Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J.-Y. Chemin

Autour du problème des vortex patches

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. nº 11, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A13_0>

CENTRE DE MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

AUTOUR DU PROBLEME DES VORTEX PATCHES

J.-Y. CHEMIN

Exposé n°XI

19 Décembre 1989

INTRODUCTION

On s'intéresse, dans ce travail, au mouvement des particules d'un fluide incompressible dans l'espace à deux dimensions. Le mouvement est décrit par le champ des vitesses $v(t,x)$ qui est la vitesse d'une particule située au point x de $\mathbf{R}^2$, à l'instant t, champ qui doit vérifier le système suivant :

$$(E) \qquad \begin{cases} \dfrac{D}{Dt}v = -\nabla p \\ \operatorname{div}\, v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0. \end{cases}$$

où $p(t,x)$ est la pression dans le fluide, à l'instant t, et au point x et où $\frac{D}{Dt} = \partial_t + v.\nabla = \partial_t + \Sigma_{i=1}^2 v_i \partial_i$.

Vu que la divergence de v est nulle à tout instant (c'est l'expression du caractère incompressible du fluide), on peut calculer la pression en dérivant le système et en utilisant la nullité de la divergence, il vient alors $\Delta p = -tr(dv)^2$. Le système (E) peut donc être écrit comme

$$(E) \ : \begin{cases} \dfrac{D}{Dt}v = \nabla\Delta^{-1}tr(dv)^2 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

Il est à noter que cette formulation contient la nullité de la divergence du champ v (si bien sûr div $v_0 = 0$).

Notons dès maintenant le fait suivant, qui jouera un rôle important dans ce travail :

on peut interpréter l'opérateur $\nabla\Delta^{-1}(dv)^2$ comme un opérateur pseudo-différentiel non linéaire d'ordre 0.

De plus nous conviendrons de désigner par $p(v,w)$ l'opérateur $\Delta^{-1}tr(dv.dw)$; enfin, observons les idendités suivantes, qui seront très utiles :

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \text{si div } v = 0 \\ p(v,w) = \Sigma_{i,j}\partial_i\Delta^{-1}(v_j\partial_j w_i) \end{cases}$$

$$(0.2) \qquad \begin{cases} \text{si div } v = \text{div } w = 0 \\ p(v,w) = \Sigma_{i,j}\partial_i\partial_j\Delta^{-1}(v_j w_i) \end{cases}$$

Une autre quantité joue un rôle clef dans l'étude de cette équation : c'est le tourbillon $\omega = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$. Deux faits expliquent son importance :

D'une part, si l'on dérive le système (E) que l'on prend la partie antisymétrique du système obtenu, on trouve,

$$(0.3) \qquad \frac{D}{Dt}\omega = 0$$

C'est le point qui est typique de la dimension deux.

D'autre part, comme la divergence du champ v est nulle, on peut retrouver v à partir de ω par

$$(0.4) \qquad v = \nabla^{\perp}\Delta^{-1}\omega \ i.e. = \begin{cases} -\displaystyle\int (x_2 - y_2)|x-y|^{-2}\omega(y)dy \\ \displaystyle\int (x_1 - y_1)|x-y|^{-2}\omega(y)dy \end{cases}$$

Dans un premier temps, on se pose la question de l'existence de solution du système (E), qui soit suffisamment régulière pour assurer l'unicité dans leur classe de régularité. Comme nous le verrons plus tard, une hypothèse raisonnable à faire sur v_0 est de supposer que son tourbillon ω_0 est borné. Dans ce cas, même si ω_0 est une fonction $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, le champ v_0 n'est pas nécessairement L^2. En effet, si l'on considère un $\omega_0 \geq 0$, à support compact, alors, $|v_0(x)| \geq \frac{C}{|x|}$ pour $|x|$ assez grand. Il est cependant exclus de se passer de l'espace L^2. Nous considérerons donc des perturbations L^2 de solutions stationnaires bien choisies

Définition 0.1.— *On appelle tourbillon stationnaire (régulier) tout champ de vecteurs* σ *sur* $\mathbf{R}^2$ *tel que* $\sigma = (-x_2 f(r), x_1 f(r))$ *avec* $f(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho\omega(\rho)d\rho$ *et* $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$

Il est clair que σ est C^∞, que $\nabla\sigma$ est dans l'espace de Sobolev H^s pour tout réel s, et que σ est solution stationnaire du système (E).

En adaptant les méthodes introduites par Yudovitch dans [12], on démontre le

Théorème A.— *Soit* σ *un tourbillon stationnaire, on considère* $v_0 \in \sigma + L^2$ *tel que* $\omega(v_0) \in L^\infty \cap L^q$ *avec* $q < +\infty$. *Il existe alors une unique solution* v *de (E) appartenant à* $C(\mathbf{R}; \sigma + L^2)$ *telle que* $\omega \in L^\infty(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}; L^q)$. *De plus,* $v \in C^1(\mathbf{R}^3)$, $C^1(\mathbf{R}^d)$ *désignant les fonctions sur* $\mathbf{R}^d$, *bornées, telles que, pour tout* $(x,y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$; $|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C|y|$).

Ce résultat est bien connu dans le cas où $\sigma = 0$ (voir par exemple [3]). Pour la démonstration détaillée, nous renvoyons le lecteur à [6].

