Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

F. BETHUEL

Énergies relaxées pour applications harmoniques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. nº 15, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A17_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ENERGIES RELAXEES POUR APPLICATIONS HARMONIQUES

F. BETHUEL

Exposé n°XV

19 Mars 1990

I Introduction

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbf{R}^3$. On considère des applications de Ω à valeur dans la sphère $S^2 = \{x \in \mathbf{R}^3, |x| = 1\}$, et la fonctionnelle énergie pour ces applications

$$(1) \qquad E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{pour} \quad u : \Omega \to S^2$$

où

$$|\nabla u|^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} (\frac{\partial u^i}{\partial x^j})^2 \quad \text{avec} \quad u = (u^1, u^2, u^3)$$

Pour définir et étudier la fonctionnelle $E(u)$ il est naturel d'introduire l'espace de Sobolev des applications à énergie finie. On pose

$$H^1(\Omega; S^2) = \{u \in H^1(\Omega; \mathbf{R}^3), |u(x)| = 1 \quad \text{presque partout} \quad \}$$

et

$$H^1_\varphi(\Omega; S^2) = \{u \in H^1(\Omega; S^2), u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}$$

où $\varphi : \partial\Omega \to S^2$ est donnée, régulière. En utilisant une idée due à Hardt, Kinderlehrer et Lin ([HKL], voir aussi [HL1]) on peut montrer que $H^1_\varphi(\Omega; S^2)$ n'est jamais vide. Comme $H^1(\Omega; S^2)$ ne possède pas de structure différentiable, on ne peut définir d'emblée la notion de points critiques. Par contre, on peut considérer des applications qui sont critiques pour un certain type de variations. Plus précisément, soit $u \in H^1(\Omega; S^2)$ et soit $v \in C^\infty_c(\Omega; \mathbf{R}^3)$ une fonction test. Pour $t \in \mathbf{R}$ petit, considérons l'application $u(t) = \frac{u+tv}{|u+tv|}$; clairement pour t suffisamment petit $u(t) \in H^1(\Omega; S^2)$. On dira que u est faiblement harmonique si et seulement si

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} E(u(t)) = 0 \ , \quad \text{pour toute fonction test} \quad v \in C^\infty_c(\Omega; \mathbf{R}^3)$$

On peut alors calculer les équations d'Euler-Lagrange associées : (2) est équivalent à

$$(3) \qquad -\int \nabla u^i \nabla v^i + v^i u^i |\nabla u|^2 = 0 \quad \forall v \in C^\infty_c(\Omega; \mathbf{R}^3), i = 1, 2, 3$$

Si on désire que u vérifie une condition de Dirichlet, on arrive donc au système suivant :

$$(4) \qquad \begin{cases} -\Delta u^i = u^i |\nabla u|^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega, \mathbf{R}) \\ |u| = 1 \quad \text{p.p.} \\ u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Pour trouver des applications faiblement harmoniques satisfaisant des conditions de Dirichlet (c'est à dire vérifiant (4)), on peut minimiser la fonctionnelle $E(u)$ sur $H^1_\varphi(\Omega\,; S^2)$. Un argument classique de semi-continuité inférieure montre alors que

$$(5) \qquad \inf_{u \in H^1_\varphi(\Omega\,; S^2)} E(u) \quad \text{est atteint}$$

En introduisant de nouvelles fonctionnelles ayant des équations d'Euler-Lagrange associées semblables à celles de E on peut construire d'autres applications faiblement harmoniques différentes des minima de (5). On a le théorème suivant (Bethuel-Brezis-Coron [BBC]).

Théorème 1.— *Si φ n'est pas une application constante, le système (4) possède une infinité de solutions.*

En général la question de la régularité des systèmes elliptiques non linéaires (avec en particulier une non linéarité en $|\nabla u|^2 \in L^1$) est délicate et on ne possède que des réponses partielles. Dans le cas particulier qui nous intéresse, un résultat difficile du à Schoen et Uhlenbeck affirme que tout u qui réalise le minimum de (5) est régulier sauf, éventuellement, en un nombre fini de points. De plus Brézis, Coron et Lieb [BCL] ont démontré qu'au voisinage d'une singularité x_0, le comportement de u est donné par

$$u(x) = \pm R\frac{(x-x_0)}{|x-x_0|}$$

où R est une rotation qui dépend de x_0. Il est naturel de se demander si les singularités pour des minima de (5) apparaissent véritablement. La réponse est oui à la fois pour des raisons topologiques et pour des raisons énergétiques. En effet si le degré de φ est non nul, il n'existe pas de prolongement régulier de φ à l'intérieur de Ω à valeur dans S^2, et donc tout $u \in H^1_\varphi(\Omega; S^2)$ a au moins une singularité. Même si le degré de φ est nul, les minima de E peuvent avoir des singularités car celles-ci permettent de baisser l'énergie (voir section III).

