Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

D. Robert

Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du laplacien

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. n° 17, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A18_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ASYMPTOTIQUE DE LA PHASE DE DIFFUSION A HAUTE ENERGIE POUR DES PERTURBATIONS DU LAPLACIEN

D. ROBERT

Exposé n°XVII

23 Mai 1989

1. Introduction

Le but de ce travail est d'étendre à des classes de perturbations non nécessairement à support compact des résultats obtenus il y a environ dix ans par Y. Colin de Verdière, L. Guillopé, G. Popov ([CdV], [Gu], [Po]) pour $-\Delta + V$, Δ étant le laplacien sur $\mathbf{R}^n$ et $V \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et par A. Majda-J. Ralston ([Ma-Ra]) pour $-\Delta_g$, Δ_g étant l'opérateur de Laplace-Beltrami pour une métrique Riemannienne g sur $\mathbf{R}^n$, coïncidant avec la métrique plate canonique en dehors d'un borné. Dés 1971, V.S. Buslaev [Bu] avait annoncé des résultats sur ce sujet. L'objet étudié par ces auteurs est la phase de diffusion, définie par la formule :

$$e^{2i.\theta(\lambda)} = \det(S(\lambda)) \quad \text{pour} \quad \lambda > 0 \tag{1.1}$$

$S(\lambda)$ étant la matrice de diffusion associée à la perturbation, notée L, de $L_0 = -\Delta$.

Pour les éléments de base de la théorie de la diffusion utilisés ici nous renvoyons le lecteur à [Re-Si].

La formule (1.1) a un sens car $S(\lambda) - \mathbf{1}$ est un opérateur de classe trace dans $L^2(S^{n-1})$ (S^{n-1} est la sphère unité de $\mathbf{R}^n$). La phase de diffusion $\theta(\lambda)$ est reliée à la fonction spectrale de perturbation de Birman-Krein ([Bi-Kr]) définie par la propriété suivante :

$$tr(f(L) - f(L_0)) = -\int f'(\lambda).s(\lambda)d\lambda \tag{1.2}$$

pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.

On a alors la relation remarquable :

$$\theta(\lambda) = -\pi.s(\lambda), \quad (\text{modulo} \quad \pi), \lambda > 0 \tag{1.3}$$

D'où l'on déduit, compte tenu de ce qui précède :

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{1}{2i\pi} tr(\frac{dS}{d\lambda}.S^*(\lambda)). \tag{1.4}$$

Le résultat principal obtenu dans les travaux [CdV], [Gu], [Po], [Ma-Ra] dit que si le symbole total de $L - L_0$ a son support dans $B \times \mathbf{R}^n_\xi$, où B est un borné de $\mathbf{R}^n_x$ et si de plus, dans le cas de [Ma-Ra], la métrique g n'a pas de géodésiques captées, alors $\frac{ds}{d\lambda}$ admet un développement asymptotique complet, pour $\lambda \nearrow +\infty$:

$$\frac{ds}{d\lambda} \sim \lambda^{\frac{n}{2}-1}.\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j.\lambda^{-j} \tag{1.5}$$

Les coefficients α_j sont des invariants spectraux calculables (voir plus loin). Remarquons que dans le cas de la diffusion par un potentiel on a : $\alpha_0 = 0$. Dans [Sc] R. Schrader suppose que l'asymptotique (1.5) est encore valide pour une classe de perturbations du Laplacien du type :

$$\tilde{L}(g,A,V) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \sum_{k,j=1}^{n} (\partial_j + iA_j).\sqrt{G} g^{j,k} (\partial_k + iA_k) + V \tag{1.6}$$

où : $g = \{g_{j,k}\}$ est une métrique Riemannienne sur $\mathbf{R}^n$; $G = \det g$; $\{g^{j,k}\} = \{g_{j,k}\}^{-1}$
[Sc] suppose :

i) $g_{j,k} - \delta_{jk} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ (espace de Schwartz)

ii) $A_j, V \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{E}_m$, $\mathcal{E}_m$ est un espace hermitien complexe de dimension m.

$A_j(x), V(x)$ sont des endomorphismes hermitiens de $\mathcal{E}_m$.

Le hamiltonien (1.6) provient de la théorie quantique des champs : $A(x) = (A_1(x), \cdots, A_n(x))$ est un potentiel de Yang-Mills, $\mathcal{E}_m$ est l'algèbre de Lie du groupe de jauge. Dans la classe des opérateurs du type $\tilde{L}(g,A,V)$ on trouve également des laplaciens de de Rham (opérant sur les formes) et les laplaciens spinoriels (carré d'un opérateur de Dirac). $\tilde{L}(g,A,V)$ agit naturellement dans l'espace de Hilbert : $L^2(\mathbf{R}^n, \sqrt{G}dx) \otimes \mathcal{E}_m$ et on cherche à le comparer à $L_0 = -\Delta$ agissant dans $L^2(\mathbf{R}^n, dx) \otimes \mathcal{E}_m$. On transporte $\tilde{L}(g,A,V)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n, dx) \otimes \mathcal{E}_m$ par l'isométrie : $\varphi \mapsto G^{1/4}\varphi$ de $L^2(\mathbf{R}^n, \sqrt{G}dx)$ sur $L^2(\mathbf{R}^n, dx)$. On est ainsi ramené à comparer avec L_0, l'opérateur :

$$L(g,A,V) = -G^{-1/4} \sum_{j,k=1}^{n} (\partial_j + iA_j) G^{1/2} g^{jk} (\partial_k + iA_k) G^{-1/4} + V$$

agissant dans $L^2(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{E}_m$.