Nous allons nous intéresser au problème dit des poches de tourbillon (ou vortex patches en anglais). On suppose que la donnée initiale v_0 du système (E) a un tourbillon qui est la fonction caractéristique d'un domaine borné régulier D_0. Comme le tourbillon est conservé le long des trajectoires du champ v solution (éventuelle) de (E), il est aisé de calculer, à tout instant, v à partir du seul bord de D_t ; on a, par une formule de Green :

$$(0.5) \qquad v(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|x(t,\sigma) - x| \frac{\partial x}{\partial \sigma}(t,\sigma)d\sigma$$

où $x(t,\sigma)$ représente un paramétrage du bord de D_t. Comme $t \to x(t,s)$ est une courbe intégrale de v, il vient

$$(B) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}x(t,s) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log|x(t,\sigma) - x(t,s)| \frac{\partial x}{\partial \sigma}(t,\sigma)d\sigma \\ x(0,s) = x_0(s). \end{cases}$$

Il est assez facile de démontrer que, si $x(t,.)$ est de classe $C^{2-\delta}$ avec $\delta \in]0,1[$, alors $v(t,)$ est lipschitzienne. Si l'on démontre que le système (B) admet une solution régulière à temps petit, cela signifie qu'il existe une solution lipschitzienne à temps petit quand le tourbillon de la donnée initiale est la fonction caractéristique d'un domaine à bord $C^{2-\delta}, \delta \in]0,1[$.

Nous allons, en oubliant le système (B), démontrer cela. On est alors conduit au théorème suivant

Théorème B.— *Soit $v_0 \in \sigma + L^2$ un champ de vecteurs à tourbillon borné. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs X_0 à coefficients $C^{1-\delta}$ et à divergence nulle, ainsi qu'un réel strictement positif ε tels que*

- *X_0 ne s'annule pas près du support singulier C^ε de ω_0.*
- *$X_0(x,D)\omega_0 \in C^{-\delta}$*
  Alors, il existe un réel strictement positif θ^* maximal tel que
- *le système (E) admette une unique solution $C([0,\theta^*[;\sigma + L^2)$ telle que, pour tout $\theta < \theta^*, v \in \mathrm{Lip}([0,\theta] \times \mathbf{R}^2)$*
- *$X_0(x,D)\psi \in (\mathrm{Lip}[0,\theta]; \mathrm{C}^{1-\delta})$*
- *Si $\theta^* < +\infty$, alors $\limsup\limits_{t \to \theta^*} \|\nabla v(t,.)\|_{L^\infty} = +\infty$.*

La démonstration détaillée de ce théorème fait l'objet du premier paragraphe. Remarquons d'emblée que ce théorème contient en particulier le fait que la donnée initiale est lipschitzienne. Ceci résulte d'un lemme dit d'opérance dans L^∞ qui dit essentiellement que l'on contrôle les dérivées secondes de $\Delta^{-1}\omega_0$ à l'aide de $\|\omega_0\|_{L^\infty}, \|X_0(x,D)\omega_0\|_{-\delta}$ et $\|X_0\|_{1-\delta}$. Pour démontrer le théorème B, il suffit alors, en utilisant ce lemme, de contrôler, pour des données initiales régulières, l'évolution en temps de ces quantités par une technique d'estimations a priori non linéaires, c'est à dire d'estimation sur des solutions régulières du système (E).

Le second paragraphe consiste à expliquer comment l'application conjointe de l'étude de l'action itérée de champs de vecteurs peu réguliers faite dans [6] et du théorème B ci-dessus permet de démontrer un théorème de régularité sur les solutions mises en évidence par le théorème C, qui contient en particulier le théorème suivant

Théorème C.— *Soit x_0 une fonction de classe $C^{k+2-\delta}$, avec $\delta \in]0,1[$. Il existe un réel strictement positif maximal θ^* et une fonction $x \in C^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\theta^*[; C^{k+2-\delta-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ telle que*

- *$x(t,s)$ soit solution de (B)*
- *Si $\theta^* < +\infty$, alors $\limsup\limits_{t \to \theta^*} \|x(t,.)\|_{1+\varepsilon} = +\infty$ pour tout $\varepsilon > 0$*

A propos de la seconde partie du théorème C ci-dessus, notons que des modélisations numériques semblent indiquer que $\theta^* < +\infty$ et qu'alors l'explosion des normes décrivant la régularité de la courbe est violente (voir [8]). Signalons enfin un résultat d'explosion asymptotique du gradient en norme L^∞ obtenu par S. Alinhac dans [2] pour une approximation quadratique du système (B).

Pour conclure cette introduction, nous rappelons quelques définitions et notations qui seront utilisées tout au long de ce travail.

