Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

V. M. Petkov

Les singularités du noyau de l'opérateur de diffusion pour des obstacles non-convexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n^{o} 8, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A10_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LES SINGULARITES DU NOYAU DE L'OPERATEUR DE DIFFUSION POUR DES OBSTACLES NON-CONVEXES.

V.M. PETKOV

Exposé n°VIII

23 Janvier 1990

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, n impair, un domaine connexe de la frontière C^∞ notée $\partial\Omega$, et soit

$$K = \mathbf{R}^n \setminus \Omega \subset \{x\,; \quad |x| \leq \rho_0\}\,.$$

L'opérateur de diffusion S associé à l'équation des ondes dans $\mathbf{R} \times \Omega$ avec la condition de Dirichlet sur $\mathbf{R} \times \partial\Omega$ est un opérateur unitaire

$$S : L^2(\mathbf{R} \times S^{n-1}) \to L^2(\mathbf{R} \times S^{n-1}).$$

Le noyau de l'opérateur $S - Id$ a la forme

$$s(t - t', \theta, \omega) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R} \times S^{n-1} \times \mathbf{R} \times S^{n-1})\,.$$

Pour $\theta, \omega \in S^{n-1}$ fixés, on a

$$s(t, \theta, \omega) = C_n \int_{\partial\Omega} \partial_\tau^{n-2}\, \partial_\nu w(\langle x, \theta\rangle - t, x; \omega) dS_x\,, \tag{1}$$

où $w(\tau, x; \omega)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_\tau^2 - \Delta_x)w & = 0 \text{ dans } \mathbf{R} \times \Omega, \\ w\mid_{\mathbf{R}\times\partial\Omega} & = 0, \\ w\mid_{\tau < -\rho_0} & = \delta(\tau - \langle x, \omega\rangle), \end{cases}$$

ν est la normale de $\partial\Omega$, orientée vers Ω, dS_x est la mesure induite sur ∂K, $\langle\,,\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$, et $C_n = (-1)^{(n+1)/2} 2^{-n}\, \pi^{1-n}$.

L'étude des singularités de $s(t, \theta, \omega)$ est important pour les problèmes inverses de diffusion. Pour $\theta \neq \omega$ fixés, on a

$$\max \operatorname*{sing\,supp}_t \, s(t, \theta, \omega) = \max_{x \in \partial K} \langle x, \theta - \omega\rangle$$

(cf. Majda [6], Soga [18], Petkov [12]). Le problème de la description de toutes les singularités de $s(t, \theta, \omega)$ est plus difficile. On se propose d'examiner ce problème pour des obstacles K génériques et aussi pour des directions θ génériques.

1. La relation de Poisson pour $s(t, \theta, \omega)$.

On suppose dans la suite que $\theta \neq \omega$ soient fixés. On considère les bicaractéristiques généralisées de l'opérateur $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$ dans l'ensemble caractéristique $\Sigma \subset T^*(\mathbf{R} \times \overline{\Omega})$ de $\square$. On renvoie à [8] pour la définition des bicaractéristiques de $\square$. On suppose les bicaractéristiques paramétrées par le temps et on utilise la notation
$\mathbf{R} \ni \sigma \mapsto \delta(\sigma) = (\sigma, x(\sigma), 1, \xi(\sigma))$.

Si $\delta(\sigma_0)$ est un point hyperbolique de $\square$, alors $\xi(\sigma)$ n'est pas continue en σ_0 et les limites

$$\lim_{\substack{\sigma \to \sigma_0 \\ \pm(\sigma - \sigma_0) > 0}} \xi(\sigma) = \xi(\sigma_0 \pm 0)$$

existent.

Définition 1.— *On dit que γ est un (ω, θ)-rayon dans $\overline{\Omega}$ si γ est la projection sur $\overline{\Omega}$ d'une bicaractéristique généralisée $\delta(\sigma)$ de $\square$ telle qu'il existe $T_1 < T_2$ pour lesquels*

$$\xi(\sigma) = \begin{cases} -\omega & \text{si } \sigma \leq T_1, \\ -\theta & \text{si } \sigma \geq T_2. \end{cases}$$

On dit que $\delta(\sigma)$ est uniquement prolongeable si pour tout $\sigma \in \mathbf{R}$ il n'y a qu'une bicaractéristique de $\square$ passant par $\delta(\sigma)$. On dit que (ω, θ)-rayon γ est uniquement prolongeable si γ est la projection d'une bicaractéristique uniquement prolongeable.

