Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Métivier

Stabilité des chocs faibles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. nº 20, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A21_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

STABILITE DES CHOCS FAIBLES

G. METIVIER

Exposé n°XX

23 Mai 1989

I. Position du problème.

1. Equations :

On considère un système de N lois de conservation :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} \partial_j f_j(u) = 0 \tag{1.1}$$

La variable d'espace-temps est notée $\tilde{x} = (x_0 = t, x_1, \cdots, x_n) = (t, x)$. Les flux f_j sont des fonctions C^∞ de $u \in \mathbf{R}^N$. Mis sous forme quasilinéaire (1.1) devient :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(u)\partial_j u \tag{1.2}$$

avec $A_j(u) = f_j'(u)$. On supposera toujours ce système **hyperbolique symétrique**, c'est-à-dire qu'il existe une matrice définie positive $\Sigma(u), C^\infty$ en u, telle que les ΣA_j sont toutes symétriques. (Par exemple on suppose que (1.1) admet une entropie strictement convexe).

Un choc est d'abord une solution faible de (1.1), discontinue à travers une surface S : de part et d'autre de S, u est une solution régulière de (1.1) ou (1.2), et dire que u est solution faible de (1.1) revient à imposer les conditions de saut de Rankine-Hugoniot :

$$\partial_t\varphi[u] + \sum_{j=1}^{n} \partial_j\varphi[f_j(u)] = 0 \quad \text{sur} \quad S \tag{1.3}$$

si $\varphi = 0$ est l'équation du front S'.

L'idée de base consiste à considérer les équations (1.2) (1.3) comme un problème aux limites hyperbolique, à frontière libre ; on rappellera ci-dessous, les propriétés structurelles de ce problème, lorsque la discontinuité est un choc, mais rappelons d'abord quelques faits simples concernant l'équation (1.3).

2. Les conditions de saut :

le cas le plus simple de solution faible discontinue est celui où le front S est un hyperplan, d'équation $\sigma.t = \nu.x$, et où u prend des valeurs constantes u^- et u^+ de chaque côté de S, pour $\nu.x - \sigma t < 0$ ou > 0. Le problème se réduit alors à la condition de saut (1.3), c'est-à-dire :

$$\sigma[u] = [\nu.f(u)] \tag{1.4}$$

si l'on note $\nu.f = \sum_{j=1}^{n} \nu_j f_j$ avec $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$.

Lemme ([L]).— *si $\lambda(u,\nu)$ est une valeur propre simple de $\nu.A = \Sigma\nu_j A_j$, de vecteur propre $r(u,\nu)$, alors pour u^- et ν fixés il existe une courbe de solutions (non triviales) de (1.4), de la forme :*

$$(1.5) \qquad \begin{cases} u^+ = u^- + \varepsilon\, r(u^-,\nu) + 0(\varepsilon^2) \\ \sigma = \lambda(u^-,\nu) + \dfrac{1}{2}\varepsilon(r.d_u\lambda)(u^-,\nu) + 0(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Rappelons enfin la terminologie en vigueur (Lax [L]) : la valeur propre λ est dite vraiment non linéaire si $r.d_u\lambda \neq 0$; on normalise alors r par la condition $r.d_u\lambda \equiv 1$, et (1.5) implique que :

$$(1.6) \qquad \begin{cases} \lambda(u^+,\nu) < \sigma < \lambda(u^-,\nu) & \text{pour} \quad \varepsilon < 0 \quad (|\varepsilon| \ \text{ petit }) \\ \lambda(u^+,\nu) > \sigma > \lambda(u^-,\nu) & \text{pour} \quad \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon \ \text{ petit }) \end{cases}$$

Par contre, la valeur propre est dite linéairement dégénérée si $r.d_u\lambda \equiv 0$; on vérifie alors que $\sigma = \lambda(u^-,\nu) = \lambda(u^+,\nu)$; la discontinuité prend le nom de discontionuité de contact.

