J.-Y. Chemin

Gerbes singulières et singularités du problème de Cauchy hyperbolique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. nº 9, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A9_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GERBES SINGULIERES ET SINGULARITES DU PROBLEME DE CAUCHY HYPERBOLIQUE

J.-Y. CHEMIN

Exposé n°IX

20 Décembre 1988

1 Position du problème et énoncé des résultats

Soit u une solution $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ de l'équation

$$(E) \qquad F(x,u,\partial^\alpha u)_{|a|\leq m} = 0 \ ,$$

u réelle, s assez grand, F étant une fonction C^∞ de ses arguments, et Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dont on note $x = (x_0, x_1, \ldots x_{n-1}) = (t, x')$ un point courant. Sous l'hypothèse que les m premières traces de u sur $H = \Omega \cap (t = 0)$, notées respectivement $\gamma_j u$ soient très régulières en dehors de l'origine, et que $p = \sum_{|\alpha|=m} \partial F/\partial u_\alpha.\xi^\alpha$ soit strictement hyperbolique par rapport à $\tau = \xi_0$, on cherche à décrire la régularité de u.

De très nombreux résultats ont déjà été démontrés sur cette question. De manière générale, J.M. Bony a démontré dans [5] que les singularités H^σ jusqu'à $\sigma \leq 2s - s_0$, se propagent le long des bicaractéristiques nulles de p, c'est-à-dire des courbes de $T^*\Omega$ solutions de

$$\frac{dx}{ds} = \mathrm{grad}_\xi p(x(s), \xi(s)) \ ; \frac{d\xi}{ds} = -\mathrm{grad}_x p(x(s), \xi(s)) \ ; \quad \text{et} \quad p(x(0), \xi(0)) = 0$$

Dans notre cadre, l'ensemble suivant jouera un rôle crucial

Définition 1.1.— *Γ désigne la projection sur Ω de la réunion des bicaractéristiques nulles passant par* 0.

Si l'on se place en dimension 2, c'est-à-dire en dimension 1 d'espace, J. Rauch et M. Reed dans [15] pour le cas semi linéaire, P. Godin dans [13] pour l'ordre 2, et l'auteur dans [9] pour le cas général, ont démontré que, si $\gamma_j u$ est C^{k-j} en dehors de 0, alors u est C^k en dehors de Γ. En dimension supérieure, M. Beals pour l'équation des ondes semi linéaire (voir [4]) et l'auteur pour une équation des ondes à deux vitesses (voir [10]) ont construit explicitement des solutions de (E) telles que $u \in H^s$, $\gamma_j u \in H^{s-j}, \gamma_j u \in C^\infty$ sauf en 0, et u a des singularités H^{3s+s_1} en dehors de Γ.

Si l'on veut obtenir un comportement linéaire pour la propagation des singularités, il convient de faire des hypothèses sur la nature de la singularité des traces à l'origine. On supposera les traces conormales par rapport à l'origine. Plus précisément

Définition 1.2.— *Soit Σ une sous-variété lisse d'un ouvert Ω' de $\mathbf{R}^n$; on dit qu'une distribution de $H^\sigma_{\mathrm{loc}}(\Omega')$ est conormale (d'ordre k) par rapport à Σ si elle appartient à l'ensemble $H^{s,k}(\Sigma)$ des v dans $H^\sigma_{\mathrm{loc}}(\Omega')$ telles que, si $z_1, \ldots z_l$ sont $l \in k$ champs de vecteurs tangents à Σ à coefficients C^∞, alors $z_1(x,D)\ldots z_l(x,D)v \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega')$.*

Remarque 1.3

(i) Si $v \in H^{s,k}(\Sigma)$, alors le front d'onde H^{s+k} de v est inclus dans $N^*\Sigma$, le conormal à Σ, et en particulier, v est H^{s+k} localement en dehors de Σ.

(ii) Si $\Sigma = \{0\}$, alors $H^{\sigma,k}(\Sigma)$ est l'ensemble des v tel que, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k, x^\alpha v \in H^{\sigma+|\alpha|}_{\mathrm{loc}}(\Omega')$.

(iii) Lorsque $s' \notin \mathbf{N}$, on définit $H^{s,s'}$ par dualité et interpolation (voir [7]).

On se place dorénavant en dimension $n \geq 3$. Le cône d'onde Γ peut ne pas être une variété C^1 en dehors de l'origine, par exemple avoir des cusps, des points doubles (voir [3]). Pour éviter cet écueil, on fera, dans tout ce travail les deux hypothèses suivantes, en posant $p_0(\xi) = p(0;\xi)$.

(H_1) Pour tout ξ dans $p_0^{-1}(0), d^2p_0(\xi)$ est non dégénérée

(H_2) $\xi \mapsto \mathrm{grad}_\xi p_0(\xi)$ est injective

Remarquons que cela entraîne que l'application $\xi \mapsto \mathrm{grad}_\xi p_0(\xi)$ est un difféomorphisme homogène de degré $m-1$ d'un voisinage conique de $p_0^{-1}(0)$ sur un voisinage conique de Γ_0 (Γ_0 désignant le cône d'onde associé à p_0). De plus, notons que cette hypothèse est toujours vérifiée dans le cas $m = 2$ et dans le cas d'une équation du type

$$\left(\partial_t^2 - \sum_{i=1}^{n-1} c_i^2(x,u,\partial u)\partial_{x_i}^2\right)\left(\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{n-1} d_j(x,u,\partial u)\partial_{x_j}^2 u\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \operatorname{Sup} c_i < \operatorname{Inf} d_j$$

qui représente l'interaction de deux phénomènes quasi linéaires.