Dans [Co-Kr-Sc] les auteurs ont développé une théorie de la diffusion à courte portée pour $L(g,A,V)$. En particulier sous l'hypothèse suivante :
(H_ρ) $\forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \exists C_\alpha > 0$, tel que :

$$|\partial_x^\alpha (g(x) - \mathbf{1}| + |\partial_x^\alpha A(x)| + |\partial_x^\alpha V(x)| \le C_\alpha \langle x \rangle^{-\rho - |\alpha|} (\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}^n$$

Pour $\rho > 1$, on a :

(a) existence et complétude des opérateurs d'onde.

(b) le spectre essentiel de $L(g,A,V)$ coïncide avec $[0, +\infty[$.

(c) le spectre singulièrement continu de L est vide.

(d) $L(g,A,V)$ n'a pas de valeur propre strictement positive.

Remarques (1.1) :

(i) Les propriétés b), c), d) sont valides dès que $\rho > 0$

(ii) Sous l'hypothèse (H_ρ) les propriétés a), b), c) ci-dessus peuvent se démontrer facilement par la méthode de Enss-Mourre (cf. [Je-Mo-Pe]).

(iii) L'estimation $(H_\rho), \rho > 0$, sur g, pour $|\alpha| \leq 2$, s'interprète en disant que $(\mathbf{R}^n, g)$ est une variété riemannienne asymptotiquement plate d'ordre ρ. Cette notion a joué un rôle important dans la solution du problème de Yamabe ([Le-Pa]) ; l'analyse sur ces variétés (espaces de Sobolev, laplaciens,...) a été étudiée par plusieurs auteurs pour des applications à la théorie de la relativité générale.

(iv) le même problème dans le cas d'une perturbation par un obstacle a été considéré dans de nombreux travaux, en particulier dans [Ma-Ra], [Pe-Po], [Je-Ka], [Ba-Gu-Ra].

Pour alléger l'écriture on pose dans la suite : $L = L(g, A, V)$.

2. Le résultat principal

Supposons vérifiée l'hypothèse (H_ρ) avec $\rho > n$. Alors pour tout entier $k > \frac{n}{2}$, $(L+i)^{-k} - (L_0+i)^{-k}$ est un opérateur de classe trace dans $L^2(\mathbf{R}^n) \otimes \mathcal{E}_m$. Cette condition assure l'existence de la phase de diffusion $\theta(\lambda)$ (et de la fonction spectrale de perturbation $s(\lambda)$). De plus on peut montrer que : $s \in C^\infty]0, +\infty[$. Comme dans [Ma-Ra] on introduit la condition de non-capture suivante pour le flot géodésique :

(N-C).— *On dit que la métrique Riemannienne g vérifie la condition de non capture si pour tout $R > 0$ il existe $T_R > 0$ tel que pour toute courbe géodésique $t \mapsto x(t)$ issue de $y, |y| < R$, on a : $|x(t)| > R$ pour tout $t, |t| \geq T_R$.*

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème (2.1).— *On suppose que le Hamiltonien $L = L(g, A, V)$ vérifie (H_ρ) avec $\rho > n$ et que la métrique g vérifie la condition (N-C). Alors la fonction spectrale de perturbation $s(\lambda)$, pour le système (L, L_0), admet l'asymptotique complète suivante :*

$$\frac{ds}{d\lambda} \sim \lambda^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j \in \mathbf{N}} \alpha_j . \lambda^{-j} \quad pour \quad \lambda \nearrow +\infty \tag{2.1}$$

De plus on peut dériver cette asymptotique à tout ordre par rapport à λ. Les α_j sont des constantes réelles dépendant de g, A, V. On a en particulier :

$$\alpha_0 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} . m. \int_{\mathbf{R}^n} (\sqrt{G}(x) - 1) dx$$

$$\alpha_1 = -\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{3\Gamma(\frac{n}{2})} tr(\int_{\mathbf{R}^n} (K(x) + 6V(x)) \sqrt{G}(x) dx)$$

où $K(x)$ désigne la courbure scalaire de g au point x.

Les invariants spectraux α_j de la formule (2.1) sont identiques à ceux intervenant dans la géométrie d'une variété riemannienne compacte (cf. [Gi]). En utilisant cette analogie, R. Schrader ([Sc]) a donné l'expression suivante de α_2 (où on a utilisé la convention de sommation) :

$$\alpha_2 = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{180\Gamma(\frac{n}{2}-1)} tr\{\int_{\mathbf{R}^n} (-12\partial^2_{k,k} R_{ijij} + 5R_{ijij}R_{k\ell k\ell}$$
$$-2R_{ijik}R_{\ell j\ell k} + 2R_{ijk\ell}R_{ijk\ell} + 60VR_{ijij} + 180V^2$$
$$-60\partial^2_{kk}V - 30F_{k\ell}F_{k\ell}).\sqrt{G}dx\}$$

où $\{R_{ijk\ell}\}$ est le tenseur de courbure de g, $F_{k,\ell}$ désigne le tenseur du champ de forces :