On peut étendre la théorie de la régularité de Schoen et Uhlenbeck aux applications faiblement harmoniques construites par les méthodes du théorème 1. On a le résultat suivant (Bethuel Brezis [BB]).

Théorèmes.— *Si φ n'est pas une application constante, il existe un continuum d'applications faiblement harmoniques, régulières sauf en un nombre fini de points.*

Nous commençons par donner quelques propriétés des espaces $H'(\Omega; S^2)$ et $H'_\varphi(\Omega; S^2)$.

II Quelques propriétés de $H^1(\Omega; S^2)$

Il est bien connu que l'ensemble des fonctions $C^\infty(\bar\Omega; \mathbf{R})$ est dense dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega; \mathbf{R})$. Un exemple surprenant du à Schoen et Uhlenbeck montre qu'il n'en est pas de même pour $H^1(\Omega; S^2)$: si on suppose que l'origine appartient à Ω, et si on considère $u(x) = \frac{x}{|x|}$, il n'existe pas de suite de fonctions u_j appartenant à $C^\infty(\bar\Omega; S^2)$ qui converge vers u dans $H^1(\Omega; S^2)$. Supposons en effet par l'absurde qu'une telle suite existe : en utilisant le théorème de Fubini on peut alors montrer qu'il existe r_0 tel que u_j restreinte à S_{r_0} (où $S_{r_0} = \{x \in \mathbf{R}^3 |x| = r_0\} \subset \Omega$) converge vers u restreinte à S_{r_0} en norme H^1. Or le degré de u_j restreint à S_{r_0} est nul (car u_j se prolonge à l'intérieur de S_{r_0}) et celui de u vaut un. On obtient alors une contradiction car le degré est continu pour la norme H^1. De même si φ est telle que son degré est nul, on montre que $C^\infty_\varphi(\bar\Omega; S^2)$ n'est pas dense dans $H^1_\varphi(\Omega; S^2)$. On peut néanmoins approcher les applications de $H^1(\Omega; S^2)$ par des applications régulières sauf en un nombre fini de points. Plus précisément, posons

$$R = \{u \in H^1(\Omega; S^2), u \quad \text{est régulière en dehors d'un nombre fini de points} \quad \}$$

et

$$R_\varphi = \{u \in R, \ u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}$$

R est dense dans $H'(\Omega; S^2)$ et R_φ est dense dans $H'_\varphi(\Omega; S^2)$ (voir Bethuel-Zheng [BZ]). Si $u \in R$, et si $a_1, \cdots, a_k$ sont les singularités de u, le degré de la singularité de u en a_1 noté deg (u, a) est par définition le degré de u restreinte à une petite sphère centrée en a_i. L'invariance par homotopie montre que ce degré est indépendant du choix de la petite sphère. Si $u \in R_\varphi$ et si de plus $\deg \varphi = 0$, alors la longueur d'une connexion minimale connectant les singularités a été introduite dans [BCL] et est donnée par

$$L(u) = \min_\sigma \sum_{i=1}^{k} d(p_i, n_{\sigma(i)}) \tag{6}$$

où $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ représentent les singularités de degré positif (comptés selon leur multiplicité), $(n_y, n_2, \cdots, n_k)$ les singularités de degré négatif, d est la distance géodésique dans Ω, et le minimum est pris sur toutes les permutations possibles des entiers $\{1, 2, \cdots, k\}$ (comme $\deg \varphi = 0$, le nombre de singularités de degré positif est égal au nombre de singularités de degré négatif).