Observons enfin qu'un symbole d'ordre 3 ne vérifie jamais (H_1) et (H_2) ; cependant nous espérons, dans un article à venir, traiter grâce au calcul symbolique construit dans ce travail, le cas des systèmes du type Euler isentropique.

Le but du présent travail est de démontrer les théorèmes ci-dessous

Théorème A.— *Soit u solution H^s de l'équation (E), avec $s > \frac{n}{2} + m + 5 - d$ (d étant un entier valant 1 si (E) est quasilinéaire, 0 sinon) ; soit $\tilde\Omega$ le plus grand ouvert d'influence de $\Omega \cap H$ dans Ω tel que $\Gamma \setminus \{0\} \cap \tilde\Omega$ soit une hypersurface C^1 ;*

Si, pour $j \in \{0,\ldots,m-1\}, \gamma_j u \in H^{s-j,\infty}(0)$, alors

(i) $\Gamma \setminus \{0\}$ est une hypersurface lisse de $\tilde\Omega \setminus \{0\}$

(ii) $u \in H^{s'}(\Gamma \setminus \{0\})$ dans $\tilde\Omega \setminus \{0\}$ pour tout $s' < s$.

On obtiendra également le

Théorème B.— *Sous les hypothèses du théorème A, en supposant seulement $\gamma_j u \in H^{s-j,k}$ pour $j \in \{0,.m-1\}$ on a*

(i) le front d'onde de u est inclus dans $N^*(\Gamma \setminus \{0\}) \cup N^*(0)$

(ii) $\Gamma \setminus \{0\}$ est une hypersurface $C^{\rho'-1+k}$ pour tout $\rho' < \rho = s - \frac{n}{2} - m + d$.

Ces théorèmes ont été démontrés par J.M. Bony dans [8] pour le cas semi linéaire. ($\Gamma \setminus \{0\}$ est alors, par hypothèse une variété lisse), et par l'auteur dans [11] lorsque $m = 2$.

La difficulté supplémentaire du cadre non semi linéaire est que la géométrie de l'équation, décrite par Γ est peu régulière, parce que dépendant de la solution. Cette difficulté est déjà présente dans les travaux de S. Alinhac (voir [1] et [2]) et ceux de l'auteur (voir [9] et [11]). Elle est aggravée par la singularité conique très forte de Γ en 0 (plus forte que dans le cas de l'ordre 2) ; les champs de vecteurs tangents à $\Gamma\setminus\{0\}$ sont non seulement peu réguliers en dehors de l'origine, mais aussi singuliers en l'origine (i.e. seulement lipschitziens).

Remarquons que, d'après les résultats de [1] sur l'évolution d'une onde simple, il suffit de démontrer les théorèmes A et B sur un ouvert quelconque contenant 0 ; l'ouvert Ω sera donc arbitrairement réduit dans tout ce travail.

Nous suivrons le plan suivant :

- étude précise du difféomorphisme redressant Γ sur Γ_0
- construction d'un calcul 2-microparadifférentiel et étude de l'action de champs singuliers, ce qui permettra d'énoncer un théorème contenant les théorèmes A et B.
- exposé de la structure de la preuve de ce théorème.

Signalons que nous n'avons exposé ici au plus que des idées de démonstration. Le lecteur désireux de connaître les détails techniques les trouvera dans [12]. De plus, nous utiliserons les notations et conventions suivantes :

La fonction φ (resp.ψ) sera une fonction de $C_0^\infty(C)$, C étant une couronne fixée de $\mathbf{R}^n$ (resp. $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$) telles que (φ, ψ) réalise une partition de l'unité dyadique i.e. $\sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}x) + \psi(x) = 1$. On notera $|.|_\sigma$ (resp.$\|.\|_\sigma$) la norme dans H^σ (resp.C^σ) pour $\sigma \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$. Si $\sigma \in \mathbf{N}, \|.\|_\sigma$ désignera la somme des normes Sup des dérivées d'ordre plus petit que σ.

Une fonction $t \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n}; \mathbf{R})$ telle que

$$(i) \qquad \operatorname{Supp} t \subset \{(\xi, \eta)/|\xi| \leq \varepsilon|\eta|\} \quad \text{avec} \quad \varepsilon < 1$$

$$(ii) \qquad \operatorname{Supp}(1-t) \cap B(0,1)^c \subset \{(\xi, \eta)/|\xi| \leq \varepsilon_1|\eta|\}$$

$$(iii) \qquad |\partial^\alpha t(\xi, \eta)| \leq C_\alpha(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{-\frac{|\alpha|}{2}},$$

étant donnée, on appellera paraproduit l'opérateur défini par

$$T_u v(x) = (2\pi)^{-2n} \int e^{ix(\xi+\eta)} t(\xi, \eta) \hat{u}(\xi) \hat{v}(\eta) d\xi d\eta$$

Pour les propriétés d'opérance de T sur les espaces H^σ et C^σ, voir [5].