Soit $\gamma = \{x(\sigma) \; ; -\infty < \sigma < +\infty\}$ un (ω, θ)-rayon. On pose

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \max\{t \in \mathbf{R};\, x(\sigma) \notin \partial K \quad \text{pour} \quad \sigma < t\}, \\ \sigma_- &= \min\{t \in \mathbf{R};\, x(\sigma) \notin \partial K \quad \text{pour} \quad t < \sigma\} \end{aligned}$$

et on note ℓ_γ la longueur de la géodésique (généralisée) $\widetilde{\gamma} = \{x(\sigma) \; ; \sigma_+ \leq \sigma \leq \sigma_-\}$. Alors on introduit le temps de séjour T_γ de γ par l'expression

$$T_\gamma = \langle x(\sigma_+), \omega \rangle - \langle x(\sigma_-), \theta \rangle + \ell_\gamma \,.$$

Soit $\mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)$ l'ensemble de tous les (ω, θ)-rayons dans $\overline{\Omega}$. On a le

Théorème 1 [2].— *Soit $\theta \neq \omega$ fixés. Si chaque $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)$ est uniquement prolongeable, on a*

$$\text{sing supp}\, s(t, \theta, \omega) \subset \{-T_\gamma; \gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)\}\,. \tag{2}$$

Remarques.

1) On appelle (2) la relation de Poisson. Pour un domaine borné K on considère la distribution

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \cos \lambda_j t \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}),$$

où $\{\lambda_j^2\}_{j=1}^{\infty}$ sont les valeurs propres du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda^2 u & \text{dans } K \\ u = 0 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

On a la relation (cf. [1], [13]) :

$$\operatorname{sing\,supp} \sigma(t) \subset \{0\} \cup \{\pm T_\gamma \,;\, \gamma \in L_K\},$$

où L_K est l'ensemble des géodésiques périodiques dans K, et T_γ désigne la longueur (période) de γ.

2) Guillemin [4] a introduit le temps de séjour des rayons réfléchissants et il a suggéré l'inclusion (2). Sous des restrictions sur les rayons entrant avec direction ω, la relation (2) a été démontrée dans [11]. Pour d'autres cas particuliers on renvoie à [16], [17], [9], [10].

3) Dans les cas suivants chaque bicaractéristique de $\square$ est uniquement prolongeable :

(i) $\partial\Omega$ est une variété réelle analytique,

(ii) il n'y a pas de points $y \in \partial\Omega$ et de directions $\xi_x \in T_x(\partial\Omega)$ tels que la courbure de $\partial\Omega$ en x le long de ξ_x s'annule à l'ordre infini,

(iii) $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$, $K_i \cap K_j = \emptyset$, $i \neq j$, où les K_i, $i = 1, \ldots, m$ sont convexes.

Soit $\rho(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\rho(t) = 1$ pour $|t| \leq \frac{1}{2}$, $\rho(t) = 0$ pour $|t| \geq 1$. Pour $0 < \delta \leq 1$ on pose

$$\rho_\delta(t) = \rho(\frac{t}{\delta}), \; \rho_\delta^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}\rho_\delta .$$

Etant donné $t_0 \notin \bigcup_{\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,t}(\Omega)} \{T_\gamma\}$, l'étude de sing supp $s(t,\theta,\omega)$ se ramène à l'étude de l'asymptotique de l'intégrale

$$\begin{aligned} J_\delta(\lambda) &= \big(s(t,\theta,\omega),\, \rho_\delta(t+t_0)e^{-i\lambda t}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} c_k(-i\lambda)^{-n-2-k} \int_{\mathbf{R}}\int_{\partial K} e^{i\lambda(t-\langle y,\theta\rangle)} \\ &\quad \cdot \rho_\delta^{(k)}(\langle y,\theta\rangle - t + t_0)\frac{\partial w}{\partial \nu}(t,y;\omega)dt\, dS_y, \end{aligned}$$

où $c_k = \text{const.}$

On peut supposer que $\omega = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Soit $Z_1 = \{x \in \mathbf{R}^n\,;\, x_n = \tau\}$, où $\tau < -\rho_0$ est fixé.