3. Propriétés du système (1.2) (1.3) pour les chocs.

a) La première chose que l'on demande, est que le front S soit **non caractéristique** : comme on vient de le voir, cela correspond à une hypothèse de vraie non linéarité sur la valeur propre λ.

b) on vérifie ensuite que le nombre de conditions aux limites (N) est le bon pour le problème aux limites en considération (il y a $2N+1$ inconnues : u^-, u^+ et φ l'équation de S). Cela revient à imposer les **conditions de choc de Lax**. ([L]) : notant $\lambda_j(u,\nu)$ les valeurs propres de $\nu.A$ ordonnées dans le sens croissant, il existe k tel que :

$$(1.7) \qquad \begin{cases} \lambda_k(u^+,\nu) < \sigma < \lambda_k(u^-,\nu) \\ \lambda_{k-1}(u^-,\nu) < \sigma < \lambda_{k+1}(u^+,\nu) \end{cases}$$

Dans l'exemple du §2 ci-dessus, cela revient à **imposer** $\varepsilon < 0$ (si $|\varepsilon|$ est assez petit). (cf. (1.6)).

c) on peut maintenant se demander sous quelles conditions le problème aux limites (1.2) (1.3) est "bien posé". Dans le sens le plus fort, cela revient à imposer une condition de type "Lopatinski uniforme", condition introduite et étudiée par A. Majda ([Ma1] [Ma2]), et qu'il a appelée condition de **stabilité uniforme**.

4. Questions posées par les chocs faibles :

Comme on vient de le voir, pour les chocs la matrice de bord (coefficient de la dérivation normale à S) est inversible. Néanmoins, les relations (1.5) montrent que $\sigma \rightarrow \lambda(u^{\pm}, \nu)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire que pour $|u^+ - u^-|$ petit, la **matrice de bord a une petite valeur propre**. A la limite (formellement), le saut de u est nul, mais en général celui de ∇u ne l'est pas ; on obtient alors une **onde sonique** ([Me2] [Me3]) pour laquelle le front S' est effectivement caractéristique.

Plus prosaïquement, on constate que les estimations de Majda explosent lorsque la force du choc tend vers 0, ce qui est quelque peu paradoxal puisqu'on s'attend au contraire à ce que la singularité soit de moins en moins forte. Il faut d'abord se convaincre qu'il se passe vraiment quelque chose, ce qu'on peut voir en examinant la régularité du front S, d'équation $\varphi = 0$:

- pour un choc uniformément stable, les conditions de Rankine-Hugoniot forme un système du premier ordre **elliptique** en φ_s et φ a donc 1 régularité de plus que u.

- a la limite, pour une onde sonique, la seule chose qu'on sache est que φ est solution d'une équation eikonale $\partial_t\varphi + \lambda(u, \partial_x\varphi) = 0$, et donc (en dimension d'espace ≥ 2) φ a simplement la même régularité que u.

Il est donc clair qu'en cours de route on perd une régularité pour φ ; en fait la situation est pire, car aussi bien Rankine-Hugoniot que l'équation eikonale ont lieu sur S, ce qui permet de comparer la régularité de φ à celle des traces de u, et en passant d'un problème non-caractéristique à un problème qui l'est, on perd aussi de la régularité sur les traces de u.

En conclusion, on peut résumer la philosophie du problème de la manière suivante : **"plus le choc est fort, plus il est stable"**.

5. Problèmes :

a) le premier problème posé est donc de décrire ce qui se passe dans les estimations de Majda lorsque la force du choc tend vers 0, de voir les quantités que l'on conserve et celles que l'on perd. Dans cet exposé, on va s'intéresser aux estimations L^2 pour les équations linéarisées. La suite naturelle sera de reprendre les calculs de [Me3] pour en déduire des estimations "Sobolev" pour les équations (1.2) (1.3), et d'en déduire des théorèmes d'existence dans des domaines indépendants de la force du choc, de même qu'une démonstration rigoureuse de la convergence des chocs faibles vers les ondes soniques.