Etant donné une partition de l'unité dyadique (i.e. une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ telle que $\chi = 1 - \Sigma_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}.) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$), on définit les quantités suivantes

- pour $q \geq 0$, $\Delta_q(\alpha) = \varphi(2^{-q}D)\alpha$, $\Delta_{-1}(\alpha) = \chi(D)\alpha$ et $S_q(\alpha) = \Sigma_{q\geq -1}\Delta_q(\alpha)$.
- On note T le paraproduit associé défini par $T_\alpha\beta = \Sigma_{q\geq -1}S_{q-N_0}(\alpha)\Delta_q(\beta)$ où N_0 est un entier assez grand pour que Supp $\chi(2^{-N_0}.)$ + Supp$\varphi \subset \mathbf{R}^{\mathrm{d}} \setminus \{0\}$.
- On note R l'opérateur de reste associé défini par

$$R(\alpha,\beta) = \Sigma_{q,q',|q-q'|\leq N_0}\Delta_q(\alpha)\Delta_{q'}(\beta)$$

On a alors la décomposition de Bony d'un produit :

$$\alpha\beta = T_\alpha\beta + T_\beta\alpha + R(\alpha,\beta)$$

- On caractérise les espaces de Hölder et de Sobolev de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &u \in C^\sigma \Leftrightarrow \|\Delta_q(u)\|_{L^\infty} \leq C2^{-q\sigma} \\ &u \in H^\sigma \Leftrightarrow |\Delta_q(u)|_{L^2} \leq c_q 2^{-q\sigma} \quad \text{avec} \quad (c_q)_{q\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}). \end{aligned}$$

- On notera $\|\alpha\|_\sigma$ la norme $\sup\limits_{q\geq -1} 2^{q\sigma}\|\Delta_q(\alpha)\|_{L^\infty}$ sur C^σ et $|\alpha|_\sigma$ la norme $(\Sigma_{q\geq -1}2^{2q\sigma}|\Delta_q(\alpha)|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ sur H^σ.

Pour les propriétés d'opérance du paraproduit et du reste, pour l'étude de la commutation entre T_α et un multiplicateur de Fourier, nous renvoyons à l'article fondamental de J.-M. Bony [4].

Enfin, nous noterons Lip($[0,\theta]$; E) (resp Lip$_\ell$($[0,\theta]$; E)) l'espace des fonctions lipschitziennes (resp à dérivées $\ell - 1$ lipschitziennes) de $[0,\theta]$ dans E.

1. Existence locale de solutions lipschitziennes.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème C. Elle comprendra quatre étapes :

- Régularisation de la donnée initiale
- Lemme d'opérance dans L^∞
- Estimation a priori non linéaire
- Passage à la limite

1.1 Régularisation de la donnée initiale

Soit v_0 un champ de vecteurs de $\sigma + L^2$ dont le tourbillon est borné. On régularise v_0 comme au premier paragraphe en posant $v_{0,n} = S_n(v_0)$. Il est clair que $v_{0,n}$ est une suite de $\sigma + H^\infty$ telle que $v_{0,n} \to v_0$ dans $\sigma + L^2$ et que l'on a

$$\|\omega(v_{0,n})\|_{L^\infty} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty} \tag{1.1.1}$$

Le calcul paradifférentiel de Bony assure que l'on a

$$\|X_0(x,D)\omega_{0,n}\|_{-\delta} \leq \|X_0(x,D)\omega_0\|_{-\delta} + C\|X_0\|_{1-\delta}\|\omega_0\|_{L^\infty} \tag{1.1.2}$$

où $\|X_0\|_{1-\delta} = \mathrm{Max}\{\|X_{0,\alpha}\|_{1-\delta},\ X_{0,\alpha}$ décrivant l'ensemble des coefficients. Enfin, soit χ_0 une fonction $C^\varepsilon(\mathbf{R}^2)$ supportée dans $\{x/d(x,\gamma_0) < \alpha\}$, et valant 1 près de $\{x/d(x,\gamma_0) \leq \alpha/2\}$, γ_0 désignant le support singulier C^ε de ω_0, on a l'identité suivante :

$$(1-\chi_0)S_n(\omega_0) = \sum_{i=1}^{5} \mathcal{S}_i \quad \text{avec} \tag{1.1.3}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &= T_{S_n\omega}(1-\chi_0)\\
\mathcal{S}_2 &= R(1-\chi_0, S_n\omega)\\
\mathcal{S}_3 &= [S_n, T_{1-\chi_0}]\omega_0\\
\mathcal{S}_4 &= S_n(T_{\omega_0}(1-\chi_0) + R(1-\chi_0,\omega_0))\\
\mathcal{S}_5 &= S_n((1-\chi_0)\omega_0)
\end{aligned}$$

D'après les propriétés du paraproduit et du reste, on a $\|\mathcal{S}_i\|_\varepsilon \leq C\|\omega_0\|_{L^\infty}\|\chi_0\|_\varepsilon$ pour $i \in \{1,2,3,4\}$. D'où

$$\|(1-\chi_0)\omega_{0,n}\|_\varepsilon \leq \|(1-\chi_0)\omega_0\|_\varepsilon + C\|\omega_0\|_{L^\infty}\|\chi_0\|_\varepsilon \tag{1.1.4}$$

1.2 Lemme d'opérance dans L^∞

La régularité additionnelle sur ω suffisante pour que $d^2\Delta^{-1}\omega$ appartienne à L^∞ est décrite par le

Lemme 1.2.— *Soient X un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^2$ à coefficients $C^{1-\delta}, \delta \in]0,1[$, A un fermé de $\mathbf{R}^2$, α et ε deux réels strictement positifs, et $\bar{\chi}$ une fonction C^ε valant 1 près de $\{x/d(x,A) \leq \alpha/2\}$ et supportée près dans $\{x/d(x,A) < \alpha\}$, on suppose que*

$$I_{A,\alpha}(X) = \inf\{|X(x)|, x/d(x,A) \leq \alpha\}$$

soit non nul. On a alors

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq{}& C_\delta \|X\|_{L^\infty} I_{A,\alpha}(X)^{-2}\{\|X(x,D)\omega\|_{-\delta} + \|X\|_{1-\delta}\|\omega\|_{L^\infty}\}\\
&+ C\alpha^{-2}\|\omega\|_{L^\infty} + C_\varepsilon\|(1-\bar{\chi})\omega\|_\varepsilon + C_\alpha\|v\|_{L^\infty}\ .
\end{aligned}$$

où v se déduit de ω par (0.4).