Soit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x') = 1$, $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ une partition d'unité sur Z_1 et soit v_j la solution du problème

$$\begin{cases} \Box v_j = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}_\tau^+ \times \mathbf{R}^n, \\ v_j \mid_{t=\tau} = \varphi_j(x')\delta(\tau - x_n), \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial t} \mid_{t=\tau} = \varphi_j(x')\delta'(\tau - x_n) \end{cases}$$

avec $\mathbf{R}_\tau^+ = \{t \in \mathbf{R};\ \ t \geq \tau\}$. On prolonge convenablement v_j dans l'intérieur de K et aussi on prolonge $v_j \mid_{\mathbf{R}_\tau^+} = h_j$ comme 0 pour $t < \tau$. On introduit la solution w_j du problème

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \Box w_j = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R} \times \Omega, \\ w_j + h_j = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbf{R} \times \partial\Omega, \\ w_j \mid_{t<\tau} = 0. \end{cases}$$

Le point essentiel est l'étude de l'asymptotique de l'intégrale

$$I_{\delta,j}(\lambda) = \iint e^{i\lambda(t-\langle y,\theta\rangle)} \rho_\delta(\langle y,\theta\rangle - t + t_0) \left(\frac{\partial}{\partial\nu} - \langle\nu,\theta\rangle\frac{\partial}{\partial t}\right) w_j dt dS_y$$

pour δ assez petit.

On fixe un compact $F_0 \subset Z_1$ tel que les rayons passant par $u \in Z_1 \setminus F_0$ de direction ω ne coupent pas K. On considère les solutions w_j pour lesquelles supp $\varphi_j \cap F_0 \neq \emptyset$. Etant donné $u_0 \in F_0$, on pose

$$C_t(u_0) = \big\{(t, x, 1, \xi) \in T^*(\mathbf{R} \times \overline{\Omega})\,;$$

il existe une bicaractétistique sortante $\delta(\sigma)$ de $\Box$ telle que

$$\delta(\tau) = (\tau, u_0, 1, -\omega),$$
$$\delta(t) = (t, x, 1, \xi)\big\}\,.$$

Soit $|t_0| \leq T$, $T > 0$ fixé. On a deux cas possibles :

(A) Pour tout $\sigma > \rho_0 + T + 1$ nous avons

$$C_\sigma(u_0) \cap \{(\sigma, x, 1, -\theta) \in T^*(\mathbf{R} \times \overline{\Omega})\,;\, \rho_0 \leq |x| \leq \tau_1 + \sigma + 1\} = \emptyset,$$

(B) Il existe $\sigma_0 > \rho_0 + T + 1$ tel que

$$C_{\sigma_0}(u_0) \cap \{(\sigma_0, x, 1, -\theta) \in T^*(\mathbf{R} \times \overline{\Omega})\,;\, \rho_0 \leq |x| \leq \tau_1 + \sigma_0 + 1\} \neq \emptyset,$$

où $\tau_1 = -\tau + \rho_0$.

Dans le cas (A) on utilise la

Proposition 2.— *Supposons qu'on ait*

(4) $WF(w_j) \cap \{(t,x,1,-\theta) \in T^*(\mathbf{R}\times\overline{\Omega})\,;\, \rho_0 \le |x| \le \rho_0+1\,,\, \tau \le t \le \rho_0+T+1\} = \emptyset.$

Alors

$$I_{\delta,j}(\lambda) = O(|\lambda|^{-m}) \quad \textit{pour tout} \quad m \in \mathbf{N}\,. \tag{5}$$

Remarquons qu'en choisissant supp φ_j suffisamment près de u_0 on peut arranger (4) grâce à la continuité de $C_t(u_0)$ par rapport à t et u_0.

Esquisse de la preuve de la proposition 2. Soit $\beta(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\beta(x) = 1$ pour $[x[\le \rho_0$, $\beta(x) = 0$ pour $|x| \ge \rho_0+1$. Soit $F_{t\to\lambda}$ la transformation de Fourier par rapport à t. On pose $\widetilde{w}_j(x,\lambda) = F_{t\to\lambda}(\beta w_j)$,

$$\square(\beta w_j) = F_j\,, \widetilde{F}_j = F_{t\to\lambda}(F_j)\,, \widetilde{h}_j = F_{t\to\lambda}(h_j)\,.$$

Tenant compte de (4) on obtient

$$WF(F_j) \cap \{t,x,1,-\theta) \in T^*(\mathbf{R}\times\overline{\Omega})\,;\, \tau \le t \le \rho_0+T+1\} = \emptyset. \tag{6}$$