b) Le deuxième problème est de savoir quels sont les chocs faibles qui sont stables au sens de Majda. Rappelons que les lois scalaires ($N = 1$) fournissent des exemples simples de choc qui ne sont jamais (en dimension $n \geq 2$) uniformément stables au sens de Majda. Néanmoins, l'idée couramment répandue, et que nous conforterons, est que, moyennant une hypothèse douce sur la valeur propre $\lambda(u, \nu)$ (convexite en ν), tous les chocs faibles sont stables au sens de Majda, dès que les conditions de Lax sont satisfaites.

c) Un troisième problème, que nous n'aborderons pas ici, est de discuter la notion même de stabilité. Entre les estimations de Majda, celles que nous allons donner pour les chocs faibles, celles concernant les ondes soniques, et celles qu'on écrit facilement pour les chocs dans les lois scalaires, il y a sans doute une notion minimale (mais suffisamment forte pour les applications) à dégager, de problème suffisamment bien posé.

II. Un résultat de stabilité L^2.

1. Equations :

Comme Majda ([Ma1], [Ma2]) on redresse le front S par un changement de variables (inconnu) de la forme $x_n = \Phi(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, \tilde{x}_n)$ qui transforme S en la surface $\{\tilde{x}_n = 0\}$. Ce faisant on introduit l'équation de S (ou plutôt ϕ) dans les équations. On linéarise autour de fonctions données (u, ϕ) et cela conduit au problème suivant : (cf. [Ma1] et aussi [A], [Met 3]) :

$$\partial_t v + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(u)\partial_j v + KM(u,\theta)\partial_n v = f \tag{2.1}$$

$$\partial_t \varphi[u] + \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j \varphi[f_j(u)] + [Mv] = g\ . \tag{2.2}$$

L'équation (2.1) a lieu de chaque côté $x_n > 0$ et $x_n < 0$, alors que la condition aux limites (2.2) est posée sur $x_n = 0$. Les fonctions $u = (u^+, u^-)$ sont données, de même que $\theta = \theta^\pm = (\theta_0^\pm, \cdots, \theta_{n-1}^\pm)$ et $K = K^\pm > 0$; (le vecteur $(\theta, 1/K)$ représente la différentielle de la fonction ϕ autour de laquelle on linéarise). Enfin $M(u,\theta) = A_n(u) - \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j A_j(u) - \theta_0 Id$.

2. Hypothèses :

on se donne donc une valeur propre $\lambda(u,\xi)$ de $\sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j(u)$; on la suppose **simple** (pour $\xi \neq 0$), et **vraiment non linéaire** en u (pour ξ dans un cône $\mathcal{C}$ qui contient $(0, \cdots, 0, 1)$). On suppose aussi que $\lambda(u, \xi)$ est une fonction **strictement convexe** ou strictement concave en ξ (pour $\xi \in \mathcal{C}$), dans la mesure où une fonction homogène de degré 1 peut l'être. (voir les remarques ci-dessous).

Enfin, si λ n'est pas une valeur propre extrême (la plus petite ou la plus grande), on suppose que le système est strictement hyperbolique.

Exemple : le système d'Euler de la dynamique des gaz pour lequel les valeurs propres extrêmes sont vraiment non linéaires et de la forme $u.\xi \pm c|\xi|$

Remarques : on a déjà rappelé comment l'hypothèse de vraie non linéarité était liée à la notion même de choc. L'hypothèse de stricte convexité peut, elle, surprendre. On peut la reformuler de la manière suivante : soit $\theta' = (\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$ tel que $(-\theta', 1)$ soit un point du cône $\mathcal{C}$. Soit $\theta_0 = \lambda(u, (-\theta', 1))$ de sorte que $\theta^\sharp = (-\theta_0, -\theta_1, \cdots, -\theta_{n-1}, 1)$ est une direction caractéristique (pour l'état u). Si on note $p(u,\tau,\xi) = \det(\tau Id + \xi.A(u))$, on a donc :

$$p(u, \xi_n\theta^\sharp + (\eta, 0)) = a(u,\eta)\xi_n^{N-1} + b(u,\eta)\xi_n^{N-2} + \cdots \tag{2.3}$$

