une fonction *CR* sur M , prolongeable (resp. \mathcal{W} -prolongeable) en $z \in \Lambda$, u est prolongeable (resp. \mathcal{W} -prolongeable) en tout point de Λ .*

Dans le cas général, T_N^*M est un sous-fibré propre de $\Sigma_{M|N}$ et le théorème 2 propage seulement la relation “ $\theta(WF_z u) \cap \dot{T}_N^*M$ est saillant”. On est sauvé par le Théorème 1 qui donne la majoration à priori qu'il faut de $WFu|_N$! On a encore :

Théorème 4.— *$\mathcal{W}\text{-supp } u$ est une réunion d'orbites de M .*

Attention : le résultat serait faux pour $sg\text{-supp } u$!

Démonstration du théorème 4.

On se ramène à la propagation non caractéristique à travers une hypersurface Σ de M , en $z_0 \in \Sigma$: on suppose $WF_z u$ saillant quand $z \in \Sigma^-$, un côté de Σ , et on doit montrer que $WF_{z_0} u$ est saillant. Si $\mathcal{O}_M(z_0, \text{loc}) = M$ dans les germes, il n'y a rien à démontrer (théorème de Tumanov). Soit donc $N = \mathcal{O}_M(z_0, \text{loc})$; N coupe Σ^- dans les germes. On applique d'abord le théorème 1 : par déformation d'une intégrale *F.B.I.*, on obtient qu'en

$z \in N$, $\theta(WF_z u)$ est contenu dans le polaire d'un cône ouvert non vide Γ_z de $T_z N$. On a alors :

(4.1) $\theta(WF_z u)$ est saillant si et seulement si $\theta(WF_z u) \cap \dot{T}_N^* M$ l'est.

La nécessité de la condition est triviale. Réciproquement, si $\theta(WF_z u)$ est non saillant, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \theta(WF_z u)$ de somme nulle. Comme $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ sont positifs sur Γ_z , ils sont nuls sur Γ_z donc sur $T_z N$: $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \dot{T}_N^* M$.

Finalement, comme " $\theta(WF_z u) \cap \dot{T}_N^* M$ est saillant" se propage (Théorème 2), le théorème est démontré.

Références

- [1] A. Andreotti, C.D. Hill, E.E. Levi Convexity and the Hans Lewy Problem I. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), p. 325-363.
- [2] M.S. Baouendi, C.H. Chang and F. Trèves, Microlocal Hypo-Analyticity and Extension of CR -Functions. J. Differential Geometry **18** (1983) p.331-391.
- [3] M.S. Baouendi and L.P. Rothschild, Cauchy-Riemann Functions on Manifolds of Higher Codimension in Complex Space (preprint, 1989).
- [4] J.M. Bony, Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques. S.M.F., Astérisque, **34-35**, (1976), p.43-91.
- [5] N. Hanges and J. Sjöstrand, Propagation of analyticity for a class of non-microcharacteristic operators. Annals of Math. **116** (1982), p.559-577.
- [6] N. Hanges and F. Trèves, Propagation of holomorphic extendability of CR functions. Math. Ann. **263** (1983), p.157-177.
- [7] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales S.M.F. Astérisque n° **95**, (1982).
- [8] J. Sjöstrand, The FBI-transform for CR submanifolds of \mathbf{C}^n . Prépublications Mathématiques d'Orsay (Université Paris-Sud, Bât. 425, 91405 Orsay France) (1982).
- [9] H.J. Sussmann, Orbits of families of Vector Fields and Integrability of Distributions. Transactions A.M.S., **180** (1973), p. 171-187.
- [10] J.-M. Trepreau, Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe C^2 dans \mathbf{C}^n . Invent. Math. **83**, (1986), p. 583-592.
- [11] J.-M. Trepreau, Sur la propagation des singularités dans les variétés CR . A paraître dans le bulletin de la S.M.F.
- [12] F. Trèves, Approximation and Representation of Functions and Distributions Annihilated by a system of complex vector fields. Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, Palaiseau (1981).
- [13] A.E. Tumanov, Extending CR functions on manifolds of finite type to a wedge. Mat. Sbornik **136**, (1988), p. 128-139 (en russe) et Math. USSR sbornik **64** (1989) p. 129-140.

J.-M. TREPREAU
Université Paris VI
4, place Jussieu
75230 Paris cedex 05