D'autre part, $\widetilde{w}_j$ satisfait au problème

$$\begin{cases} (\Delta+\lambda^2)\widetilde{w}_j = \widetilde{F}_j & \text{dans } \Omega,\\ \widetilde{w}_j + \beta\widetilde{h}_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega,\\ \widetilde{w}_j & \text{est } (-i\lambda)\text{-sortante.} \end{cases}$$

La dernière condition est une conséquence du fait que $\widetilde{w}_j = 0$ pour $|x| \ge \rho+1$. D'autre part, la condition $w_j\,|_{t<\tau} = 0$ implique que pour tout $\xi \in S^{n-1}$ on a

$$w_j(|x|\xi,\lambda) = \frac{e^{i\lambda|x|}}{|x|^{(n-1)/2}}\left(a(\xi,\lambda) + O\Big(\frac{1}{|x|^{(n+1)/2}}\Big)\right)$$

pour $|x| \to \infty$. En utilisant la représentation $\widetilde{w}_j$ par la fonction $(-i\lambda)$-sortante de Green et le fait que $\widetilde{w}_j = 0$ pour $|x| \ge \rho_0+1$ on obtient

$$\int_{\partial K} e^{i\lambda\langle x,\theta\rangle}\left[\frac{\partial\widetilde{w}_j}{\partial\nu}(x,\lambda) - i\lambda\langle\nu,\theta\rangle\widetilde{w}_j(x,\lambda)\right] dS_x = \int_\Omega e^{i\lambda\langle x,\theta\rangle}\widetilde{F}_j(x,\lambda)dx\,.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} I_{\delta,j}(\lambda) &= \int_{\mathbf{R}}\int_\Omega e^{i\lambda(t-\langle x,\theta\rangle)}\rho_j(\langle x,\theta\rangle - t + t_0)F_j(t,x)dt\,dx\\ &= O(|\lambda|^{-m}) \quad \text{pour tout} \quad m \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

car l'intégration par rapport à t se fait sur l'intervalle $\tau \le t \le \rho_0+T+1$ et on peut profiter de (6).

Afin de traiter le cas (B) on applique la

Proposition 3.— *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait*

$$WF(w_j) \cap \{(t,x,1,-\theta) \in T^*(\mathbf{R}\times\overline{\Omega})\,;\, \rho_0+T+1+\varepsilon \le t \le \rho_0+T+1+2\varepsilon\} = \emptyset.$$

Alors on a (5).

La démonstration de cette proposition suit les mêmes lignes que celle de la proposition 2. On introduit $\alpha(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \le \rho_0+T+1+\varepsilon, \\ 0 & \text{si } t \ge \rho_0+T+1+2\varepsilon \end{cases}$$

et $\beta(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ de manière que

$$\beta(x) = 1 \quad \text{pour} \quad |x| \le -\tau + 2\rho_0 + T + 1 + 2\varepsilon\,.$$

Après on considère

$$\widetilde{w}_j(x,\lambda) = F_{t\to\lambda}(\alpha(t)\beta(x)w_j(t,x))$$

et

$$\widetilde{F}_j(x,\lambda) = F_{t\to\lambda}(\Box\widetilde{w}_j)\,.$$

2. Les singularités de $s(t,\theta,\omega)$ pour des obtacles génériques.

On s'intéresse à des singularités de $s(t,\theta,\omega)$ pour $\theta \ne \omega$ fixés. Soit Z_1 un hyperplan orthogonal à ω et tel que l'obstacle K est inclus dans le demi-espace déterminé par Z_1. On dit qu'un rayon $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)$ est ordinaire si γ est la projection sur $\overline{\Omega}$ d'une bicaractéristique δ de $\Box$ réfléchissante formée par un nombre fini de segments linéaires ayant des projections qui coupent ∂K transversalement et qui obéissent à la loi de réflexion.

Soit γ un (ω,θ)-rayon ordinaire qui passe par $u_\gamma \in Z_1$ avec la direction ω. Il existe un voisinage $\mathcal{O}_\gamma \subset Z_1$ de u_γ tel que pour tout $z \in \mathcal{O}_\gamma$ on peut trouver un $(\omega,\theta(z))$- rayon ordinaire sortant de z. L'application

$$\mathcal{O}_\gamma \ni z \xmapsto{J_\gamma} \theta(z) \in S^{n-1}$$

est C^∞ et on appelle $|\det dJ_\gamma(u_\gamma)|$ la section différentielle de γ (cf.[4]).