$$F_{k,\ell} = \partial_\ell A_k - \partial_k A_\ell + i[A_k, A_\ell]$$

Donnons maintenant un résultat qui fournit un moyen analytique (théorique !) pour calculer les coëfficients α_j : Pour tout $f \in C_0^\infty]0,+\infty[$ et $\beta > 0$ définissons :

$$\tau(f;\beta) = tr(f(\beta.L) - f(\beta.L))$$

En utilisant les méthodes standards du calcul fonctionnel sur les opérateurs pseudodifférentiels ([Da-Ro], [He-Ro]) on montre que $f(\beta.L)$ est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole admet une asymptotique en β pour $\beta \searrow 0$: (C'est en réalité un opérateur $\sqrt{\beta} = h-$ admissible au sens de [He-Ro]). On a alors :

$$f(\beta L) = Op^w_{\sqrt{\beta}}(a_f(\sqrt{\beta}))$$

où :

$$(Op^w_h b)u(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}\langle x-y.\xi\rangle} b(\frac{x+y}{2}, \xi)u(y)dyd\xi$$

et $a_f(h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j a_{f,j}$ en un sens convenable (cf. [He-Ro]) où les $a_{f,j}$ sont théoriquement calculables :

$$a_{f,j}(x,\xi) = \sum_{k=1}^{2j-1} d_{jk}(x,\xi)(-1)^k f^{(k)}(\langle g(x)\xi,\xi\rangle), \quad \text{pour} \quad j \geq 1$$

les d_{jk} étant des symboles indépendants de f, homogènes de degré $2k-j$ en ξ, expressions polynomiales du symbole de L et de ses dérivées, que l'on peut calculer, par exemple en construisant formellement une paramétrix pour $(L-z)^{-1}, z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et en regroupant les termes par degré d'homogénéité en (ξ, z) (cf. [Se]). On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème (2.2).— *On suppose seulement vérifiée l'hypothèse* (H_ρ) *avec* $\rho > n$. *On a alors, pour toute* $f \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$:

$$tr(f(\beta L) - f(\beta L_0)) \sim \beta^{-n/2} \sum_{j\geq 0} \gamma_{2j}(f)\beta^j, \beta \searrow 0$$

où :

$$\gamma_0(f) = (2\pi)^{-n} m \int_{\mathbf{R}^{2n}} (f(\langle g(x)\xi,\xi\rangle) - f(|\xi|^2))dxd\xi$$

et pour $j \geq 1$:

$$\gamma_j(f) = tr\left(\sum_{1\leq k\leq 2j-1}(-1)^k\int_{\mathbf{R}^{2n}} d_{jk}(x,\xi).f^{(k)}(\langle g(x)\xi,\xi\rangle)dxd\xi\right)$$

De plus sous les conditions du théorème (2.1) on a

$$(i) \qquad \gamma_{2j}(f) = \alpha_j \int f(u)u^{\frac{n}{2}-j-1}du \quad \textit{pour tout} \quad f \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$$

$$(ii) \qquad \alpha_j = \sum_{j\leq k\leq 4j-1}(\frac{n}{2}+k-j-1)(\frac{n}{2}+k-j-2)\cdots(\frac{n}{2}-j-1)\int_{\langle g(x)\xi,\xi\rangle=1} d_{jk}\omega$$

ω étant la forme différentielle quotient de Leray

$$\omega = dxd\xi/d\ell \quad \text{où} \quad \ell(x,\xi) = \langle g(x)\xi,\xi\rangle\ .$$

Remarques sur le théorème (2.1)

(i) Pour $g = \mathbf{1}$, $A = 0$, $V \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ on retrouve le résultat de [CdV] ($n = 1,3$) ; [Gu] n impaire ; G. Popov (n paire)

(ii) pour $A = V = 0$ et supp$(g - \mathbf{1})$ compact on retrouve le résultat de [Ma-Ra].

(iii) Dans [Co-Kr-Sc] on décrit une classe de transformations de jauge, voisines de l'identité à l'infini, tel que les opérateurs unitaires induits sur $L^2(\mathbf{R}^n)\otimes\mathcal{E}_m$ laissent l'opérateur de diffusion invariant. Ces transformations laissent donc la phase de diffusion invariante et en particulier les coëfficients α_j du développement de $\frac{ds}{d\lambda}$, ce qui peut se constater directement sur l'expression des premiers coëfficients.

(iv) Par analogie avec la célèbre interrogation de M. Kac concernant les domaines compacts "Peux-t'on entendre la forme d'un tambour", concernant les domaines non compacts on peut poser avec R. Schrader [Sc] la question : "Peux-t'on mesurer, par des expériences de diffusion, la déformation d'un espace asymptotiquement plat ?" Les théorèmes (2.1) et (2.2) peuvent être regardés comme des contributions à cette question.

(v) Dans [Ro-Ta] on a étudié un problème voisin concernant la phase de diffusion à énergie $\lambda > 0$ fixée lorsque $h \searrow 0$, pour $-h^2\Delta + V$ considéré comme perturbation de $-h^2\Delta$ (en faisant une hypothèse de non capture).

Remarque sur le théorème (2.2). Il n'est peut être pas complètement évident que, pour $A \not\equiv 0$, le développement de $\beta^{n/2}tr(f(\beta L) - f(\beta L_0))$ soit en puissances entières de β (et non demi-entières). Si L était un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 2 cette propriété serait fausse en général. Mais dans le cas considéré L est différentiel ; en particulier les symboles d_{jk} intervenant dans l'expression de $\gamma_j(f)$ sont polynomiaux, homogènes en ξ et ont la parité de j. Par conséquent on a $\gamma_{2j+1}(f) = 0$ pour tout $j \in \mathbf{N}$.