Démonstration : Notre démarche sera la suivante : après avoir démontré

$$(1.2.1)\quad \||X(x)|^2\partial_i\partial_j\Delta^{-1}(1-\chi(D))\omega\|_{L^\infty} \le C_\delta\|X\|_{L^\infty}(\|\omega\|_{L^\infty}\|X\|_{1-\delta} + \|X(x,D)\omega\|_{-\delta})$$

on localise près du fermé A, non sans avoir préalablement réglé le problème des basses fréquences.

On notera (1.2.2) $\phi = (1-\chi(D))\Delta^{-1}\omega$. Pour démontrer (1.2.1) on démontrera préalablement les deux inégalités suivantes :

$$(1.2.3)_{(i)}\qquad \|X(x,D)\partial_i\phi\|_{L^\infty} \le C(\|X(x,D)\omega\|_{-\delta} + \|X\|_{1-\delta}\|\omega\|_{L^\infty})$$

Ceci nécessite un comptage fin des dérivées ; on va donc utiliser le calcul paradifférentiel. On a l'identité suivante

$$(1.2.4)\qquad X(x,D)\partial_i\phi = \sum_{j=1}^{6}\Phi_j \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \partial_i[T_X,\Delta^{-1}]\omega\\
\Phi_2 &= \partial_i\Delta^{-1}(1-\chi(D))X(x,D)\omega\\
\Phi_3 &= \partial_i\Delta^{-1}(1-\chi(D))\{\Sigma_k T_{\partial_k\omega}X^{(k)} + \partial_k R(\omega,X^{(k)})\}(\text{car div X} = 0)\\
\Phi_4 &= \Sigma_k T_{\partial_k\partial_i\phi}X^{(k)}\\
\Phi_5 &= \Sigma_k R(\partial_k\partial_i\phi, X^{(k)})
\end{aligned}$$

D'après les propriétés du calcul paradifférentiel, on a

$$(1.2.5)\qquad \|\Phi_i\|_{1-\delta} \le C_\delta\|\omega\|_0\|X\|_{1-\delta} \quad \text{pour} \quad i\in\{1,3,5\}$$

$$\|\Phi_2\|_{1-\delta} \le C_\delta\|X(x,D)\omega\|_{1-\delta}$$

et

$$\|\Phi_4\|_{1-\delta'} \le C_\delta\|\omega\|_0\|X\|_{1-\delta} \quad \text{pour tout} \quad \delta' > \delta$$

d'où l'inégalité (1.2.3).

Les inégalités $(1.2.3)_i$ assurent que l'on a, par une évidente combinaison linéaire :

$$(1.2.6)\qquad \|(X^{(1)})^2\partial_1^2\phi - (X^{(2)})^2\partial_2^2\phi\|_{L^\infty} \le C\|X\|_{L^\infty}\|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1}$$

Or, d'après (1.2.2), il vient

$$(1.2.7)_{(i)}\qquad \||X(x)|^2\partial_i^2\phi\|_{L^\infty} \le C\|X\|_{L^\infty}(\|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1} + \|X\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty})$$

A nouveau grâce à une évidente combinaison linéaire des inégalités $(1.2.3)_{(i)}$, on obtient

$$(1.2.8)\qquad \||X(x)|^2\partial_1\partial_2\phi\|_{L^\infty} \le C(\|X\|_{L^\infty}\|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1} + \|X\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty})$$

L'élimination des basses fréquences est tout à fait classique. On décompose ∇v ainsi :

$$\nabla v = \chi(D)\nabla v + (1-\chi(D))\nabla v \tag{1.2.9}$$

Or $\|\chi(D)\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{L^\infty}$.

Reste maintenant la localisation au voisinage de A. Soit $\tilde{\chi}$ une fonction continue valant 1 près du support de $\bar{\chi}$ et supportée dans $\{x/d(x,A) < \alpha\}$, on a

$$\|\bar{\chi}(1-\chi(D))\nabla v\|_{L^\infty} \leq C I_{A,\alpha}(X)^{-2}\|X(x)^2 d^2\phi\|_{L^\infty} \tag{1.2.10}$$

Il résulte alors de (1.2.7) et de (1.2.8) que l'on a

$$\|\tilde{\chi}(1-\chi(D))\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\|X\|_{L^\infty} I_{A,\alpha}(X)^{-2}(\|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1} + \|X\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty}) \tag{1.2.11}$$

On va maintenant utiliser le caractère pseudolocal des opérateurs pseudodifférentiels. On a

$$(1-\tilde{\chi})(1-\chi(D))\nabla v = \Omega_1 + \Omega_2 \quad \text{avec} \tag{1.2.12}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= (1-\tilde{\chi})d^2(1-\chi(D))\Delta^{-1}(\bar{\chi}\omega)\\
\Omega_2 &= (1-\tilde{\chi})d^2(1-\chi(D))\Delta^{-1}((1-\bar{\chi})\omega)
\end{aligned}$$

Par intégration par parties dans l'intégrale définissant $d^2(1-\chi(D))\Delta^{-1}(1-\chi)\omega$, on obtient :

$$\|(1-\tilde{\chi})d^2(1-\chi(D))\Delta^{-1}(\bar{\chi}\omega)\|_{L^\infty} \leq C\alpha^{-2}\|\omega\|_{L^\infty}. \tag{1.2.13}$$

Enfin, l'opérance des opérateurs pseudodifférentiels dans les espaces de Hölder garantit :

$$\|(1-\tilde{\chi})d^2(1-\chi(D))\Delta^{-1}((1-\bar{\chi})\omega)\|_{L^\infty} \leq C\|(1-\bar{\chi})\omega\|_\varepsilon \tag{1.2.14}$$

d'où le lemme.