Maintenant, soit $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)$ ayant pour temps de séjour T_γ. Pour l'étude de la singularité de $s(t,\theta,\omega)$ en $-T_\gamma$ nous avons besoin des propriétés suivantes :

(a) γ est ordinaire,

(b) $|\det dJ_\gamma(u_\gamma)| \ne 0$,

(c) il existe $\varepsilon_\gamma > 0$ tel qu'il n'y ait pas $\delta \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)$, $\delta \ne \gamma$ pour lesquels

$$|T_\delta - T_\gamma| < \varepsilon_\gamma\,.$$

La condition (c) implique que les singularités de $s(t,\theta,\omega)$ dans l'intervalle $(-T_\gamma - \varepsilon_\gamma, -T_\gamma + \varepsilon_\gamma)$ ne dépendent que du rayon γ. En utilisant (a) - (c) on peut calculer le terme principal de la singularité en $-T_\gamma$ en construisant une paramétrix globale du problème mixte (3) et en suivant les raisonnements de [11].

On se propose de montrer que dans le cas $n = 3$ pour les obstacles génériques K, tous les rayons $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)$ satisfont (a) - (c). Pour cela, on va précider la notion des obstacles génériques.

Soit $\partial K = X$. On désigne par $C^\infty(X, \mathbf{R}^n)$ l'espace des applications C^∞ muni de la topologie de Whitney (cf.[3]). On note $C^\infty_{\text{emb}}(X, \mathbf{R}^n) \subset C^\infty(X, \mathbf{R}^n)$ le sous-espace des plongements, et on remarque que $C^\infty_{\text{emb}}(X, \mathbf{R}^n)$ est un espace de Baire. On dit qu'un ensemble $\mathcal{R} \subset C^\infty_{\text{emb}}(X, \mathbf{R}^n)$ est résiduel si $\mathcal{R} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m$, où $\mathcal{R}_m$ sont ouverts et denses dans $C^\infty_{\text{emb}}(X, \mathbf{R}^n)$. Etant donné $f \in C^\infty_{\text{emb}}(X, \mathbf{R}^n)$, on désigne par Ω_f le domaine (non-borné) ayant pour frontière $f(X)$.

On dira qu'un rayon $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}$ est dégénéré si γ a au moins un segemnt sur ∂K qui coïncide avec une géodésique sur ∂K par rapport à la métrique sur ∂K induite par la métrique euclidienne de $\mathbf{R}^n$. D'après les résultats de [2], [14], [15], il existe un ensemble résiduel $\mathcal{R} \subset C^\infty_{\text{emb}}(X, \mathbf{R}^n)$ tel que pour toute $f \in \mathcal{R}$ et tout rayon non-dégénéré $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega_f)$ les propriétés suivantes soient satisfaites :

(d) γ est ordinaire et $\det dJ_\gamma(u_\gamma) \neq 0$,

(e) si $\gamma, \delta \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega_f)$ satisfont (d) et $\gamma \neq \delta$, on ait $T_\gamma \neq T_\delta$.

Afin d'arranger (c) il faut tenir compte des (ω,θ)-rayons dégénérés. Récemment, L. Stojanov a démontré le résultat suivant.

Théorème 4 [20].— *Soit $\theta \neq \omega$ fixés et soit $n = 3$. Alors il existe un ensemble résiduel $\mathcal{R}_1 \subset C^\infty_{\text{emb}}(X, \mathbf{R}^n)$ tel que pour toute $f \in \mathcal{R}_1$ tous les rayons $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega_f)$ soient non-dégénérés.*

En combinant ce théorème avec (d) et (e) on trouve un ensemble résiduel $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_1$ tel que pour toute $f \in \mathcal{R}_2$ tous les rayons $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega_f)$ satisfont (a) - (c). Alors le calcul de [11] donne

Théorème 5 [2],[20].— *Sous les conditions du théorème 4, il existe un ensemble résiduel $\mathcal{R}_2 \subset C^\infty_{\text{emb}}(X, \mathbf{R}^3)$ tel que pour toute $f \in \mathcal{R}_2$ nous ayons*

$$\operatorname{sing\,supp} s_f(t,\theta,\omega) = \{-T_\gamma\,;\ \gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega_f)\}, \tag{7}$$

où $s_f(t,\theta,\omega)$ est le noyau de l'opérateur S-Id associé au domaine Ω_f. De plus, près de $-T_\gamma$ on a

$$s_f(t,\theta,\omega) = \frac{1}{2\pi}(-1)^{m_\gamma - 1}\, i^{\sigma_\gamma} \left| \frac{\det dJ_\gamma(u_\gamma)\langle \nu(x_\gamma), \omega\rangle}{\langle \nu(y_\gamma), \theta\rangle} \right|^{-1/2} \tag{8}$$

$$\cdot\, \delta'(t + T_\gamma) + \quad \text{des termes plus réguliers.}$$

Ici m_γ est le nombre des réflexions de γ, $\sigma_\gamma \in \mathbf{N}$ est associé à l'indice de Maslov et x_γ (resp. y_γ) est le premier (resp. le dernier) point de réflexion de γ.