Cela explique également que le potentiel de Yang-Mills A n'introduise pas de puissances demi-entières de λ^{-1} dans l'asymptotique de $\lambda^{-\frac{n}{2}}\frac{ds}{d\lambda}$. Cette remarque n'est sans doute pas nouvelle.

Exemples et contre-exemples (2.3).

(i) On peut discuter la condition de non capture sur la métrique radiale :

$$g(x) = \{a(|x|^2)^{-2}\delta_{jk}\}_{1\leq j,k\leq n}$$

où $a \in C^\infty([0,+\infty[)$ vérifie : $|\frac{d^k}{dr^k}(a(r)-1)| \leq c_k(1+r)^{-\rho/2-k}$ pour $r \in [0,+\infty[$. On a ici :

$$L(g,0,0) = -\sqrt{\varphi}\mathrm{div}(\varphi\mathrm{grad})\sqrt{\varphi} \quad \text{où} \quad \varphi(x) = a(|x|^2)$$

J. Ralston [Ra] a remarqué que si pour $r_0 > 0$ on a : $r_0\frac{da}{dr}(r_0) = a(r_0)$ alors la sphère euclidienne r_0S^{n-1} est invariante par le flot géodésique de g. D'autre part si on a : $\frac{d}{dr}(\frac{a(r)}{r}) < 0$ pour tout $r > 0$ (par exemple a décroissante ou encore :

$$a(r) = 1 + \alpha(1+r)^{-\rho/2} \quad \text{avec} \quad \alpha > \frac{1}{2})$$

alors la métrique g n'a pas de trajectoires captées.

(ii) Comme autre exemple de métrique asymptotiquement plate on peut considérer une hypersurface Σ de $\mathbf{R}^{n+1}$ définie globalement par l'équation : $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. On pose $x = (x_1, \cdots, x_n)$. La métrique induite sur Σ par la structure euclidienne de $\mathbf{R}^{n+1}$ est définie naturellement par :

$$g_{k,j} = \delta_{k,j} + \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_j} .$$

La condition (H_ρ) sera vérifiée si pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ on a :

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{\frac{1-|\alpha|-\rho}{2}}$$

(par exemple si $f(x) = \langle x\rangle^\theta$ on a (H_ρ) avec $\rho > n$ à condition que $\theta < 1 - \frac{n}{2}$)

3 Les principales étapes de la démonstration

Les démonstrations détaillées paraîtront dans [Ro]. Faisons la remarque préliminaire suivante : compte-tenu du théorème (2.2), il suffit de démontrer que $\frac{ds}{d\lambda}$ a un développement asymptotique en puissances décroissantes de λ. Il est inutile de chercher à calculer les exposants ou les coëfficients de ce développement dans la preuve du théorème (2.1). C'est un autre problème, traité à part. (cf. le théorème (2.2)).

Bien que cela ne soit pas logiquement indispensable nous commençons par présenter le cas d'une perturbation par un seul potentiel scalaire ($g = \mathbf{1}; A = 0$), cas notablement plus simple.

(3-V) **le cas :** $L = -\Delta + V$ **;** V **vérifiant** $(H_\rho), \rho > n$

(V_1) On écrit une formule reliant $\frac{ds}{d\lambda}$ à la densité spectrale locale $\frac{\partial e_L}{\partial \lambda}(\lambda; x, x)$:

$$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\int_{\mathbf{R}^n}(2V + x\nabla V)(x)\frac{\partial e_L}{\partial \lambda}(\lambda; x, x)dx, \lambda > 0 \tag{3.1}$$

$e_L(\lambda, x, y)$ étant le noyau du projecteur spectral de L sur $]-\infty, \lambda]$ noté : $E_L(\lambda)$ (il suffit de savoir que (3.1) a lieu dans $\mathcal{D}'(]0, +\infty[)$).

(V_2) On fait intervenir le groupe unitaire e^{itL} ; puis on tronque en énergie et en temps :
On a formellement :

$$\frac{\partial E_L}{\partial \lambda} = \frac{1}{2i\pi}((L - \lambda - io)^{-1} - (L - \lambda + io)^{-1}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(L-\lambda)}dt$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(]-1, 1[), \chi \equiv 1$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a :

$$\frac{\partial E_L}{\partial \lambda} = \chi(\frac{L-\lambda}{\lambda^\theta})\frac{\partial E_L}{\partial \lambda} \quad (0 < \theta < 1)$$

Soit $\zeta \in C_0^\infty(]-2T, 2T[)$, $\zeta \equiv 1$ sur $[-T, T]$($T > 0$ fixé).

On introduit alors :

$$\tau_\zeta(\lambda) = \frac{1}{4\pi\lambda}tr((2V + x\nabla V)\chi(\frac{L-\lambda}{\lambda^\theta})\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta(t)e^{it(L-\lambda)}dt) \tag{3.2}$$

τ_ζ étant considérée comme une approximation de $\frac{ds}{d\lambda}$.