1.3 Estimation a priori non linéaire

Lemme 1.3.1.— *Soient X_0 un champ de vecteurs non identiquement nul, à coefficients $C^{1-\delta}$ et à divergence nulle, A_0 un fermé non vide et α_0 un réel tel que $I_{A_0,\alpha_0}(X_0) > 0$, et χ_0 une fonction $C^{1-\delta}$ valant 1 près de $\{x/d(x,A_0) < \alpha_0/2\}$ et supportée dans $\{x/d(x,A_0) < \alpha_0\}$, on considère alors une solution $v \in C^\infty(\mathbf{R};\sigma + H^\infty)$ du système (E) : il existe alors deux constantes θ et M strictement positives, ne dépendant que de $\|X_0\|_{L^\infty}, I_{A_0,\alpha_0}(X_0), \|X_0\|_{1-\delta}, \|\omega_0\|_{L^\infty}$, $\|X_0(x,D)\omega_0\|_{-\delta}, \|\sigma\|_{L^\infty}, |v_0-\sigma|_0$ et $\|\chi_0\|_\varepsilon$ telles que $\|\nabla v\|_{L^\infty([0,\theta]\times\mathbf{R}^2)} \leq M$.*

Démonstration : L'idée de base est la suivante : on utilise le lemme 1.2.1, tout en essayant de propager les contrôles sur les quantités majorantes dans l'énoncé du lemme 1.2.1. On se place sur un intervalle $[0,\theta]$ tel que $\|\nabla v\|_{L^\infty([0,\theta]\times\mathbf{R}^2)} \leq M$, ce qui est possible si l'on choisit M assez grand. Ce qui va propager la régularité, c'est l'équation du flot :

$$
\begin{cases} \partial_t\psi(t,x) = v(t,\psi(t,x)) \\ \psi(0,x) = x \end{cases} \tag{1.3.1}
$$

On notera par X_t le transporté de X_0 par $\psi(t,.)$. Rappelons que X_t se réduit de X_0 et de ψ par la formule suivante :

$$
X_t = \Sigma_j(X_0(x,D)\psi^{(j)})_{\psi^{-1}(t,x)}\partial_j, \tag{1.3.2}
$$

et que div X_t est nulle.

Majoration de $\|d\psi(t,.)\|_{L^\infty}$

Elle est tout à fait standard. Par différenciation en x et intégration en t de 1.3.1, il vient

$$
\|d\psi\|_{L^\infty([0,t]\times\mathbf{R}^2)} = \|d\psi^{-1}\|_{L^\infty([0,t]\times\mathbf{R}^2)} \leq e^{Mt} \quad \text{pour tout} \quad t\in[0,\theta] \tag{1.3.3}
$$

Majoration de $\|X_t\|_{L^\infty}$

D'après (1.3.2) et (1.3.3), on a trivialement

$$
\|X_t\|_{L^\infty} \leq \|X_0\|_{L^\infty} e^{Mt} \quad \text{pour tout} \quad t\in[0,\theta] \tag{1.3.4}
$$

Minoration de $I_{A_t,\alpha_t}(X_t)$ et transport de la fonction de troncature χ_0.

On commence par définir α_t, A_t et χ_t par :

$$
\alpha_t = \alpha_0 e^{-Mt}, \chi_t(x) = \chi_0(\psi^{-1}(t,x)) \quad \text{et} \quad A_t = \psi(t,A_0) \tag{1.3.5}
$$

On applique le champ X_0 à l'équation du flot (1.3.1) et par intégration en temps, on obtient

$$
(X_0(x,D)\psi)(t,x) = \exp\left(\int_0^t dv(\tau,\psi(\tau,x))d\tau\right).X_0(x). \tag{1.3.6}
$$

De plus, il est clair que Supp $\chi_t \subset \{x/d(x,A_t) < \alpha_t\}$ et que

$$
\mathrm{Supp}(1-\chi_t)\cap\{x/d(x,A_t)\leq\alpha_t/2\} = \emptyset,
$$

d'où il vient d'après (1.3.3)

$$
\begin{cases} I_{A_t,\alpha_t}(X_t) \geq I_{A_0,\alpha_0}(X_0)e^{-Mt} \\ \|(1-\chi_t)\omega_t\|_\varepsilon \leq \|(1-\chi_0)\omega_0\|_\varepsilon e^{Mt} \\ e^{-Mt}d(\psi^{-1}(t,x),A_0) \leq d(x,A_t) \leq d(\psi^{-1}(t,x),A_0)e^{Mt} \end{cases} \tag{1.3.7}
$$

Majoration de $\|v(t,.)\|_{L^\infty}$.