Pour $u \in H^1(\Omega; S^2)$, le champ de vecteurs $D(u)$ défini par

$$D(u) = (u.u_y \wedge u_z\ , u.u_z \wedge u_x, u.u_x \wedge u_y) \in L^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$$

joue un rôle important (voir [BCL]). Si $u \in R$ (avec pour singularités $a_1, a_2, \cdots a_k$), alors

$$\mathrm{div} D(u) = 4\pi \sum_{i=1}^{k} \deg(u, a_i) \delta_{a_i}.$$

Si $u \in R_\varphi$ alors (voir [BCL])

$$L(u) = \frac{1}{4\pi} \sup_{\substack{\xi : \Omega \to \mathbf{R} \\ \|\nabla \xi\|_\infty \leq 1}} \left\{ \int_\Omega D(u).\nabla \xi dx - \int_{\partial\Omega} (Jac\varphi) \zeta d\sigma \right\} \tag{7}$$

On voit clairement que le membre de droite de l'égalité (7) a un sens pour tout $u \in H'_\varphi(\Omega; S^2)$, et on peut ainsi utiliser (7) comme une définition de L pour un u quelconque dans $H'_\varphi(\Omega; S^2)$. On montre (voir [BBC]) que L est continue (et même localement Lipschitz) sur H'_φ.

III Phénomène de gap et énergies relaxées.

Hardt et Lin [HL2] ont montré qu'il existe des applications $\varphi : \partial\Omega \to S^2$ régulières de degré nul, telles que

$$\min_{u \in H'_\varphi(\Omega;S^2)} E(u) \; < \; \inf_{u \in C^1_\varphi(\bar{\Omega};S^2)} E(u) \tag{8}$$

En choisissant φ convenablement on peut rendre le membre de gauche aussi petit que l'on veut et le membre de droite aussi grand que l'on veut. Ainsi tout minimum absolu de l'énergie a des singularités. Un problème intéressant est de savoir si

$$\inf_{u \in C^1_\varphi(\bar{\Omega};S^2)} E(u) \quad \text{est atteint.} \tag{9}$$

Ce problème reste ouvert : si la réponse est positive, on obtiendrait alors une application harmonique de Ω dans S^2 prolongeant φ (ce problème plus simple est également ouvert). Une des principales difficulté est que, si on prend une suite minimisante pour (9) convergeant faiblement vers $\bar{u} \in H^1_\varphi(\Omega; S^2)$ on ne sait pas si $\bar{u}$ est régulier. En fait on peut même montrer que pour toute application $u \in H'_\varphi(\Omega; S^2)$ il existe une suite $u_n \in C^\infty_\varphi(\Omega; S^2)$ telle que u_n converge faiblement vers u. Supposons pour simplifier que u n'a que deux singularités P (de degré +1) et N (de degré -1). On peut construire (voir [B]) une application u_n régulière, égale à u en dehors d'un petit voisinage de la géodésique joignant P et N et telle que

$$E(u_n) = E(u_n) + 8\pi d(P,N) + 0(\frac{1}{n})$$

Si $u \in R_\varphi$, on généralise cette construction à toutes les géodésiques composant une connexion minimale, et on construit ainsi une suite $u_n \in C^1_\varphi(\bar{\Omega}; S^2)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ et

$$\lim_{n \to +\infty} E(u_n) = E(u) + 8\pi L(u). \tag{10}$$

Finalement par densité de R_φ dans $H'_\varphi(\Omega; S^2)$ et en utilisant la continuité de L, on peut étendre la construction de u_n à tout $u \in H'_\varphi(\Omega; S^2)$ et la propriété (10) reste vérifiée (voir [BBC]). Au vue de (10) il semble naturel d'étudier la fonctionnelle $F(u)$ définie par

$$F(u) = E(u) + 8\pi L(u).$$

La fonctionnelle F possède des propriétés remarquables :

a) F est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de H^1 et donc

$$\min_{u \in H^1_\varphi(\Omega;S^2)} F(u) \quad \text{est atteint} \quad . \tag{11}$$

b)

$$\inf_{u \in C^1_\varphi(\bar{\Omega};S^2)} E(u) \; = \; \min_{u \in H^1_\varphi(\Omega;S^2)} F(u) \tag{12}$$

En effet pour une application régulière $u \in C'_\varphi(\bar{\Omega}; S^2)$

$$L(u) = 0 \quad \text{et donc} \quad E(u) = F(u). \quad \text{D'où} \quad \inf_{u \in C'_\varphi(\bar{\Omega}; S^2)} E(u) \geq \min_{u \in H'_\varphi} F(u)$$

L'inégalité inverse résulte directement de (10).

c) Tout u qui réalise (10) est une application faiblement harmonique (i.e. vérifie le système (4)). En effet, soit $v \in C_c^\infty(\Omega; \mathbf{R}^3)$ une fonction test et pour t suffisamment petit $u(t) = \frac{u+tv}{|u+tv|}$. Comme u réalise le minimum de F on a

$$\frac{d}{dt} F(u(t)) = 0 \,. \tag{13}$$

Or, pour tout $u \in H'_\varphi(\Omega; S^2), L(u(t)) = L(u)$. La propriété est claire lorsque u n'a qu'un nombre fini de singularités ponctuelles (car les singularités de $u(t)$ sont exactement celles de u), et se déduit dans le cas général en utilisant la densité de R_φ et la continuité de L. De (13) on déduit donc que

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = 0$$

ce qui signifie que u est faiblement harmonique.