(V_3) **Asymptotique de** $\tau_\zeta(\lambda)$:
Il est commode de remarquer que $\Omega(t) = e^{itL}e^{-itL_0}$ est un opérateur pseudodifférentiel de classe $S_{(0,0)}(1)$, dépendant de manière C^∞ en t pour $|t| \leq T$ (i.e. le symbole $\omega(t, x, \xi)$ de $\Omega(t)$ est uniformément borné ainsi que toutes ses dérivées en $(t, x, \xi) \in]-T, T[\times\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$). D'autre part, pour $\frac{2}{3} < \theta < 1, \chi(\frac{L-\lambda}{\lambda^\theta})$ est un opérateur pseudodifférentiel ayant une bonne asymptotique en $\lambda, \lambda \nearrow +\infty$ (cf. [Da-Ro]). Par conséquent remplaçant dans (3.2) e^{itL} par $\Omega(t)e^{itL_0}$, on démontre par la méthode de la phase stationnaire :

Proposition (3.1).—

$$\tau_\zeta(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda^{-j}, \lambda \nearrow +\infty$$

(V_4) **Estimation de la résolvante et inégalités de propagation**

Lemme (3.2).— *([Is-Ki], [Je])*

(i) Pour tout entier $k \geq 1$, pour tout réel $s > k - \frac{1}{2}$ on a :

$$\|\langle x\rangle^{-s}(L - \lambda \pm io)^{-k}\langle x\rangle^{-s}\| = 0(\lambda^{-k/2}), \lambda \nearrow +\infty$$

(ii) Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ et pour tout $s > k - \frac{1}{2}$ on a :

$$\|\langle x\rangle^{-s}\varphi(\frac{L}{\lambda})e^{itL}\langle x\rangle^{-s}\| = 0(\lambda(1 + |t|\sqrt{\lambda})^{-k})$$

Remarque (3.3) : Si $V \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ il résulte facilement du Lemme (3.2), (ii) et de (3.2) que l'on a obtenu l'asymptotique complète de $\frac{ds}{d\lambda}$ (notons que cette démonstration ne coûte pas très cher). De la même manière si $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ on obtient que :

$$r_\zeta(\lambda) =: tr(\eta^2(2V + x\nabla V)\chi(\frac{L-\lambda}{\lambda^\theta}) \int (1 - \zeta(t))e^{it(L-\lambda)}dt)$$

$$= 0(\lambda^{-\infty}), \lambda \nearrow +\infty \ .$$

(V_5) **Contribution de l'infini en temps et en espace**

On suit dans cette étape une idée due à Isozaki-Kitoda ([Is-Ki]) consistant à construire une paramétrix microlocale pour e^{-itL} à l'aide d'un opérateur B indépendant du temps de sorte que $e^{-itL}B - Be^{-itL_0}$ sont négligeable. Le potentiel V étant à courte portée on peut réaliser B sous forme d'un opérateur pseudodifférentiel. Plus précisément pour $\sigma \in]-1, 0[$ définissons :

$$\Sigma_\pm^{(\sigma)} = \{(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}; \pm x\xi \geq -\sigma|x||\xi|, |x| \geq R_0, |\xi| \geq R_0\}$$

(+) correspond à une zône sortante, (−) à une zône entrante. On construit alors des approximations elliptiques B_N de B sous la forme : $B_N = Op(b_N)$ où :

$$b_N = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_N \quad \text{sur} \quad \Sigma_+^{(\sigma)} \cup \Sigma_-^{(\sigma)}$$

β_j étant d'ordre $(\langle x\rangle\langle\xi\rangle)^{-j}$ et le symbole de $L.B_N - B_N L_0$ d'ordre

$$(\langle x\rangle\langle\xi\rangle)^{-N} \quad \text{sur} \quad \Sigma_+^{(\sigma)} \cup \Sigma_-^{(\sigma)} \ .$$

Désignons alors par $\omega_\pm(x, \xi)$ des symboles d'ordre 0 supportés dans $\Sigma_\pm^{(\sigma_1)}$ et $\omega_\pm \equiv 1$ sur $\Sigma_\pm^{(\sigma_2)}$ où $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$. En jouant avec l'ellipticité de B_N sur $\Sigma_\pm^\sigma$ on peut déterminer des symboles $C_M^{(\pm)}, q_M^{(\pm)}$, pour tout entier M où : $C_M^{(\pm)} \in S_{1,1}(1), q_M^{(\pm)} \in S_{1,1}(\langle x\rangle\langle\xi\rangle)^{-M-1}$ et

$$\omega_\pm(x,D) = B_N C_M^{(\pm)}(x,D) + q_M^{(\pm)}(x,D)$$

On a posé :

$$S_{1,1}(p) = \{s \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n) : |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta s| \leq C_{\alpha\beta} p \langle x\rangle^{-|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}\}$$

Pour traiter l'étape (V_5) on a à considérer des expressions du type :

$$R_{u,v}(\lambda,t) = tr(u(\lambda,x,D)e^{it(L-\lambda)}v(\lambda,x,D))$$

pour $|t| \geq T$, u, v étant des symboles essentiellement localisés dans $\{(x,\xi) : |\frac{|\xi|^2}{2} - \lambda| \leq \lambda^\theta\}$ et par rapport à la variable x vérifiant : $u = 0(\langle x\rangle^{-\rho})(\rho > n), v = 0(1)$.