3. Les singularités de $s(t,\theta,\omega)$ pour des directions θ génériques.

Soit K et $\omega \in S^{n-1}$ fixés. On se propose de trouver un ensemble résiduel $\mathcal{R}(\omega) \subset S^{n-1}$ tel que pour tout $\theta \in \mathcal{R}(\omega)$ on ait

$$\text{sing supp}\, s(t,\theta,\omega) = \{-T_\gamma\,;\ \gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)\}. \tag{9}$$

Pour cela on introduit l'hypothèse

$$(H_\omega)\quad \left[\begin{array}{l} \text{Il existe un ensemble résiduel}\quad \Sigma(\omega) \subset S^{n-1} \\ \text{tel que pour tout}\quad \theta \in \Sigma(\omega)\quad \text{si}\quad \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega) \neq \emptyset, \\ \text{tous les rayons}\quad \gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)\quad \text{soient ordinaires.} \end{array}\right.$$

Dans l'exemple suivant, la condition (H_ω) est satisfaite pour tout $\omega \in S^{n-1}$.

Théorème 6.— *Supposons que $K = \bigcap\limits_{i=1}^{m} K_i$, où $K_i \cap K_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et les K_i, $i = 1,\dots,m$ soient convexes. Supposons qu'il n'y ait pas de points $x \in \partial K$ et de directions $\xi_x \in T_x(\partial K)$ tels que la courbure de ∂K en x le long de ξ_x s'annule à l'ordre infini. Alors pour tout $\omega \in S^{n-1}$ la condition (H_ω) est satisfaite.*

Dans le cas où les K_i, $i = 1,\dots,m$ sont strictement convexes, ce résultat a été obtenu dans [16]. Il est naturel de faire la conjecture suivante.

$$(H)\quad \left[\begin{array}{l} \text{Il existe un ensemble résiduel}\quad \Gamma \subset S^{n-1} \\ \text{tel que pour tout}\quad \omega \in \Gamma \\ \text{la condition}\quad (H_\omega)\quad \text{soit satisfaite.} \end{array}\right.$$

Si (H_ω) a lieu, on peut trouver un ensemble résiduel $\mathcal{R}(\omega) \subset S^{n-1}$ tel que pour tout $\theta \in \mathcal{R}(\omega)$, tous les rayons $\gamma \in \mathcal{L}_{\omega,\theta}(\Omega)$ satisfassent (b) et (e). Pour (b) on applique le théorème de Sard, tandis que pour (e) on utilise un résultat de Stojanov [19]. De cette manière on obtient

Théorème 7.— *Soit $\omega \in S^{n-1}$ fixé tel que (H_ω) soit satisfaite. Alors il existe un ensemble résiduel $\mathcal{R}(\omega) \subset S^{n-1}$ tel que pour tout $\theta \in \mathcal{R}(\omega)$ on ait (9) et la singularité de $s(t,\theta,\omega)$ en $-T_\gamma$ soit donnée par la formule (8).*

Maintenant supposons que K soit captif (cf. [7]) et que la condition (ii) du § 1 soit satisfaite. Alors il existe un point $(y,\eta) \in T^*(\Omega)$ tel que la projection $\gamma(\sigma)$ sur $\overline{\Omega}$ de la bicaractéristique $\gamma(\sigma)$ de $\Box$ passant par $(0,y,1,\eta)$ satisfasse à la condition.

$$\{\gamma(\sigma)\,;\ \sigma > 0\} \subset B_{\rho_0} = \{x\,;\ |x| \le \rho_0\}. \tag{10}$$