Remarquons que la propriété (10) et la semi-continuité inférieure de F entraîne

$$F(u) = \inf(\liminf_{v_n \to u} \int_\Omega |\nabla v_n|^2)$$

où l'inf est pris sur l'ensemble des suites v_n de $C^\infty(\bar{\Omega}; S^2)$ avec $v_n = \varphi$ sur $\partial\Omega$. Remarquons également que si u réalise le minimum de (9) alors u réalise (11) et qu'inversement si u réalise (11) et si u est régulière, alors u réalise (9). Ainsi le problème (9) est équivalent au problème de la régularité des minima de F. Jusqu'à présent, seuls des résultats de régularité partielle ont pu être obtenus : Giaquinta, Modica et Souček [GMS] ont montré que la mesure de Hausdorf de dimension 1 du lieu singulier des minima de F était localement finie.

Supposons maintenant que la donnée au bord φ induise un phénomène de gap (8). On peut alors montrer que les u qui réalisent (11) ne sont pas des minima absolus de l'énergie. Soit en effet u un minimum absolu de l'énergie ; supposons par l'absurde que u réalise (11). Nous allons utiliser un autre type de variation que celle utilisée pour obtenir les équations d'Euler-Lagrange. Soit $\eta(t)$ une famille à un paramètre de difféomorphisme de Ω satisfaisant $\eta(0) = Id_{|\Omega}$ et $\eta(t) = Id_{|\partial\Omega}$ sur $\partial\Omega$, pour tout $t \in [-1, +1]$. Posons $u(t) = u \circ \eta(t)$. Comme u est un minimum absolu de l'énergie E

$$\frac{d}{dt} E(u(t)) = 0$$

Comme on suppose par l'absurde que u est un minimum de F on doit avoir également

$$\frac{d}{dt} F(u(t)) = 0$$

et donc

$$\frac{d}{dt}L(u(t)) = 0 \ . \tag{14}$$

Comme φ induit un gap, u a des singularités. Soit x_0 une de ces singularités. Dans une connection minimale x_0 est connectée à une autre singularité x_1. Soit e le vecteur unitaire tangent en x_0 à la géodésique reliant x_0 et x_1 dirigé vers x_1. Soit $X \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ un champ de vecteur dont le support est un voisinage de x_0 ne contenant pas d'autres singularités, et tel que $X(x_0) = e$. Soit $\eta(t)$ le flot correspond. L'application $u(t)$ a les mêmes singularités que u, sauf pour x_0 qui est remplacé par $\eta(t)(x_0)$. Il en résulte que

$$L(u(t)) = L(u) - t + o(t)$$

Ceci contredit (14).

Ainsi les minima de E et de F sont différents, et donc lorsque φ induit un gap (8), le système (4) a au moins deux solutions.

IV L'existence d'une infinité de solutions

IV.A. On suppose dans cette partie que deg $(\varphi) = 0$, **et que** φ **induit un gap (8).**

Pour $\lambda \in [0,1]$ la fonctionnelle définie sur $H'_\varphi(\Omega; S^2)$

$$F_\lambda(u) = E(u) + 8\pi\lambda L(u), \quad \lambda \in [0,1]$$

a été introduite dans [BBC] et possède des propriétés similaires à celles de $F = F_1$:

- F_λ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de H^1 et donc

$$\min_{u \in H'_\varphi(\Omega; S^2)} F_\lambda(u) \quad \text{est atteint} \tag{15}$$

- Les minima de F_λ sont des applications faiblement harmoniques. Pour $\lambda < 1$, on a le résultat de régularité partielle concernant les minima de F_λ (voir Bethuel-Brezis [BB]).