avec a linéaire en $\eta = (\eta_0 = \tau, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1})$ et $\frac{\partial a}{\partial \tau} > 0$. L'hypothèse de stricte convexité revient à dire que :

$$b(u,\eta) \neq 0 \quad \text{lorsque} \quad a(u,\eta) = 0\ . \tag{2.4}$$

Cette hypothèse joue deux rôles : le premier (fondamental ?) est qu'elle implique que les conditions aux limites vont former un système elliptique en φ ; le second (technique ?) est que pour l'onde sonique limite, on se trouve dans le cas le plus simple géométriquement, de problèmes caractéristiques selon Majda-Osher [Ma-Os].

Pour finir, mentionnons que dans le cas d'une valeur propre extrême, l'hypothèse en question revient à supposer le cône d'hyperbolicité strictement convexe, alors qu'on sait qu'il est de toutes façons, convexe.

3. Hypothèses (suite) :

Décrivons maintenant les hypothèses qui portent sur u, θ et K. Elles sont de deux types : d'une part régularité, et d'autre part elles expriment que (u,θ) est proche d'un choc faible, et plus précisément que (u,θ) est presque solution des conditions de Rankine-Hugoniot.

On suppose donc que u, θ et K sont de classe C^2 sur $x_n \geq 0$ et sur $x_n \leq 0$ et que :

$$\text{sur} \quad x_n = 0 \ : \begin{aligned} &[\theta] = 0 \\ &[u] = -\varepsilon\{e^a r(u^+, \tilde\theta) + \varepsilon a_1\} \\ &\lambda(u^\pm, \tilde\theta) - \theta_0 = \mp\varepsilon e^{b\pm} \end{aligned} \tag{2.5}$$

où l'on note $\tilde\theta = (-\theta_1, \cdots, -\theta_{n-1}, 1)$. On suppose que $\tilde\theta$ prend ses valeurs dans un cône $\mathcal{K}$ à base compacte dans $\mathcal{C}$.

On se donne en outre un contrôle de certaines normes :

$$\|u\|_{W^{2,\infty}} + \|\theta\|_{W^{2,\infty}} + \|K\|_{W^{2,\infty}} + \|1_{|K}\|_{W^{2,\infty}} \leq C\ . \tag{2.6}$$

$$\|a\|_{W^{1,\infty}} + \|b^\pm\|_{W^{1,\infty}} + \|a_1\|_{L^\infty} \leq C\ . \tag{2.7}$$

Les normes dans (2.6) portent sur $x_n \geq 0$ et $x_n \leq 0$ alors que celles de (2.7) sont sur $x_n = 0$.

4. Enoncé du résultat.

Comme d'habitude dans les problèmes hyperboliques on introduit les normes à poids :

$$|v|_\gamma = \|e^{-\gamma t} v\|_{L^2}\ . \tag{2.8}$$

qui portent aussi bien sur $x_n \geq 0$, $x_n \leq 0$ que $x_n = 0$.

Théorème.— *étant donnés $\mathcal{K}$ et K, il existe $\varepsilon_0 > 0$, C et $\gamma_0 \geq 1$ tels que : pour (u, θ, K) vérifant les conditions (2.5) (2.6) et (2.7) avec $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, et pour (v, f, φ, g) assez régulières et à support compact, vérifiant (2.1) (2.2), on a l'estimation a priori suivante, valable pour $\gamma \geq \gamma_0$:*

$$\sqrt{\gamma}|v|_\gamma + \sqrt{\varepsilon}|v_{|x_n=0}|_\gamma + \gamma\sqrt{\varepsilon}|\varphi|_\gamma + \varepsilon|\nabla\varphi|_\gamma \leq C\{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}|f|_\gamma + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|g|_\gamma\} \,. \tag{2.9}$$

Remarques :