Si Z est une famille finie de N champs de vecteurs, on désignera toujours par I une suite d'éléments de $\{1, \ldots, N\}$, par $|I|$ la longeur de I (i.e. son nombre d'éléments), et pour $I = i_1, \ldots, i_l, Z^I$ (resp.$(T_Z)^I$) $= z_{i_1}(x, D), \ldots, z_{i_1}(x, D)$ (resp.$T_{z_{i_1}}, \ldots, T_{z_{i_l}}$).

De plus, si $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \phi_p(x) = \phi(2^p x)$. Enfin, si $x \in F$, un espace normé $\langle x \rangle = (1 + \|x\|_F^2)^{\frac{1}{2}}$ et si a est une fonction définie sur $T^*\Omega$ et α un difféomorphisme C^1 de Ω sur $\tilde{\Omega}$, on note $(\alpha_* a)$ la fonction définie sur $T^*\tilde{\Omega}$ par $\alpha_* a(y, \xi) = a(\alpha^{-1}(y); {}^t d\alpha^{-1}(y).\xi)$

2 Gerbes singulières et redressement du cône d'onde

Il s'agit de redresser le cône d'onde issu de l'origine associé à p sur le cône d'onde issu de l'origine associé à l'opérateur à coefficients constants $p(0, D)$. De plus, vu que l'on travaille dans le cadre quasi linéaire, les coefficients de p sont des fonctions C^∞ de la solution u. A ce titre, ils sont donc peu réguliers. Enfin, dans la suite, on aura absolument besoin de répercuter la régularité de la solution u sur la régularité du difféomorphisme redressant le cône d'onde.

On introduit donc les notations suivantes :

- $\tilde{p}(x, y; \xi)$ désigne un polynôme strictement hyperbolique par rapport à τ tel que $p_0(\xi) = \tilde{p}(0, y_0; \xi)$ vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2).
- Soit $y(x)$ une fonction C^2 de x, on pose $p(x, \xi) = \tilde{p}(x, y(x); \xi)$. Le paramètre y apparaît ici comme un terme de contrôle, nécessaire pour suivre la régularité des coefficients de p, comme on le verra au paragraphe 4.
- On désignera par Γ_0 le cône d'onde issu de l'origine associé à p_0.

Les bicaractéristiques nulles issues de l'origine sont données par

$$(2.1)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{dx}{ds} = \mathrm{grad}_\xi p(x(s), \xi(s)) \\ \dfrac{d\xi}{ds} = -\mathrm{grad}_x p(x(s), \xi(s)) \\ x(0) = 0 \quad \text{et} \quad \xi(0) = \xi_0 \in p_0^{-1}(0). \end{array}\right.$$

Posons $\tilde{B}(x, y; \xi) = \mathrm{grad}_\xi \tilde{p}(x, y; \xi)$.

Les hypothèses (H_1) et (H_2) assurent l'existence de deux voisinages coniques K et K' de $p_0^{-1}(0)$, de deux voisinages coniques K_1 et K_1' de Γ_0, d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$ contenant $(0, y_0)$, et d'une fonction $\tilde{\psi}_0$ définie sur $U \times K_1, C^\infty$ sur $U \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, homogène de degré $\frac{1}{m-1}$ en ξ, tels que :

$$(2.2)\qquad \forall (x, y; \xi) \in U \times K \quad \tilde{B}(x, y; \xi) \in K_1$$

$$(2.3)\qquad \forall (x, y; \xi) \in U \times K' \quad \tilde{\psi}_0(x, y; \tilde{B}(x, y; \xi)) = \xi$$

$$(2.4)\qquad \forall (x, y; v) \in U \times K_1' \quad \tilde{B}(x, y; \tilde{\psi}_0(x, y; v)) = v$$

Soit $\chi_1 \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ homogène de degré 0, supportée dans K_1', et valant 1 sur un voisinage conique K_1'' de Γ_0, et telle que $\mathrm{Supp}\chi_1 \cap (t = 0) = \emptyset$

On définit la fonction f de la manière suivante :

$$(2.5)\qquad \left|\begin{array}{l} \tilde{\psi}(x, y; v) = \chi_1(v) \tilde{\psi}_0(x, y; v) \\ \psi(x, v) = \tilde{\psi}(x, y(x); v) \ ; \ B(x, v) = \tilde{B}(x, y(x); v) \\ f(x, v) = \partial_x B(x, \psi(x, v)).v - \partial_\xi B(x, \psi(x, v)).\mathrm{grad}_x p(x, \psi(x, v)) \end{array}\right.$$

Il est clair que f est homogène de degré 2 en v, C^∞ en dehors de $v = 0$, et est une fonction C^∞ de $(x, y(x), \nabla y(x))$.