Théorème 3.— *Soit u un minimum pour F_λ, pour $\lambda < 1$. Alors u est régulière en dehors d'un nombre fini de singularités ponctuelles.*

La preuve du théorème 3 comporte plusieurs étapes :

-1) On démontre que u satisfaisant une inégalité de Hölder inversée ; plus précisément on montre qu'il existe des constantes $q > 2$ et C (ne dépendant que de λ) telles que

$$\left(\fint_{B_t} |\nabla u|^q\right)^{1/q} \leq C\left(\fint_{B_{2r}} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \tag{16}$$

pour chaque boule B_r telle que $B_{2r} \subset \Omega$. L'intérêt de telles inégalités a été mis en évidence par Gehring [Ge] et a été utilisée extensivement en théorie de la régularité (voir le livre de

Giaquinta [G] et ses références). Pour démontrer (16) nous utilisons également une idée de Hardt Kinderlehrer et Lin [HKL].

2) On utilise cette propriété pour démontrer un lemme de "ε-régularité" : Il existe $\varepsilon_0 > 0$ (ne dépendant que de λ) telle que si

$$\frac{1}{r}\int_{B_r} |\nabla u|^2 < \varepsilon_0$$

Pour une balle $B_r \subset \Omega$, alors u est régulière sur $Br/4$.

3) On conclut, en utilisant une technique de blow-up, similaire à celle employée par Schoen et Uhlenbeck [SU1], que les singularités de u sont isolée à l'intérieur de Ω. Enfin on prouve la régularité au bord en utilisant des techniques de Jost et Meier [IM] et [SU2].

Remarquons que nos arguments ne s'appliquent pas au cas $\lambda = 1$.

Il est intéressant d'étudier le comportement de u au voisinage d'une de ses singularités. Soit x_0 une singularité de u. Il existe une application régulière $\omega : S^2 \to S^2$ harmonique (c'est à dire vérifiant $-\Delta_{s^2} w = w|\nabla w|^2$) et donc conforme telle que, près de x_0

$$u(x) \simeq \omega(\frac{x - x_0}{|x - x_0|}) \quad (\omega \quad \text{dépendant de} \quad x_0) \tag{17}$$

En reprenant les arguments de [BCL], on peut montrer qu'il existe $\lambda^* < 1$ tel que si $\lambda < \lambda^*$, et si u est un minimum pour F_λ, le degré des singularités (et donc des applications ω) est +1 ou -1. Pour $\lambda \geq \lambda^*$, on ne sait pas si les minima de F_λ peuvent avoir des degrés différents de ± 1.

Pour démontrer l'existence d'un continuum d'applications faiblement harmoniques (dans le cas spécial considéré dans ce paragraphe, à savoir des $\varphi = 0$ et φ induit un gap)il suffit de faire varier λ et de montrer que les applications obtenues sont différentes deux à deux. On a le théorème suivant

Théorème 4.— *Soit $0 < \lambda < 1$ et u un minimum de F_λ tel que u a des singularités ponctuelles. Alors u n'est pas un minimum pour $F_{\lambda'}$ où $\lambda' \neq \lambda$.*

Le théorème 4 se démontre en utilisant des techniques similaires à celles employées pour démontrer que les minima de E ne sont pas des minima de $F = F_1$ (section III) lorsque φ induit un gap.

Comme par hypothèse φ induit un gap, il est facile de vérifier qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour $\lambda < \lambda_0$, les minima de F_λ ont tous des singularités. Le théorème 2 en découle dans le cas spécial considéré dans ce paragraphe.

IV.B L'existence d'une infinité d'applications faiblement harmoniques dans le cas général.

On suppose ici seulement que $\varphi \not\equiv C^{te}$. Soit u et v appartenant à $H^1_\varphi(\Omega; S^2)$. Posons

$$L(u,v) = \frac{1}{4\pi} \sup_{\substack{\xi:\Omega\to\mathbf{R} \\ \|\nabla\xi\|_\infty \leq 1}} \int (D(u) - D(v))\nabla\xi$$

Dans le cas où u et v sont dans R_φ (c'est à dire régulières en dehors d'un nombre fini de points), il y a une manière simple d'interpréter $L(u,v)$ (voir [BBC]). Notons $\{p_i\}$ l'ensemble des singularités du degré positif de u avec les singularités de degré négatif de v, et $\{n_i\}$ l'ensemble des singularités de degré négatif de u avec les singularités de degré positif de v. Alors $L(u,v)$ est la longueur d'une connexion minimale associée à (p_i, n_i).