1. pour $\varepsilon > 0$ (disons $\varepsilon = 1$) on retrouve exactement l'estimation de Majda ([Ma 1]). (2.9) ne fait que rendre précis la perte de contrôle des normes des traces de v et de φ lorsque $\varepsilon \to 0$.
2. une partie de la démonstration consiste à dire que, pour $\varepsilon > 0$ fixé assez petit, le choc est uniformément stable au sens de Majda.
3. On se contente ici d'estimations a priori pour des fonctions assez régulières. En fait, pour ε fixé, l'existence de solutions $L^2_\gamma = e^{\gamma t}L^2$ pour des données dans L^2_γ est montrée dans [Ma 1] (voir la remarque précédente). De même, l'existence et les estimations dans des domaines $\{t \leq T\}$ s'en déduisent par les méthodes habituelles.
4. On pourrait se laisser impressionner par le facteur $1/\sqrt{\varepsilon}$ devant la norme de g du membre de droite. En fait, dans les applications, g provient de la linéarisation des conditions de Rankine-Hugoniot (1.3) dont tous les termes sont $0(\varepsilon)$. Par conséquent, il faut garder à l'esprit que dans les applications on devra prendre $g = \varepsilon h$, ce qui rend ce terme tout-à-fait inoffensif.

III. Quelques points de la preuve.

1. Réductions techniques :

Pour simplifier, on va supposer que $\lambda(u, \xi)$ est **la plus petite valeur propre** de $\xi.A(u)$.

- Du côté $x_n \leq 0$ on a alors un problème bien posé sans conditions aux limites, qu'on étudie par les méthodes habituelles d'intégration par parties, à l'aide du symétriseur Σ. On se ramène donc à un problème posé sur $x_n \geq 0$.
- par changement de variables, on peut supposer que

$$\lambda(u, \tilde{\theta}) - \theta_0 = -\varepsilon\ e^b \tag{3.1}$$

non seulement sur $x_n = 0$, mais sur tout $x_n \geq 0$.

Pour simplifier, dans le même ordre d'idée, on supposera que $K \equiv 1$.

- On diagonalise la matrice de bord..., et on se ramène à un problème du type suivant :

$$J\partial_n v + \sum_{j=0}^{n-1} B_j\partial_j v = f \tag{3.2}$$

(3.3)
$$Jv + \varepsilon X\varphi = g$$

où J est la matrice $\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ et X un système différentiel de la forme $\sum_{j=0}^{n-1} b_j\partial_j$.

(Rappelons que x_0 désigne la variable de temps t). On peut toujours supposer les B_j symétriques et B_0 définie positive.

Proposition.— *On a les estimations suivantes :*

(3.4)
$$\sqrt{\gamma}|v|_\gamma + \sqrt{\varepsilon}|v_{1|x_n=0}|_\gamma + |\hat{v}_1|_\gamma + \gamma\sqrt{\varepsilon}|\varphi|_\gamma + \varepsilon|\nabla\phi|_\gamma \leq$$
$$\leq C\{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}|f|_\gamma + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|g_1|_\gamma + |\hat{g}|_\gamma\}.$$

Dans cet énoncé $v_1(g_1)$ désigne la première composante de $v(g)$ et $\hat{v}(\hat{g})$ les $N-1$ restantes. (3.4) ne fait que reprendre (2.9), en étant plus précis quant aux estimations des traces, en tenant compte de la polarisation de v.

2. Structure du problème :

La remarque de base est la suivante :

Lemme.— *dans l'écriture (3.2) (3.3) du problème, b_j est égal à $e^a x$ la première colonne de $B_j + 0(\varepsilon)$*

En effet, avant la diagonalisation le coëfficient de ∂_j est $[f_j(u)] = \varepsilon e^a A_j(u)r + 0(\varepsilon^2)$.

Un bon exercice consiste à passer à la limite dans les conditions aux limites, lorsque $g = \varepsilon h$. On écrit la première équation :

$$-\varepsilon v_1 + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,1}\partial_j\varphi = \varepsilon h_1$$

et les $N-1$ autres :

$$\hat{v} + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \hat{b}_j\partial_j\varphi = \varepsilon h$$

ce qui, à la limite, donne (formellement) :

$$\begin{cases} -v_1 + \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,1}\partial_j\varphi = h_1 \\ \hat{v} = 0 \end{cases}$$

La première équation apparaît comme l'équation linéarisée de l'équation eikonale, et les $(N-1)$ autres comme les conditions de transmission naturelles, pour le problème linéarisé du problème des ondes soniques.