Pour $t > T$, considérons :

$$R_{u,v}^{(-)}(t,\lambda) = R_{u,\omega_-.v}(t,\lambda)$$

Utilisons les résultats précédents ; on a :

$$\begin{aligned} e^{itL}\omega_-(x,D) &= e^{itL}(B_M C_M^{(-)}(x,D) + q_M^{(-)}(x,D)) \\ &= B_M e^{itL_0}\tilde{C}_M + \quad \text{reste} \end{aligned}$$

Reportons cette information dans $R_{u,\omega_- v}$, on obtient alors par un argument de phase non stationnaire que : $R_{u,v}^{(-)}(t,\lambda) = 0(t.\lambda^{-\infty})$ pour $t \geq T$. De la même manière on a :

$$R_{u,v}^{(+)}(t,\lambda) = 0(t.\lambda^{-\infty}) \quad \text{pour} \quad t \leq -T$$

En utilisant le caractère hermitien et cyclique de la trace on en déduit :

$$R_{u,v}(t,\lambda) = 0(t.\lambda^{-\infty}) \quad \text{pour} \quad |t| \geq T\ .$$

(V_6) **Argument taubérien :** Pour M entier arbitraire, posons :

$$\tau_{\zeta,M}(\lambda) = \frac{1}{4\pi\lambda} tr((2V + x\nabla V)\chi(\frac{L-\lambda}{\lambda^\theta}) \cdot \int \zeta(\frac{t}{\lambda^M})e^{it(L-\lambda)}dt)$$

Il résulte que ce qui précède (en particulier de (V_3) et (V_5)) que l'on a obtenu :

$$\tau_{\zeta,M}(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{2}-1}\sum_{j\geq 1}\alpha_j\lambda^{-j}, \lambda \nearrow +\infty$$

Or on a :

$$\tau_\zeta(\lambda) = 2\int \mu\frac{ds}{d\mu}(\mu)\hat{\zeta}(\mu-\lambda)d\mu$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} 2\lambda(\frac{ds}{d\lambda}(\lambda) - \tau_{\zeta,M}(\lambda)) &= \lambda^M \int (\sigma(\lambda+\mu) - \sigma(\lambda)\hat{\zeta}(\lambda^M\mu)d\mu \\ &= 0(\lambda^{-\infty}) \end{aligned}$$

où $\sigma(\mu) = \mu\frac{ds}{d\mu}(\mu)$, en utilisant le résultat suivant :

Lemme (3.4).— *Il existe* $n_0 \geq 0$ *tel que* $\frac{d}{d\lambda}\sigma(\lambda) = 0(\lambda^{n_0}), \lambda \nearrow +\infty$

Le lemme (3.4) se démontre par un argument de dilatation, en exprimant $S(\lambda)$ en fonction de la résolvante par la formule de Kato-Kuroda [Ku].

Remarques (3.5) :

i) La formule (3.1) avait déjà été remarquée par A. Jensen ([Je]$_1$). Cette formule est très commode et simplifie notablement les démonstrations (cf. aussi [Ro-Ta]). A. Jensen m'a dit récemment qu'il pouvait obtenir une démonstration plus simple du théorème (2.1) dans le cas où $n = 3$ pour $-\Delta + V$, à partir de la formule (3.1), en utilisant un développement en série de perturbations.

ii) La méthode exposée dans (3-V) devrait s'adapter pour traiter le système ($L_0 = -\Delta + V_0, L = L_0 + V$) où V_0 vérifie (H_ρ) avec $\rho = \varepsilon_0 > 0$ (peut être à longue portée) et V vérifiant (H_ρ) avec $\rho > n$. On ne dispose plus alors de la formule (3.1) qu'il faut remplacer (formellement) par : $\frac{ds}{d\lambda} = tr(\frac{\partial E_L}{\partial \lambda} - \frac{\partial E_{L_0}}{\partial \lambda})$.

La preuve du théorème (2.1) dans le cas général suit la même démarche mais les détails techniques sont sensiblement différents. Les difficultés du cas général étant concentrées sur la perturbation de la métrique, g, nous allons maintenant présenter le cas où $A = V = 0$, la métrique g vérifiant (H_ρ) avec $\rho > n$ ainsi que la condition de non capture (N-C). Notons que l'introduction du champ de Yang-Mills A ne cause pas de difficultés supplémentaires car il ne joue que sur les termes d'ordre inférieur et le système considéré a un symbole principal (au sens de la théorie des O.P.D. classiques) qui reste scalaire.

Nous donnons maintenant les principales étapes de la preuve du théorème (2.1) pour $L = L(g,0,0) = -\Delta_g$.

(g-0) Réduction à l'ordre 1

(Cette idée vient de L. Hörmander [Hö]) Par le calcul fonctionnel sur les O.P.D. on peut remplacer la paire (L_0, L) par (P_0, P) où $P = \sqrt{1 - \Delta g}, P_0 = \sqrt{1 - \Delta}$. Si on désigne par σ la phase de diffusion de (P_0, P) on a alors :

$$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda}} . \frac{d\sigma}{d\mu}(\sqrt{1+\lambda})$$

D'autre part P et P_0 sont des O.P.D. elliptiques d'ordre 1 à symboles classiques. En particulier le symbole principal p_1 de P est donné par :

$$p_1(x, \xi) = \sqrt{\langle g(x)\xi, \xi \rangle + 1} \; .$$

(g-1) Expression de $\frac{d\sigma}{d\lambda}$ en fonction de la densité spectrale locale :

On établit la formule suivante :

$$\frac{d\sigma}{d\lambda}(\lambda) = f_0(\lambda) tr(W(x,D)\frac{\partial E_p}{\partial \lambda}) \quad (\text{dans} \quad \mathcal{D}'(]1,+\infty[))$$

où $f_0(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2-1}$ et W est un O.P.D. classique d'ordre 1, de poids : $\langle\xi\rangle\langle x\rangle^{-\rho}$.