On décompose v suivant les hautes et les basses fréquences ; d'après (0.4), il vient

$$\|v(t,.)\|_{L^\infty} \leq \|\sigma\|_{L^\infty} + |v_0 - \sigma|_0 + \|\omega_0\|_{L^\infty} \tag{1.3.8}$$

Majoration de $\|X_t(x,D)\omega(t,.)\|_\delta$ (et de $\|\omega(t,.)\|_{L^\infty}$)

Vu que X_t et $\frac{D}{Dt}$ commute, et que l'on a $\frac{D}{Dt}\omega = 0$, il est clair, d'une part que $\|\omega(t,.)\|_{L^\infty} = \|\omega_0\|_{L^\infty}$ et que d'autre part l'on a

$$\frac{D}{Dt}X_t\omega = 0 \tag{1.3.9}$$

Pour estimer $\|X_t(x,D)\omega(t,.)\|_{-\delta}$ à partir de $\|X_0(x,D)\omega_0\|_{-\delta'}$ il faut démontrer un théorème de propagation de la régularité höldérienne dans une zone négative.

Théorème de propagation de la régularité höldérienne 1.3.2.— *Soit v un champ de vecteurs à divergence nulle tel que $\|\nabla v\|_{L^\infty([0,\theta]\times\mathbf{R}^2)} \leq M$; pour tout $\delta \in]0,1[$, il existe une constante C strictement positive telle que, si $\lambda \geq CM$, alors*

$$\|e^{-\lambda t}f(t,.)\|_{L^\infty([0,\theta],C^{-\delta})} \leq 2\|f_0\|_{-\delta} + \|e^{-\lambda t}(\partial_t + v\nabla)f\|_{L^1([0,\theta];C^{-\delta})}$$

Démonstration : L'idée est de se ramener à une zone de régularité strictement comprise entre 0 et 1. On pose $g = \partial_t f + v.\nabla f$ et $\bar{f}(\text{resp}\bar{g}) = \Lambda f(\text{resp} g)$ avec $\Lambda = (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$. On utilise alors le calcul paradifférentiel de Bony d'où il ressort :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\bar{f} + v.\nabla\bar{f} = R(f) + \bar{g} \quad \text{avec} \\ R(f) = \Sigma_j\{-\Lambda T_{\partial_j f}v_j - \Lambda\partial_j R(v_j,f) + [\Lambda, T_{v_j}]\partial_j f\} \end{array}\right. \tag{1.3.10}$$

$$+T_{\partial_j\bar{f}}v_j + R(\partial_j\bar{f}, v)$$

A nouveau par le calcul paradifférentiel, il vient.

$$\|R(f)\|_{1-\delta} \leq CM\|f(t,.)\|_{-\delta} \tag{1.3.11}$$

Par intégration de (1.3.9), il vient, en posant $M_\delta(t) = \|f\|_{L^\infty([0,t];C^{-\delta})}$ et en utilisant (1.3.3) :

$$M_\delta(t) \leq e^{Mt}\|f_0\|_{-\delta} + CM\int_0^t e^{M(t-\tau)}M_\delta(\tau)d\tau \tag{1.3.12}$$

$$+\int_0^t e^{M(t-\tau)}\|g(\tau,.)\|_{-\delta}d\tau$$

On multiplie (1.3.11) par $e^{-\lambda t}$, et il vient alors, en posant

$$M_\delta(t,\lambda) = \sup_{\tau\leq t} e^{-\lambda\tau}M_\delta(\tau) \ :$$

$$M_\delta(t,\lambda) \leq \|f_0\|_{-\delta} + \frac{CM}{\lambda - M} M_\delta(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda - M}\|e^{-\lambda t} g\|_{L^1([0,t];C^{-\delta})} \tag{1.3.13}$$

d'où le théorème 1.3.2 si $\lambda \geq (2C+1)M$.

Il en résulte immédaitement, d'après (1.3.9) :

$$\|X_t(x,D)\omega(t,.)\|_{-\delta} \leq e^{(2C+1)Mt}\|X_0(x,D)\omega_0\|_{-\delta} \tag{1.3.14}$$

Majoration de $\|X_t\|_{L^\infty([0,\theta];C^{1-\delta})}$

On observe dans un premier temps qu'il est équivalent de majorer $\|X_t\|_{1-\delta}$ et $\|X_0(x,D)\psi\|_{1-\delta}$. En effet, d'après (1.3.1.3), on a :

$$\|X_0(x,D)\psi(t,.)\|e^{-Mt} \leq \|X_t\|_{1-\delta} \leq \|X_0(x,D)\psi(t,.)\|e^{Mt} \tag{1.3.15}$$

Ensuite, l'équation du flot dérivée suivant X_0 donne $\partial_t X_0(x,D)\psi(t,.) = (X_t(x,D)v)(t,\psi(t,.))$; il vient alors, par intégration, en posant $\mu_\delta(t) = \|X_0(x,D)\psi\|_{L^\infty([0,t];C^{1-\delta})}$:

$$\mu_\delta(t) \leq \|X_0\|_{1-\delta} + \int_0^t \|X_t(x,D)v(\tau,.)\|_{1-\delta} e^{M(t-\tau)} d\tau \tag{1.3.16}$$