Soit x solutions de (G) : $\frac{dx^2}{ds^2} = f(x(s), \frac{dx}{ds})$, on a, par de très simples calculs, grâce à (2.2-5) :

(2.6) Si $x(s)$ est solution de (G) avec $\frac{dx}{ds}_{|s=0} \in \Gamma_0$ et $x(0) = 0$ alors $(x(s); \psi(x(s), \frac{dx}{ds}))$ est une bicaractéristique nulle de p.

(2.7) Si $(x(s); \xi(s))$ est une bicaractéristique nulle de p issue de 0, alors $x(s)$ est solution de (G) avec $\frac{dx}{ds}_{|s=0} \in \Gamma_0$ et $x(0) = 0$.

(2.8) Il existe un voisinage ouvert conique K_H de l'hyperplan H, alors $x(s) = sv$ avec $v \in K_H$, est solution de (G) avec $x(0) = 0$ et $\frac{dx}{ds}_{|s=0} = v$.

D'après les propriétés des gerbes décrites dans [15], il existe un ouvert Ω_0 contenant 0 tel que, pour tout $v \in \Omega, x(s, v)$ la solution de (G) telle que $x(s, v)$ solution de (G), $x(0) = 0$, $\frac{dx}{ds}_{|s=0} = v$; d'où, la définition suivante

Définition 2.1.— Exp $v = x(1, v)$ *où* $x(s, v)$ *est solution de* (G) *avec* $x(0, v) = 0$ *et* $\frac{dx}{ds}_{|s=0} = v$.

Remarquons que, d'après [14], Exp est un C^1 difféomorphisme local près de 0. On se restreindra dans toute la suite, à deux ouverts Ω_0 et $\Omega = \text{Exp}\Omega_0$ tels que $\Omega_0 \xrightarrow[\sim]{\text{Exp}} \Omega$. De plus, d'après (2.6-8), Exp $(\Gamma_0 \cap \Omega_0) = \Gamma \cap \Omega$ et $\text{Exp}_{|K_H \cap \Omega_0} = Id_{|K_H \cap \Omega_0}$.

On va maintenant étudier plus finement la régularité de l'application Exp. Dans le cas où $m = 2$, traité dans [11], la fonction f était quadratique en v. Ici, le fait que l'on soit dans le cas $m \geq 2$, entraîne une singularité en 0 pour f, d'où une singularité de type homogène pour l'application Exp. On introduit donc les espaces à poids suivants

Définition 2.2.— *Soit* $\sigma' > 0$ (resp.$\sigma' \geq 0$), $CP(\text{resp}.SP)^{\sigma,\sigma'}$ *désigne l'ensemble des distributions de* $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ *telles que :*

- $\|\varphi_p.v\|_r(\text{resp}|\varphi_p v|_r) \leq C(\text{resp}c_p)2^{-p(\sigma-r)}$ (resp. *avec* $(c_p)_{p\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})$) *pour tout* $p \geq 0$ *et tout* $r \in [0, \sigma[(\text{resp}[0, \sigma'])$
- $(1-\psi)v \in C^{\sigma'}(\text{resp}H^{\sigma'})$, *muni de la norme* $\|v\|_{\sigma,\sigma'}(\text{resp}|v|_{\sigma,\sigma'}) =$ $\underset{p\geq 0, r\in[0,\sigma']}{\text{Sup}} \quad 2^{p(\sigma-r)}\|\varphi_p v\|_r + \|(1-\psi)v\|_{\sigma'}(\text{resp}(\sum_p 2^{+2p(\sigma-\sigma')}|\varphi_p v|^2_{\sigma'} + |(1-\psi)v|^2_{\sigma'})^{\frac{1}{2}})$

Remarquons que, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq [\sigma']$, si $a \in CP^{\sigma,\sigma'}$ alors $|D^\alpha a(x)| \leq C\|a\|_{\sigma,\sigma'}|x|^{\sigma-|\alpha|}$, et que, pour tout $\sigma \in \mathbf{R}_+$, $CP^{\sigma,\sigma'} \subset C^{\text{Inf}(\sigma,\sigma')}$.

Théorème 2.3.— *Soit* f *une fonction* $C^{\rho-1}$ *en* x *avec* $\rho > 2, C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ *et homogène de degré 2 en* v, *on considère l'application* Exp *associée à la gerbe* (G) : $\frac{dx^2}{ds^2} = f(x(s), \frac{dx}{ds})$ *par la définition 2.1. Pour tout* $\rho' < \rho - 1$, *l'application* $t \mapsto \text{Exp}(t.) - t\ Id$ *est* $C^1([0,1]; CP^{2,\rho'-1})$.

Démonstration Grâce au technique standard d'équations différentielles ordinaires, on se ramène à démontrer le lemme suivant, qui décrit l'action des fonctions CP^{λ,r_0} sur les fonctions $CP^{1,r}$ par composition.