Ainsi, comme précédemment, on est ramené à l'étude de :

$$\tau(\lambda) = tr(W(x,D)\chi(\frac{P-\lambda}{\lambda^\theta})\frac{\partial E_p}{\partial \lambda})$$

(g-2) Troncature en temps :

En introduisant le groupe unitaire e^{itP} on approche $\tau(\lambda)$ par :

$$\tau_\zeta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} tr\left(W(x,D)\chi(\frac{P-\lambda}{\lambda^\theta})\int \zeta(t)e^{it(P-\lambda)}dt\right) \tag{3.3}$$

Maintenant en jouant sur le caractère classique du symbole de P et sur **l'ordre 1** on transforme l'étude de (3.3) en un problème semi-classique en posant : $\lambda = \frac{1}{h}$, h étant alors un petit paramètre.

Soit $\tilde{\tau}_\zeta(h) = \tau_\zeta(\frac{1}{h})$. On a :

$$\tilde{\tau}_\zeta(h) = \frac{1}{2\pi} tr\left(W(h).\chi(\frac{P(h)-1}{h^{1-\theta}})\int \zeta(t)e^{\frac{it}{h}(P(h)-1)}dt\right) \tag{3.4}$$

où $W(h)$ et $P(h)$ sont des opérateurs pseudodifférentiels h-admissibles, c'est à dire qu'ils admettent des h-symboles respectifs $w(h), p(h)$ ayant une asymptotique en h :

$$w(h) \sim h^{-1}\sum_{j\geq 1} h^j w_j, \quad p(h) \sim h^{-1}\sum_{j\geq 1} h^j p_j$$

et

$$W(h) = op_h^w(w(h)) \ ; \ P(h) = op_h^w(p(h))$$

Les hypothèses permettent d'appliquer la méthode BKW ([He-Ro], [Ro-Ta]) et d'obtenir l'asymptotique de $\tilde{\tau}_\zeta$ en h et donc de $\tau_\zeta(\lambda)$ en λ (car 1 n'est pas valeur critique de p_1 et le flot géodésique n'a pas de trajectoire périodique).

(g-3) Estimation de la résolvante et inégalité de propagation :

La condition de non capture permet comme dans [Ge-Ma] de construire une fonction fuite globale pour le symbole p_1. La méthode de Mourre [Je-Pe-Mo] permet d'en déduire les estimations suivantes :

(3.5) Pour tout entier k et tout réel $s > k - \frac{1}{2}$, on a :

$$(i) \qquad \|\langle x\rangle^{-s}(P(h) - 1 \pm io)^{-k}\langle x\rangle^{-s}\| = 0(h^{-k})$$

(ii) Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ on a :

$$\|\langle x\rangle^{-s}\chi(P)e^{-\frac{it}{h}P(h)}\langle x\rangle^{-s}\| = 0(\langle t\rangle^{-k})$$

uniformément par rapport à $h, h \in]0, 1[$

(g-4) Contrôle pour des temps grands

Comme dans le cas (V), il s'agit d'obtenir une estimation du type : pour tous entier M, N on a :

$$(3.6) \qquad tr\left(W(x, hDx)\chi(\frac{P(h) - 1}{h^{1-\theta}})e^{\frac{it}{h}(P(h)-1)}\right) = 0(h^N)$$

uniformément pour $T < |t| < h^{-M}$. Comme dans (V-5) l'idée est de construire microlocalement une paramétrix pour $e^{\frac{it}{h}P(h)}$ en résolvant :

$$(3.7) \qquad B(h)P_0(h) = P(h)B(h) + 0(\langle x\rangle^{-\infty}h^{+\infty})$$

La différence avec (V-5) est que l'on ne peut plus réaliser $B(h)$ comme un opérateur pseudodifférentiel admissible elliptique dans des zônes entrantes ou sortantes. On cherche alors $B(h)$ comme un opérateur intégral de Fourier :

$$(3.8) \qquad (B(h)f)(x) = (2\pi h)^{-n}\int e^{\frac{i}{h}(\varphi(x,\xi)-y\xi)}\left(\sum_{j=0}^{\infty} h^j b_j(x, \xi)\right) f(y)dyd\xi$$

Là encore on utilise les idées de [Is-Ki] (que nous avions déjà adaptées au cas semi-classique dans [Ro-Ta]).

On est ainsi amené à résoudre une équation eikonale :

$$(3.9) \qquad \langle g(x)\partial_x\varphi_\pm, \partial_x\varphi_\pm\rangle = |\xi|^2$$

avec la condition :

(3.10) Pour tout multiindice α et pour $\xi \in S^{n-1}$ on a :

$$\partial_x^\alpha(\varphi_\pm(x, \xi) - \langle x, \xi\rangle) = 0(\langle x\rangle^{1-\rho-|\alpha|})$$

dans $\Sigma_\sigma^{(\pm)}$, $\varphi_\pm$ étant homogène de degré 1 en ξ ; et des équations de transports que nous n'écrirons pas ici. La principale difficulté de cette étape est de résoudre (3.9), (3.10), ce que l'on peut faire grâce à la condition de non capture (et à la condition $\rho > 1$).