Le problème des chocs faibles est donc une perturbation singulière du problème des ondes soniques, la perturbation étant singulière à deux titres : d'abord il s'agit d'une régularisation non caractéristique d'un problème caractéristique, et ensuite il s'agit d'une régularisation elliptique des conditions aux limites.

3. Calcul symbolique :

on montre les estimations par construction de symétriseurs (de Kreiss), et utilisation du calcul paradifférentiel tangentiel à paramètre.

Pour fixer les idées, supposons que u^+, u^- et θ sont constants ; le problème (3.2) (3.3) est alors un problème à coefficients constants, que l'on traite par transformation de Fourier-Laplace : on conjugue l'équation par $e^{\gamma t}$ en posant $v = e^{\gamma t} w$ et après transformation de Fourier tangentielle, on se ramène à un système (essentiellement) de la forme suivante :

$$JD_n w + Pw = f \quad \text{pour} \quad x_n > 0 \tag{3.5}$$

$$Jw + \varepsilon e^a p\varphi = g \quad \text{pour} \quad x_n = 0 \tag{3.6}$$

avec P la matrice $\begin{bmatrix} \rho & t\sigma \\ \sigma & P' \end{bmatrix}$ et p le vecteur $\begin{bmatrix} \rho \\ \sigma \end{bmatrix}$. Ce sont des fonctions linéaires de $(\tau - i\gamma, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1})$, et $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} > 0$.

La construction du symétriseur est microlocale en $(\tau, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1}, \gamma)$, et différente, suivant que ρ est nul ou non.

Cas 1 : $\rho \neq 0$. On utilise le symétriseur naturel qui est ici $S = -Id$. L'hypothèse initiale d'hyperbolicité assure que Im $SP \geq \gamma$. Quant au terme de bord, il est :

$$(SJw, w) = \varepsilon |w_1|^2 - |\hat{w}|^2$$

En utilisant (3.6) et l'information microlocale $|\sigma| \leq C|\rho|$, ce terme majore :

$$\varepsilon |w_1|^2 + |\hat{w}|^2 - C|g|^2 - C\varepsilon^2 |w_1|^2$$

et donc $\varepsilon |w_1|^2 + |\hat{w}|^2 - C|g|^2$, si ε est assez petit.

cas 2 $\rho = 0$ On note alors que l'hypothèse de convexité implique que $\sigma \neq 0$.

Lemme.— *Il existe des matrices $W(u,\theta,\eta)$ et $V(u,\theta,\eta)(\eta = (\tau - i\gamma, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1}))$ telles que :*

$$W\ J\ V = J \qquad W\ P\ V = \Pi$$

avec Π *de la forme* $\begin{bmatrix} \tilde{\rho} & \tilde{\sigma} & 0 \\ \tilde{\sigma} & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \Pi'' \end{bmatrix}$ où $\tilde{\rho} = \rho + 0(\varepsilon|\eta|)$, *et* Π *est réelle quand* $\gamma = 0$.

On pose alors $V^{-1}v = z = (\zeta, z'')$ et le système (3.5) se découple en

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_n\zeta + \begin{bmatrix} \tilde{\rho} & \tilde{\sigma} \\ \tilde{\sigma} & \mu \end{bmatrix} \zeta = f \tag{3.7}$$

$$D_n z'' + \Pi'' z'' = f'' \tag{3.8}$$

On remarque alors que (à $0(\varepsilon)$ près) les conditions aux limites (3.6) se découplent elles aussi en :

$$\begin{cases} -\varepsilon\zeta_1 + \varepsilon\alpha\tilde{\rho} = g_1 \\ \quad \zeta_2 + \varepsilon\alpha\tilde{\sigma} = g_2 \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\zeta'' = g'' \tag{3.10}$$

Dans (3.9) $\alpha = e^a\varphi$.