Lemme 2.4.— *Soient g une fonction de $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^{N'}$ dans $\mathbf{R}^N$ telle que g soit C^{r_0} en x, CP^{λ,r_0} en x', avec $r_0 > 1$, et C et C_1 deux réels tels que $0 < C < C_1$; on désigne par A_σ l'ensemble des v de $CP^{1,\sigma}$ tels que $C|y| \leq |v(y)| \leq C_1|y|$ et posons $G(u,u') = g.(u,u')$, on a alors :*

(i) Si $\sigma < r_0$, G envoie continûment $CP^{1,\alpha} \times A_\sigma$ dans $CP^{\lambda,\sigma}$

(ii) si $\sigma \leq r_0 - 1$, G est lipschitzienne sur les bornés de $CP^{1,\sigma} \times A_\sigma$.

La démonstration consiste à majorer $\|\varphi_p(g_0(u,u') - g_0(v,v'))\|_r$ pour $r \leq \sigma$. Soit $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ valant 1 près du support de φ ; comme (u,u') et (v,v') appartiennent à $CP^{1,\sigma} \times A_\sigma$, on définit $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $\tilde{\tilde{\varphi}} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{N'} \setminus \{0\})$ telle que si $u_p(\text{resp.}v_p) = \tilde{\varphi}_p(x)(u,u')$ $(\text{resp.}\tilde{\varphi}_p(x)(v,v'))$ et $g_p = \tilde{\psi}_p(x).\tilde{\tilde{\varphi}}_p(x')g$, alors

$$\varphi_p g \circ (u,u') - \varphi_p g \circ (v,v') = \varphi_p(g_p \circ u_p - g_p \circ u_p)$$

Vu que l'on a $\|a_1 \dots a_\mu\|_2 \leq \prod_{i=1}^{\mu}(\prod_{j\neq i}\|a_j\|_0)\|a_i\|_r$ et que $\|\varphi_p\|_r \leq C_r 2^{p^r}$, il suffit de majorer $\|g_p \circ u_p - g_p \circ u_p\|_r$ sachant que l'on a, pour tout $r \leq \sigma \|u_p\|_r(\text{resp}\|v_p\|_r) \leq C2^{-p(1-r)}$ et pour tout $r \leq r_0, \|g_p\|_r \leq C2^{-p(\lambda-r)}$. Pour ce faire, il suffit de revisiter les démonstrations des théorèmes standard de composition des fonctions höldériennes en suivant les constantes.

3 Calcul 2-micro paradifférentiel et champ singuliers.

La singularité de ce difféomorphisme en 0, ainsi que sa faible régularité en dehors, va bien sûr se lire sur les symboles obtenus après transport. Il est donc nécessaire de définir une classe contenant ces symboles, puis de la quantifier de manière à la faire opérer sur les espaces à poids associés à Γ. Le calcul symbolique que l'on va construire répond à ce programme.

Définition 3.1.— $\sum_r^{m,m'}$ *est l'ensemble des fonctions, somme pour j invariant de 0 à $[r]$ des fonctions $a_j(x,\xi), C^\infty$ en ξ, $CP^{m'-j,r-j}$ en x telles que :*

$$\|D_\xi^\alpha a_j(.,\xi)\|_{m'-j,r-j} \leq C\langle\xi\rangle^{m+m'-|\alpha|}$$

Remarquons que, lorsque $r = +\infty$, on retrouve les symboles définis par J.M. Bony dans [7]. On quantifie ces symboles de la manière suivante : T étant un paraproduit donné sur $\mathbf{R}^n$, M un entier strictement supérieur à n, et $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ valant 1 près de $\text{Supp}\varphi$, on pose $\varphi_K(\xi) = e^{i(K|\xi)}\varphi(\xi)$, et $a_{k,q}(x) = \int (I - \Delta_\xi)^M \tilde{a}(x, 2^q\xi)\varphi_K(\xi)d\xi$, et enfin pour $u \in CP^{\sigma,\sigma'}$ ou $SP^{\sigma,\sigma'}$:

$$\overset{\circ}{T}_a u = \sum_{K\in\mathbf{Z}^n}\sum_{0\leq p\leq q}\tilde{\varphi}_p T_{\tilde{\varphi}_p a_{K,q}}\varphi_K(2^{-q}D)(\varphi_p.u)$$

Si $u \in H^{\sigma,\sigma'}$ l'espace 2-microlocal (voir [7] pour la définition lorsque $\sigma' \notin \mathbf{N}$), on pose.

$$\overset{\circ}{T}_a u = \overset{\circ}{T}_a \pi u \quad \text{avec} \quad \pi u = \sum_{0\leq p\leq q}\varphi_p.\varphi(2^{-q}D)u\ .$$

Définition 3.2.— *Soit T un paraproduit sur $\mathbf{R}^n$, et soit $\mathcal{Z}$ une famille finie de champs de vecteurs à coefficients CP^{1,r_0}. $CP(\text{resp})SP^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z},k)$ est l'ensemble des u telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, et toute suite I telle que $\|I\| \leq k$,*

$$(\overset{\circ}{T}_{\mathcal{Z}})^I u \in CP(\text{resp}SP)^{\sigma,\sigma'-\varepsilon}.$$

L'hypothèse suivante permet d'utiliser efficacement ces espaces, comme le prouve le théorème 3.3.