En utilisant la connexité de Ω, on en déduit qu'il existe un point $x_0 \in B_{\rho_0}$ et une direction $\omega_0 \in S^{n-1}$ tels que le rayon $\gamma_0(\sigma)$ passant par x_0 en direction ω_0 satisfait (10). Cela implique l'existence d'une suite des (ω_0,θ_k)-rayons γ_k dans Ω ayant temps de séjour T_k tels que

$$\lim_{k\to\infty} T_k = +\infty\,.$$

Tenant compte de (ii) on peut approximer γ_k par des (ω'_k,θ'_k)-rayons ordinaires γ'_k ayant temps de séjour T'_k, satisfaisant

$$\lim_{k\to\infty} T'_k = +\infty\,.$$

4. Résolvante du laplacien en Ω et les temps de séjour des (ω, θ)-rayons.

Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ on désigne par $\mathcal{R}(\lambda)f = u(x,\lambda)$ la solution du problème

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u & \text{est } (-i\lambda)\text{-sortante.} \end{cases}$$

L'opérateur

$$\mathcal{R}(\lambda) : C_0^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$$

admet une extension méromorphe dans $\mathbf{C}$ ayant des pôles λ_j, $\Im\lambda_j < 0$, (cf. [5]). Soit

$$\widehat{s}(\lambda, \theta, \omega) = F_{t\to\lambda}(s(t,\theta,\omega))$$

$$= c_n \lambda^{n-2} \int_{\partial K} e^{-i\lambda\langle x,\theta\rangle} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} - i\lambda\langle \nu, \omega\rangle v \right)(x,\lambda) dS_x,$$

où $c_n = \text{const}$ et $v(x,\lambda)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v + e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ v & \text{est } (-i\lambda)\text{-sortante.} \end{cases}$$

Soit $a > b + 1 > \rho_0 + 2$. On introduit une fonction $\varphi_a(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que

$$\varphi_a(x) = 1 \quad \text{pour} \quad |x| \le a\,, \quad \varphi_a(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| \ge a + 1.$$

Alors

$$v(x,\lambda) + \varphi_a(x) e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle}$$

$$= R(\lambda)\left[(\Delta + \lambda^2)(\varphi_a e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle})\right] = R(\lambda)F_a(\lambda),$$

où

$$F_a(\lambda) = [\Delta\varphi_a + 2i\langle \nabla\varphi_a, \omega\rangle\lambda]\, e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle}.$$

Soit $\chi_b(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\chi_b = 1$ pour $|x| \le b$, $\chi_b(x) = 0$ pour $|x| \ge b + 1$. On obtient

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial K} = -i\lambda\langle \nu, \omega\rangle e^{i\lambda\langle x,\omega\rangle}\Big|_{\partial K}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \nu}(\chi_b R(\lambda) F_a(\lambda))\Big|_{\partial K}.$$

On voit facilement que pour $\theta \neq \omega$ on a

$$\int_{\partial\Omega} e^{-i\lambda\langle x,\theta-\omega\rangle}\langle \nu, \theta + \omega\rangle dS_x = 0$$

et on trouve

$$\widehat{s}(\lambda,\theta,\omega) = -c_n\lambda^{n-2}\int_\Omega e^{-i\lambda\langle x,\theta\rangle}(\Delta+\lambda^2)(\chi_b R(\lambda)F_a(\lambda))dx \tag{11}$$
$$= -c_n\lambda^{n-2}\int_\Omega e^{-i\lambda\langle x,\theta\rangle}\big[\Delta\chi_b R(\lambda)F_a(\lambda) + 2\langle\nabla_x\chi_b, \nabla_x R(\lambda)F_a(\lambda)\rangle\big]dx\,.$$

On introduit des fonctions $\psi_c(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $c = a, b$, telles que

$\psi_c(x) = 1$ pour $0 < c < |x| \le c+1$

$\psi_c(x) = 0$ pour $|x| \ge c+2$ ou $|x| \le c-1$.

Soit

$$R_{a,b}(x) = \psi_b(x)R(\lambda)\psi_a(x)\,.$$

Lemme 8.— *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $R_{a,b}$ soit analytique dans le domaine*

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{\lambda\in\mathbf{C}\,;\, -\varepsilon\,\mathrm{Log}\,(1+|\lambda|) < \Im\lambda \le 0\}.$$

Supposons qu'il existe $C > 0$, $\alpha > 0$, $p \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$ tels que

$$\|R_{a,b}(\lambda)\varphi\|_{H^1} \le C(1+|\lambda|)^p\, e^{\alpha|\Im\lambda|}\|\varphi\|_{H^k(\Omega)} \tag{12}$$

pour tout $\lambda\in\mathcal{U}_\varepsilon$ et chaque $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$. Alors pour tout $m\in\mathbf{N}$ il existe $t_m < 0$ tel que

$$s(t,\theta,\omega)\in C^m \quad \text{pour} \quad t \le t_m$$

uniformément par rapport à $(\omega,\theta)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$.