Fixons v dans H'_φ, et pour $\lambda \in [0,1]$ considérons la fonctionnelle

$$G_\lambda(u) = E(u) + 8\pi\lambda L(u,v) \quad \text{pour} \quad u \in H'_\varphi$$

alors G_λ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, et les minima de G_λ sont des applications faiblement harmoniques. De plus, si $u \in R_\varphi$ et si $\lambda < 1$, on peut montrer que les minima de G_λ sont réguliers en dehors d'un nombre fini de singularités ponctuelles (voir [BB]). En choisissant convenablement v (c'est ici que l'hypothèse $\varphi \not\equiv C^{te}$ intervient), puis en faisant varier λ on peut alors construire un continuum d'applications faiblement harmoniques, n'ayant qu'un nombre fini de singularités ponctuelles, ce qui démontre les théorèmes 1 et 2 dans le cas général.

V Conclusion et problèmes ouverts.

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'un des problèmes les plus intéressant est de savoir si les minima de la fonctionnelle "relaxée" sont réguliers, ce qui permettrait de construire des applications harmoniques régulières vérifiant une valeur au bord donnée (de degré nul). Un problème qui semble lié au précédent est de savoir si l'on peut construire une application harmonique ayant des singularités prescrites. Plus précisément on se donne un domaine Ω, k points $a_1, \cdots a_k$ de Ω, k nombres $d_1, \cdots, d_k$, une donnée au bord $\varphi : \partial\Omega \to S^2$ telle que $\deg\varphi = \Sigma d_i$. On cherche à savoir s'il existe une application $u \in H'_\varphi(\Omega; S^2)$, faiblement harmonique, telle que :

$$- u \in C^\infty(\Omega \setminus \{a_1, \cdots, a_k\})$$
$$- \deg(u, a_i) = d_i$$

Seules quelques réponses partielles ont pu jusqu'à présent être apportées à ce problème. En particulier Mou [M] a montré qu'on pouvait construire une application harmonique ayant des singularités prescrites et des degrés prescrits au singularités, pour des domaines très particuliers dépendant de la configuration des singularités. Poon [P] a étudié un cas spécial $\Omega = B^3, \varphi = Id_{|S^2}$, et a montré qu'on pouvait construire, pour tout $x_0 \in B^3$ une application harmonique n'ayant que x_0 comme singularité, et valant $\varphi = Id_{|S^2}$ sur le bord.

Références

[B] F. Bethuel : A characterization of maps in $H^1(B^3, S^2)$ which can be approximated by smooth maps, AIHP analyse non linéaire à paraître.

[BB] F. Bethuel et H. Brezis, Regularity of minimizers of relaxed problems for harmonic maps.

[BBC] F. Bethuel, H. Brezis, et J.M. Coron : Relaxed energies for harmonic maps, à paraître dans "Actes du congrès problèmes variationnels Paris 13-18 Juin 1988" Birkhauser Ed.

[BCL] H. Brezis, J.M. Coron, E.H. Lieb : Harmonic maps with defects Comm. Math. Phys. **107** (1986) p.649-705.

[BZ] F. Bethuel et X. Zheng : "Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces", J. Funct Anal. 80 (1988) p. 60-75.

[G] M. Giaquinta, Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems, Princeton Univ. Press (1983).

[GMS] M. Giaquinta, G. Modica et J. Souček : The Dirichlet Energy of mappings with value into the sphere. Manuscripta Math.

[JM] J. Jost et M. Meier : "Boundary regularity for minima of certain quadratic functionals" Math Ann 262 (1983) 549-561.

[HKL] R. Hardt, D. Kinderlehrer et F.H. Lin : Stable defects of minimizers of constrainded variational principles Ann. IHP Analyse non linéaire (1988).

[HL1] R. Hardt et F.H. Lin : Mappings minimizing the L^p norm of the gradient. Comm. pure Appl. Math **40** (1987) p.556-588.

[HL2] R. Hardt et F.H. Lin : A remark on H^1 mappings Manuscripta Math **56** (1986) p.1-10.

[M] L. Mou : Harmonic maps with prescribed finite singularities, à paraître.

[P] C.C. Poon : Some new harmonic maps from B^3 to S^2, prépublication.

[SU1] R. Schoen et K. Uhlenbeck : A regularity theorie for harmonic maps J. Diff. Geom. 17 (1982) P.307-335.

[SU2] R. Schoen et K. Uhlenbeck : Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps" J. Diff. Geom. 18 (1983) 253-268.

Fabrice Béthuel
ENPC-CERMA
La Courtine
93167 Noisy le Grand Cedex