$(\overset{\circ}{H}_{k-1})$	Il existe un paraproduit T pour lequel les coefficients des champs de $\mathcal{Z}$ sont dans $CP^{1,r_0}(\mathcal{Z},k-1)$ avec $r_0 > 1$.

Théorème 3.3.— *Sous l'hypothèse $(\overset{\circ}{H}_{k-1})$, on a, pour tout $\ell \leq k$*

(*i*) $$CP^{\sigma_1,\sigma_1'}(\mathcal{Z},k).CP^{\sigma_2,\sigma'}(\mathcal{Z},k) \subset CP^{\sigma_1,\sigma_2,\sigma'}(\mathcal{Z},\ell).$$

De plus, si $a_i \in \sum_\rho^{m_i,m_i}(\mathcal{Z},k)$, on a alors,

(*i*) *$\overset{\circ}{T}_{a_1}$ envoie SP (resp.CP)$^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z},l)$ dans SP(resp.CP)$^{\sigma-m_1,\sigma'-m_1-m_1'}(\mathcal{Z},l)$ pour tout $\sigma' \geq m_1+m_1'$ (resp.$\sigma' > m_1+m_1'$).*

(*ii*) *Soit $\overset{\circ}{T}'$ une autre quantification (i.e. un autre paraproduit et une autre partition de l'unité dyadique), alors $\overset{\circ}{T}_{a_1} - \overset{\circ}{T}'_{a_1}$ envoie SP (resp.CP)$^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z},l)$ dans SP (resp.CP)$^{\sigma-m_1,\sigma'-m_1-m'+\rho}(\mathcal{Z},l)$ pour tout $\sigma' \geq$ (resp. $>$)m_1+m_1'.*

(*iii*) *$\overset{\circ}{T}_{a_1}\overset{\circ}{T}_{a_2} - \overset{\circ}{T}_{a_1\sharp a_2}$ envoie SP (resp.CP)$^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z},l)$ dans SP (resp.CP)$^{\sigma-m_1-m_2,\sigma'-m_1-m_1'-m_2-m_2'+\rho}(\mathcal{Z},l)$ pour tout $\sigma' \geq$ (resp. $>$)$m_1+m_2+m_1'+m_2'$, avec $a_1\sharp a_2 = \sum_{i+j+|\alpha|\leq[\rho]} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_{1,i} D_x^\alpha a_{2,j}$.*

Un point très important est aussi l'invariance de l'hypothèse $(\overset{\circ}{H}_{k-1})$ par difféomorphisme. On démontre que sous l'hypothèse $(\overset{\circ}{H}_{k-1})$, pour tout $\sigma_0 > 0$, si $a \in CP^{\sigma_0,\sigma_0'}(\mathcal{Z},k-1)$, alors, pour tout $\sigma' \in]0,\sigma_0'], \overset{\circ}{T}_a - a$ envoie $CP^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z},k-1)$. Il en résulte que, sous $(\overset{\circ}{H}_{k-1})$, pour tout $\sigma' \in]0,r_0-1]$, et tout $\ell \leq k$, $CP^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z},\ell)$ est l'ensemble des v dans $CP^{\sigma,\sigma'}$ tel que pour toute suite I telle que $|I| \leq k$ $(\mathcal{Z})^I(x,D)v \in CP^{\sigma-\varepsilon,\sigma'}$ pour tout $\varepsilon > 0$. On a alors

Théorème 3.4.— *Soit $\mathcal{Z}$ une famille de champs de vecteurs $CP^{1,r_0}(r_0 > 1)$ vérifiant $(\overset{\circ}{H}_{k-1})$ et α un difféomorphisme $CP^{1,r_0}(\mathcal{Z},k-1)$, alors*

(*i*) *$\alpha_*\mathcal{Z}$ vérifie $(\overset{\circ}{H}_{k-1})$*

(*ii*) *Si $\sigma' \in]0,r_0-1]$, alors, pour tout $\ell \leq k$*

$$u \in CP^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z},\ell) \Leftrightarrow u \circ \alpha^{-1} \in CP^{\sigma,\sigma'}(\alpha_*\mathcal{Z},\ell)$$

$$u \in SP^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z},\ell) \Leftrightarrow u \circ \alpha^{-1} \in CP^{\sigma,\sigma'}(\alpha_*\mathcal{Z},\ell)$$

(*iii*) *$\alpha^{-1} \in CP^{1,r_0}(\alpha_*\mathcal{Z},k-1)$.*

On peut maintenant définir la régularité conormale par rapport au cône I.