Il s'agit maintenant de majorer $\|X_t(x,D)v(t,.)\|_{1-\delta}$. On utilise à nouveau le calcul paradifférentiel. Cela nous conduit à l'identité suivante :

$$\begin{cases} X_t(x,D)v = \Sigma_{i=1}^6 V_i \quad \text{avec} \\ V_1(t,.) = (1-\chi(D))\nabla^\perp\Delta^{-1}X_t(x,D)\omega(t,.) \\ V_2(t,.) = [T_{X_t}, \nabla^\perp\Delta^{-1}]\omega(t,.) \\ V_3(t,.) = (1-\chi(D))\nabla^\perp\Delta^{-1}\Sigma_j\partial_j R(\omega, X_t^{(j)}) \ (\text{car div } \mathrm{X_t} = 0) \\ V_4(t,.) = \nabla^\perp\Delta^{-1}\Sigma_j T_{\partial_j\omega}X_t^{(j)} \\ V_5(t,.) = \Sigma_j T_{\partial_j v}X_t^{(j)} \\ V_6(t,.) = \Sigma_j R(\partial_j v, X_t^{(j)}) \end{cases} \tag{1.3.17}$$

Le calcul paradifférentiel de Bony assure que l'on a :

$$\begin{cases} \|V_i(t,.)\|_{-\delta} \leq C\|\omega(t,.)\|_{L^\infty}\|X_t\|_{1-\delta} \quad \text{pour} \quad i \in \{2,3,4,6\} \\ \|V_5(t,.)\|_{1-\delta} \leq CM\|X_t\|_{1-\delta} \end{cases} \tag{1.3.18}$$

La majoration de V_1 résulte simplement de (1.3.14) d'où

$$\|V_1(t,.)\|_{-\delta} \leq Ce^{(2C+1)Mt}\|X_0(x,D)\omega_0\|_{-\delta} \tag{1.3.19}$$

Il résulte alors de (1.3.15) et de (1.3.18) que l'on a

$$\mu_\delta(t) \leq \|X_0\|_{1-\delta} + C(\|\omega_0\|_{L^\infty} + M)\int_0^t \mu_\delta(\tau)e^{M(t-\tau)} d\tau \tag{1.3.20}$$

$$+C\|X_0(x,D)\omega_0\|_\delta\int_0^t e^{(2C+1)M\tau}e^{M(t-\tau)}d\tau$$

De plus, en multipliant (1.3.19) par $e^{-\lambda t}$, on obtient trivialement, pour $\lambda\geq\lambda_0=\sup\{C'(\|\omega_0\|+M),(2C+1)\}$:

$$\mu_\delta(t)\leq Ce^{\lambda t}(\|X_0\|_{1-\delta}+\|X_0(x,D)\omega_0\|_{-\delta}) \tag{1.3.21}$$

Il s'agit maintenant de boucler, c'est-à-dire de majorer $\|\nabla v\|_{L^\infty([0,t]\times\mathbf{R}^2)}$ à partir des quantités que l'on vient d'étudier, et ce bien sûr, grâce au lemme 1.2. D'après ce lemme, on a :

(1.3.22)

$$\|\nabla v(t,.)\|_{L^\infty}\leq C\|X_t\|_{L^\infty}I_{A_t,\alpha_t}(X_t)^{-2}\{\|X_t(x,D)\omega(t,.)\|_{-\delta}+\|X_t\|_{1-\delta}\|\omega(t,.)\|_{L^\infty}\}$$

$$+C\alpha_t^{-2}\|\omega(t,.)\|_{L^\infty}+C\|(1-\chi_t)\omega(t,.)\|_\varepsilon+C\|v(t,.)\|_{L^\infty}$$

On utilise toutes les majorations précédentes : d'après les inégalités (1.3.4), (1.3.7), (1.3.8), (1.3.14), (1.3.21) et (1.3.22) il vient, pour $\lambda\geq\lambda_0(M)$

$$\|\nabla v(t,.)\|_{L^\infty}\leq Ce^{\lambda t}\{\|X_0\|_{L^\infty}I_{A_0,\alpha_0}(X_0)^{-2}(\|X_0(x,D)\omega_0\|_{-\delta}(1+\|\omega_0\|_{L^\infty}) \tag{1.3.23}$$

$$+\|\omega_0\|_{L^\infty}\|X_0\|_{1-\delta})+\|(1-\chi_0)\omega_0\|_\varepsilon+\|\sigma\|_{L^\infty}+|v_0-\sigma|_0\}$$

On obtient le lemme 1.3.1 en prenant M_0 égal au double du nombre de droite de l'inégalité (1.3.22), puis $\lambda=\lambda_0(M_0)$ et $\theta\leq\frac{\log 2}{\lambda_0(M_0)}$.

1.4 Passage à la limite.

On considère la suite $(v_{0,n})_{n\in\mathbf{N}}$ qui approxime v_0 que l'on a construite dans la section 1.1. Les inégalités (1.1.1), (3.1.2) et (1.1.4) assurent, d'après le lemme 1.1.1 que, si v_n désigne la solution (très régulière) du système (E) avec $v_{n|t=0}=v_{0,n}$, il existe θ et M deux réels strictement positifs tel que :

$$\text{pour tout}\quad n\quad\text{entier}\quad \|\nabla v_n\|_{L^\infty([0,\theta]\times\mathbf{R}^2)}\leq M \tag{1.4.1}$$

Il en résulte de manière évidente que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $C([0,\theta];\sigma+L^2)$, d'où la première partie du théorème C.