Le problème (3.8) (3.10) s'évacue par symétrie, et il reste le problème (3.7) (3.9).

4. Un problème modèle :

Un problème modèle pour (3.7) (3.9) est le suivant :

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_x\zeta + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_t\zeta + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D_y\zeta = f \tag{3.11}$$

$$\varepsilon D_y\zeta_1 + D_t\zeta_2 = g \tag{3.12}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_x\zeta + \begin{pmatrix} \tau - i\gamma & \eta \\ \eta & \tau - i\gamma \end{pmatrix} \zeta = f \tag{3.11)'$$

$$\varepsilon\eta\zeta_1 + (\tau - i\gamma)\zeta_2 = g \tag{3.12)'$$

L'idée consiste à introduire un nouveau poids et à poser $\zeta = e^{\gamma x_n/2\varepsilon}\psi$, ce qui conduit à un système de la forme :

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_x\psi + \begin{pmatrix} \tau - i\gamma/2 & \eta \\ \eta & \tau - \gamma(1+\varepsilon)/2\varepsilon \end{pmatrix} \psi = f \tag{3.13}$$

$$\varepsilon\eta\psi_1 + (\tau - i\gamma)\psi_2 = g\ . \tag{3.14}$$

Pour $|\tau - i\gamma| \leq c|\eta|$, (qui est la région du cas 2), on utilise alors un symétriseur de la forme :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2(\tau - i\gamma)/\eta \\ \frac{2}{\varepsilon}\frac{\tau + i\gamma}{\eta} & -\frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{|\tau - i\gamma|^2}{\eta^2} + 1 \end{bmatrix}$$

• Le terme de bord est

$$(S\ J\ \psi,\ \psi) = \varepsilon|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - \frac{2}{\varepsilon}|\varepsilon\psi_1 + \frac{\tau - i\gamma}{\eta}\psi_2|^2 - 2|\frac{\tau - i\gamma}{\eta}\psi_2|^2$$

et pour $|\frac{\tau - i\gamma}{\eta}|$ assez petit, ce terme domine

$$\varepsilon|\psi_1|^2 + \frac{1}{2}|\psi_2|^2 - \frac{2}{\varepsilon}|g|^2 .$$

• Le terme d'intérieur est

$$\mathrm{Im}\ (SP\psi, \psi) \geq c\{\gamma|\psi_1|^2 + \frac{1}{\varepsilon}|\psi_2|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\frac{\tau - i\gamma}{\eta}\psi_2|^2\} .$$

alors que

$$(Sf, \psi) \leq |f|\{|\psi_1| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\psi_2| + \frac{1}{\varepsilon}|\frac{\tau - i\gamma}{\eta}\psi_2|\} .$$

Remarque : dans l'appendice de [Met 1], il est déjà montré que les chocs faibles pour les systèmes 2×2 sont uniformément stables. Le symétriseur ci-dessus permet de préciser les estimations L^2 en vigueur, en fonction de la force du choc.

Références

[L] P.D. Lax : Hyperbolic systems of conservation laws II ; Comm. Pure and Appl. Math. 10 (1957), pp.536-566.

[Ma 1] A. Majda : The stability of multidimensional shock fronts ; Memoirs Amer. Math. Soc., n°275 (1983).

[Ma 2] A. Majda : The existence of multidimensional shock fronts ; Memoir Amer. Math. Soc. n°281 (1983).

[Ma-Os] A. Majda - S. Osher : Initial boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary ; Comm. Pure Appl. Math. ; 28 (1975) pp.607-676.

[Met 1] G. Métivier : Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation en dimension deux d'espace ; Trans. Amer. Math. Soc. ; 296 (1986) pp 431-479.

[Met 2] G. Métivier : Ondes soniques ; Séminaire Ecole Polytechnique, année 1987-88.

[Met 3] G. Métivier : Ondes soniques ; J. Math. Pures et Appl. (à paraître).