Définition 3.5.— *Soit $\mathcal{Z}_0$ une famille finie de champs de vecteurs homogènes de degré 1, engendrant l'ensemble des champs $CP^{1,+\infty}$ tangents à $\Gamma_0 \setminus \{0\}$, on pose $\mathcal{Z} = \mathrm{Exp}_* \mathcal{Z}_0$ et $SP(\mathrm{resp}CP)(\mathrm{resp}H)^{\sigma,\sigma'}(\Gamma, k) = SP(\mathrm{resp}CP)(\mathrm{resp}H)^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z}, k)$.*

Le point clef est le théorème suivant :

Théorème 3.6.— *Soit u une solution $H^{s'}(\Gamma, \ell)$ de (E) pour tout $s' < s$, avec $s > \frac{n}{2} + m + 2 - d$; si $\mathcal{Z}$ vérifie l'hypothèse $(\overset{\circ}{H}_{\ell-1})$, alors, pour tout $\rho' < \rho = s - \frac{n}{2} - m + d$*

$$\mathrm{Exp} - Id \in CP^{2,\rho'-1}(\Gamma_0, \ell)$$

et en particulier $(\overset{\circ}{H}_{\ell})$ est vérifiée

Démonstration

En dérivant l'équation (G), on se ramène à une équation linéaire et l'on se trouve dans une zone de régularité où $CP^{\sigma,\sigma'}(\mathcal{Z}, \ell)$ est définie par l'action des vrais champs. On est alors ramené grâce à (2.5) à démontrer que si $G(X, Y)$ est $CP^{\lambda,\rho'-2}(\Gamma, j+1)$ en X, et $CP^{\mu,+\infty}$ en Y, alors, si $t \mapsto \mathrm{Exp}(t.) \in C^1[0,1] ; CP^{1,\rho'-1}(\Gamma_0, j)$ alors $\tilde{G} : t \mapsto G(\mathrm{Exp}(tv)), \frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tv)$ est $C[0,1]; CP^{\lambda+\mu,\rho'-2}(\Gamma_0, j+1)$. Si l'on suppose le résultat acquis pour $\ell \leq j$, on prend $z \in \mathcal{Z}_0$, on a alors, grâce à l'homogénéité de z :

$$z(v, D_v)G(\mathrm{Exp}(tv), \frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tv)) =$$

$$((\mathrm{Exp}_* z)(x, D_x)G)(\mathrm{Exp}(tv), \frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tv)) + d_y G.z(v, D_v)\frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tv)$$

et il en résulte $(P_{\ell+1})$.

Il reste à démontrer (P_0).

Soit $t_0 \neq 0$; si t est assez proche de t_0, il existe deux réels C et C_1 tels que $C|v| \leq |\mathrm{Exp}(v)| \leq C_1|v|$. Soit χ une fonction C^∞ homogène telle que $\mathrm{Supp}\chi \subset \{|x| \approx |y|\}$ et telle que, si $|t - t_0| \leq a$ alors

$$G(\mathrm{Exp}(tv), \frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tv)) = G \circ \chi(\mathrm{Exp}(tv), \frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(tv))$$

Reste à étudier la continuité en $t = 0$. Il s'agit d'évaluer, pour t proche de 0, la quantité

$$\|\varphi_p.G(\mathrm{Exp}(t.), \frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(t.))\|_r \quad \text{pour} \quad r \leq \rho' .$$

On suppose que $t \approx 2^{-q}$; il vient alors

$$\varphi_p.G(\mathrm{Exp}(t.), \frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(t.)) = \varphi_p G_{p,q}(E_p(t,.), \frac{d}{dt}E_p(t,.))$$

avec

$$G_{p,q}(x,y) = \tilde{\varphi}_{p,q}(x)\tilde{\varphi}_p(y)H(x,y)$$
$$E_p(t,v) = \tilde{\varphi}_p(v)\mathrm{Exp}(tv)\ .$$

On a ainsi introduit une inhomogénéité dans les dérivations en x et y dans H. Une dérivation en x pèsera 2^{p+q}, une dérivation en y, 2^p. Cela sera compensé par la dérivation de $E_p(t,v)$ qui pèsera 2^{p-q}. On démontre ainsi que l'on a ; pour $t \approx 2^{-q}$

$$\|G_{p,q}(E_p(t,v), \frac{d}{dt}E_p(t,v))\|_r \leq t2^{-p(\lambda+\mu-r)}\sharp$$

Théorème 3.7.— *Si u solutions H^s de (E) et si $\gamma_j u \in H^{s-j,k}$ pour $j \in \{0, m-1\}$ alors $(\overset{\circ}{H}_k)$ est vérifiée et $u \in H^{s'+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Gamma,k)$ pour tout $s' < s$.*

Remarquons que ce théorème contient les théorèmes A et B.

En effet $\Gamma_0 \setminus \{0\}$ est une hypersurface ; d'après le théorème 3.6, l'application Exp fournit un paramètrage $C^{\rho'-1+k}$ de $\Gamma \setminus \{0\}$. La théorie des distributions conormales associées à une hypersurface peu régulière développée dans [2] et [11] assure les théorèmes A et B.