Remarque. Pour des obstacles non-captifs, Vainberg [21] a obtenu (12) avec $p = k = 0$ et C, α, ε convenablement choisis.

Corollaire 9.— *Supposons qu'il existe (ω_k,θ_k)-rayons ordinaires dans $\overline{\Omega}$ ayant temps de séjour T_k tels que*

$$\lim_{k\to\infty} T_k = +\infty\,, \tag{13}$$

$$-T_k \in \mathrm{sing\,supp}\, s(t,\theta_k,\omega_k) \quad \textit{et la singularité en} \quad -T_k \quad \textit{est donnée par (8).} \tag{14}$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $R_{a,b}(\lambda)$ soit analytique dans le domaine $\mathcal{U}_\varepsilon$. Alors pour C, α, p et k arbitrairement fixés, l'estimation (12) n'est pas satisfaite pour toutes $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Comme nous avons remarqué au paragraphe 3, on peut arranger (13) pour des obstacles captifs.

Dans quelques cas particuliers on peut arranger (14) grâce à la condition (H_ω). Nous supposons que pour tout obstacle captif, il existe (ω_k,θ_k)-rayons ordinaires qui satisfont aux conditions (13) et (14).

Bibliographie

[1] K. Andersson and R. Melrose : The propagation of singularities along gliding rays. Invent. Math., 41 (1977), 197-232.

[2] F. Cardoso, V. Petkov and L. Stojanov : Singularities of the scattering kernel for generic obstacles. Preprint.

[3] M. Golubitsky and V. Guillemin : Stable Mappings and Their Singularities. Springer Verlag, New York, 1973.

[4] V. Guillemin : Sojourn time and asymptotic properties of the scattering matrix. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Supl. 12 (1977), 69-88.

[5] P. Lax and R. Phillips : Scattering Theory. Academic Press, New York, 1967.

[6] A. Majda : A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies. Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977), 165-194.

[7] R. Melrose : Singularities and energy decay of acoustical scattering. Duke Math. J., 46 (1979), 43-59.

[8] R. Melrose and J. Sjöstrand : Singularities on boundary value problems, I, II. Comm. Pure Appl. Math., 31 (1978), 593-617 and 35 (1982), 129-168.

[9] S. Nakamura : Singularities of the scattering kernel for two convex obstacles. Publ. RIMS Kyoto University, 25 (1989), 223-238.

[10] S. Nakamura and H. Soga : Singularities of the scattering kernel for two balls. J. Math. Soc. Japan, 40 (1988), 205-220.

[11] V. Petkov : High frequency asymptotics of the scattering amplitude for non-convex bodies. Comm. PDE, 5 (1980), 293-329.

[12] V. Petkov : Scattering Theory for Hyperbolic Operators. North-Holland, Amsterdamn, 1989.

[13] V. Petkov and L. Stojanov : Periods of multiple reflecting geodesics and inverse spectral results. Amer. J. Math., 109 (1987), 619-668.

[14] V. Petkov and L. Stojanov : Spectrum of the Poincaré map for periodic reflecting rays in generic domains, Math. Z., 194 (1987), 505-518.

[15] V. Petkov and L. Stojanov : On the number of periodic rays in generic domains. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 8 (1988), 81-91.

[16] V. Petkov and L. Stojanov : Singularities of the scattering kernel and scattering invariants for several strictly convex obstacles. Trans. Amer. Math. Soc. 312 (1989), 203-235.

[17] V. Petkov and L. Stojanov : Singularities of the scattering kernel for a class of star-shaped non-convex obstacles. Math. Appl. Comput., (to appear).

[18] H. Soga : Conditions against rapid decrease of oscillatory integrals and their applications to inverse scattering problems. Osana J. Math., 23 (1986), 441-456.

[19] L. Stojanov : Unpublished manuscript, 1989.

[20] L. Stojanov : Nonexistence of generalized scattering rays and singularities of the scattering kernel for generic domains in $\mathbf{R}^3$. Preprint, 1989.

[21] B. Vainberg : Asymptotic Methods in Equations of Mathematical Physics. Gordon and Breach Sci. Publ., 1988.

Université de Nantes
Inst.de Math. et d'Informatique
2 Chemin de la Houssinière
44072 NANTES Cedex (France)