De plus, les inégalités (1.3.4), (1.1.7), (1.3.8), (1.3.14) et (1.3.21) assurent que, si $\|\nabla v(t,.)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$ reste bornée quand t tend vers θ, il existe une fonction $v_0\in\sigma+L^2$ vérifiant les hypothèses du théorème C dont la première partie assure alors que l'intervalle $[0,\theta]$ n'est pas un intervalle maximal d'existence de la solution.

4. Théorème de régularité.

Le but de ce paragraphe et l'énoncé et la démonstration du théorème suivant qui décrit la régularité du flot des solutions mises en évidence au paragraphe précédent, et qui contient le théorème C.

Théorème 4.1.— *Soient $v_0 \in \sigma + L^2$ un champ de vecteurs à tourbillon borné, et X_0 un champ de vecteurs vérifiant l'hypothèse $(H_{\varepsilon,k})$ et à divergence nulle, on suppose qu'il existe un réel strictement positif β tel que le champ X_0 ne s'annule pas sur le support singulier C^β de ω_0 ; si pour tout $j \leq k+1, X_0(x,D)^j\omega_0 \in C^{-\varepsilon j}$ alors il existe un réel strictement positif maximal θ^* tel que, pour tout $\theta < \theta^*$, on ait*

- *Pour tout couple d'entiers (j,j') tel que $j \leq k+1$ et tout réel $\varepsilon' > 0$, on a $X_0(x,D)^j\partial_t^{j'}\psi \in L^\infty([0,\theta];C^{1-\varepsilon'-\varepsilon j})$ i.e. $\psi \in C^1_{(\varepsilon,0)}((X_0,\partial_t),(k+1,\infty))$*
- *Si $\theta^* < +\infty$, alors $\limsup_{t\longrightarrow\theta^*} \|\nabla v(t,.)\|_{L^\infty} = +\infty$.*

Corollaire 4.2.— *On obtient le théorème C.*

Démonstration du corollaire : Soit f une équation $C^{k+2-\delta}$ de la courbe γ_0, on considère le champ $X_0 = (\partial_2 f, -\partial_1 f)$ qui est à divergence nulle, non nul près de la courbe γ_0, qui est le support singulier de ω_0. De plus, il est clair que $X_0(x,D)\omega_0 = 0$; les hypothèses du théorème 4.1 sont donc largement satisfaites en posant $\varepsilon = \delta/(k+1)$. Pour obtenir la première partie du théorème, il suffit d'observer, d'une part que $\psi_{|[0,\theta^*[\times\gamma_0}$ est $C^\infty([0,\theta^*[;C^{k+2-\delta-\alpha})$ pour tout $\alpha > 0$, et d'autre part que $\psi \circ x_0 = x$. L'unicité d'une telle solution résulte simplement du lemme 3.2 qui assure le caractère lipschitzien du champ des vitesses associé.

Pour obtenir la seconde partie du théorème D, il suffit d'utiliser le fait que $\frac{D}{Dt}(X_t(x,D))^j\omega(t,.) = 0$, où $X_t = \psi^*_{(t,.)}X_0$, le théorème de propagation de la régularité höldérienne, le lemme 3.2 et la première partie du théorème D.

Démonstration du théorème 4.1 Après régularisation, la démonstration se fait en deux étapes. La première consiste à propager la régularité de v c'est-à-dire à majorer $\|X_{t,n}(x,D)^jv_n\|_{1-\varepsilon j}$, c'est à dire à majorer $\|X_0(x,D)^j\psi_n(t,.)\|_{1-\varepsilon_j},p$, la seconde à extraire de l'équation une information du type elliptique, c'est à dire à majorer $\|(\partial_t + v_n\Delta)^{j'}X_{t,n}(x,D)^jv_n\|_{1-\varepsilon j-\varepsilon'}$ c'est à dire $\|\partial_t^{j'}X_0(x,D)^j\psi_n(t_j\|_{1-\varepsilon_j-\varepsilon'}$.

Les techniques nécessaires à ces majorations sont des modifications des techniques de champs de vecteurs peu réguliers, introduites par S. Alinhac dans [1] et par l'auteur dans [5]. Les détails de cette démonstration, qui sont assez lourds à mettre en place, font l'objet des paragraphes 2 et 4 de [6], auquel nous renvoyons le lecteur.

Bibliographie

[1] S. Alinhac : Interaction d'ondes simples pour des équations complétement non linéaires. Annales Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème Série, 21, 1988 p.91-133.

[2] S. Alinhac : Remarques sur l'instabilité du problème des poches de tourbillon. Prépublication de l'Université d'Orsay, 1989.

[3] C. Bardos : Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler en deux dimension. Journ. Math. Analysis and Appli. 1972 p.769-790.

[4] J.-M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singuarités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Annales Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série 14 1981, p.209-246.

[5] J.-Y. Chemin : Calcul paradifférentiel précisé et application à des équations aux dérivées partielles non linéaires, Duke Math. Journ. 56 (3) 1988 p.431-469.

[6] J.-Y. Chemin : Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel. Prépublication de l'Ecole Polytechnique 1989.

[7] V. Yudovitch : Non stationnary flow of an ideal incompressible liquid Zh. Vych. Math. 3, 1963, p.1032-1066. (en russe).

[8] N. Zabusky, M.H. Hugues, K.V. Roberts : Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions, Journ. Comp. Phys. 30, 1979, p.96-106.

J.Y. CHEMIN
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau cedex