4 Structure de la démonstration du théorème 3.7

- Dans un premier temps, on démontre que $u \in H^{s'+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ pour tout $s' < s$, ce qui est assez standard.
- Dans un deuxième temps, en transportant les résultats facilement obtenus dans la situation droite, on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.1.— *Sous l'hypothèse $(\overset{\circ}{H}_{l-1})$ et si u est une solution $H^{\frac{1}{2}+s',-\frac{1}{2}}(\Gamma,l)$, il existe une famille $\mathcal{M} = (m_i)_{1\leq i\leq N}$ d'éléments de $\sum^{0,1}_{\rho'-2}(\Gamma,l)$ telle que :*

(i) L'ensemble des zéros communs aux éléments de $\mathcal{M}$ est $N^*(\Gamma) \cap N^*(0)$ et il existe des familles $(c_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ et $(d_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ d'éléments de $\sum^{0,0}_{\rho'-2}(\Gamma,l)$ telles que, si $\mathcal{Z} = (z_i)_{1\leq i\leq N}$, on ait :

$$m_i = \sum_{j=1}^{N} c_{i,j}z_j \quad \textit{et} \quad z_i = \sum_{j=1}^{N} d_{i,j}m_j \quad \textit{près de} \quad p^{-1}(0)\ ;$$

(ii) Il existe $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N} \subset \Sigma^{m-1,0}_{\rho'-4}(\Gamma,l)$ et $b_i \in \Sigma^{0,0}_{\rho'-4}(\Gamma,l)$ telles que

$$H_p m_i = \sum_j a_{i,j}m_j + b_i p$$

(iii) Il existe une famille $(\tilde{m}_i)_{1\leq i\leq N}$ de $\Sigma^{1,0}_{\rho'-3}(\Gamma,l)$ telle que $m_i = t\tilde{m}_i + m_{i|H}$, $(m_{i|H})_{1\leq i\leq \tilde{N}}$ étant une famille génératrice des champs de vecteurs de H nuls en 0, et $(m_{i|H})_{\tilde{N}+1\leq i\leq N}$ étant du type $x'_j\tau$.

- Dans un troisième temps, on démontre que, si $u \in H^{s'+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\Gamma,\ell)$ et si $\gamma_j u \in H^{s-j,\ell+1}$ pour tout $j \in \{0,\dots m-1\}$, alors si $U_\ell = ((\overset{\circ}{T}_{\mathcal{M}})^I u)_{|I|\leq \ell'}$, U_ℓ est solution de $\overset{\circ}{T}_p Id\, U_\ell + \overset{\circ}{T}_{a_\ell} U_\ell \in H^{s'-m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ pour tout $s' < s$, et $\gamma_j(U_\ell) \in H^{s-j}$ pour tout $j \in \{0,\dots m-1\}$.
- Et enfin, il suffit de démontrer le

Théorème 4.2.— *Soit a une matrice de symbole $\Sigma_r^{m-1,0}$. Si, pour tout $s' < s$*

$$V \in H^{s'+\frac{1}{2},-\frac{3}{2}}, \overset{\circ}{T}_p V + \overset{\circ}{T}_a V \in H^{s'-m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}},$$

et si $\gamma_j V \in H^{s'-j}$ pour tout $j \in \{0,\dots,m-1\}$, alors, pour tout $s' < s$, $V \in H^{s'+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, Evolution d'une onde simple, Actes des Journées E.D.P. de Saint-Jean-de-Mont, 1985.

[2] S. Alinhac, Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires. Annales Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème série 21 1988 p.91-133.

[3] M.F. Atiyah, R. Bott et L. Gärding, Lacunas for hyperbolic differential operators with constants coefficients, Acta Math 124, p.109-189, 1970.

[4] M. Beals, Self spreading and strenght of singularities for solutions of semi linear wave equations, Annals of Maths 118, 1983. p. 187-214.

[5] J.M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Annales Sci. Ec. Norm. Sup. 4e Série 14, 1981. p.209-246.

[6] J.M. Bony, Interaction des singularités pour des équations de Klein-Gordon non linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz n°2, 1983-1984.

[7] J.M. Bony, Second microlocalization and propagation of singularities for semi linear hyperbolic equations, Contribution to the workshop and symposium on hyperbolic equations and related topics, Kakata and Kyoto, August 27-Sep. 5, 1984.

[8] J.M. Bony, Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non linéaires, Advances in microlocal analysis, Nato ASI Série 1985, Castelvecchio Pasoli Italy Reidel Pub. Comp. Ed. Garnir.

[9] J.Y. Chemin, Calcul paradifférentiel précisé et applications à des équations aux dérivées partielles non linéaires, Duke Math. Journal Vol. 56, n°3, 1988.

[10] J.Y. Chemin, Interaction contrôlée dans les équations aux dérivées partielles non linéaires, Bull. Soc. Math. France 116 1988 p.341-383.

[11] J.Y. Chemin, Régularité de la solution d'un problème de Cauchy fortement non linéaire à données singulières en un point, Prépublication de l'Ecole Polytechnique, à paraître aux Annales de l'Inst. Fourier.

[12] J.Y. Chemin, Evolution d'une singularité ponctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires, Prépublication de l'Ecole Polytechnique, à paraître à l'American Journal of Math.

[13] P. Godin, Propagation of C^∞ regularity for fully non linear second order strictly hyperbolic equations in two variables, Trans. Amer. Math. Soc. 290, 1985. p.825-830.

[14] S. Lang, Introduction aux variétés différentielles, Dunod, 1962.

[15] J. Rauch et M. Reed, Non linear microlocal analysis of semi linear hyperbolic systems in one space dimension, Duke Math Journal 49, 1982. p. 397-475.