On procède ensuite de manière analogue à l'étape $(V-5)$.

(g-5) Argument taubérien :

On regroupe les informations précédentes, retraduites en énergie λ, et on termine comme dans (V-6).

Remarques (3.6) :

(i) La preuve de l'étape $(g-2)$ conduit, à priori, à un développement de $\lambda^{-n/2}.\frac{ds}{d\lambda}$ en puissance demi-entières de λ mais les coëfficients d'ordre impaire s'annulent par le théorème (2.2).

(ii) Il n'est pas difficile, en utilisant les mêmes techniques, d'obtenir l'asymptotique de $\frac{d^k}{d\lambda^k}s(\lambda)$ pour $k \geq 1$ entier quelconque.

Bibliographie

[Ba-Gu-Ra] C. Bardos, J.C. Guillot, J. Ralston, La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Comm. in PDE 7 (1982) 905-958.

[Bi-Kr] M.S. Birman, M.G. Krein, Dok Akad. Nauk SSSR (1962) 475-478.

[Bu] V.S. Buslaev, Soviet Mat Dokl 12 (1971) 591-595.

[CdV] Y. Colin de Verdière, Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbf{R}^3$. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4 t 14 (1981) 27-39.

[Co-Kr-Sc] P. Cotta, Ramusino, W. Krüger, R. Schrader, Quantum scattering by External Metrics and Yang-Mills Potentials, Ann. Inst. Poincaré, Section Physique Théorique Vol. XXXI n°1 (1979) 43-71.

[Da-Ro] M. Dauge, D. Robert, Weyl's formula for a class of pseudodifferential operators with negative order on $L^2(\mathbf{R}^n)$ Lecture Note Springer n°1256 (1986).

[Ge-Ma] C. Gérard, A. Martinez, Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée. C.R.A.S. Paris Ser.I, 306 (1988) 121-123.

[Gi] P.B. Gilkey, Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem. Wilmington : Publish or Perish 1984.

[Gu] L. Guillopé, 1) Thèse de 3ème cycle, Grenoble 1981, 2) Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbf{R}^n$, Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique Exposé n°5. (1984-85).

[He-Ro] B. Helffer, D. Robert, Calcul fonctionnel pour une classe d'opérateurs admissibles. J. of Funct. Anal. vol 53 n°3 (1983) 246-268.

[Ho] L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator. Acta. Math. 121 (1968) 193-218.

[Is-Ki] H. Isozaki, H. Kitada, Modified wave operators with time independant modifiers J. Fac Sc. Univ. Tokyo Sect. IA. 32 (1985) 77-104.

[Iv-Sh] V.Y. Ivrii, M.A. Shubin, On the asymptotic behavior for the spectral shift function. Dokl. Akad. Nauk SSSR 263 n°2 (1982) 332-334.

[Je-Ka] A. Jensen, T. Kato, Asymptotic behavior of the scattering phase for exterior domains. Comm. in P.D.E. 3 (1978) 1165-1195.

[Je] A. Jensen, 1) A stationary proof of Lavine's formula for time delay. Letters in Math Physics 7 (1983) 137-143. 2) High energy resolvent estimates for generalized many body Schrödinger operators. Pub. RIMS Kyoto 1989.

[Je-Mo-Pe] A. Jensen, E. Mourre, P. Perry, Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory. Ann. I.H.P. 41 A (1984) 207-225.

[Ki] H. Kitada, Fundamental solutions and eigenfunction expansions for Schrödinger operators I. Math Z 198 181-190 (1988).

[Ku] S.T. Kuroda, An introduction to scattering theory, Lecture Notes 51, Mat. Inst. Aahus Univ. 1978.

[Le-Pa] J.M. Lee, T.H. Parker, The Yamabe problem Bull. A.M.S. (1987), 37.

[Ma-Ra] A. Majda, J. Ralston, An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains. Duke Math. J. I 45 (1978) 183-196 ; II 45 (1978) 513-536 ; III 46 (1979) 725-731.

[Pe-Po] V. Petkov, G. Popov, Asymptotic behaviour of the scattering phase for non trapping obstacles. Ann. Inst. Fourier Grenoble 32 (1982) 111-149.

[Po] G. Popov, Asymptotic behaviour of the scattering phase for the Schrödinger operator. Publ. Acad. des Sciences de Sofia (1982).

[Po-Sc] G. Popov, M.A. Schubin, Asymptotic expansion of the spectral fonction for second order elliptic operators in $\mathbf{R}^n$. Funct. Anal. Appl. **17** (1983) 37-45.

[Ra] J.V. Ralston, Trapped rays in spherically symmetric media and poles of the scattering Matrix. CPAM vol. XXIV (1971) 571-582.

[Re-Si] M. Reed, B. Simon, Scattering theory Academic Press (1979).

[Ro-Ta] D. Robert, H. Tamura, Semi classical asymptotics for local spectral densities and time delay problems in scattering process. J. of Funct. Anal. vol. 80 n°1 (1988) 124-147.

[Ro] D. Robert, En préparation.

[Sc] R. Schrader, High energy behaviour for non relativistic scattering by stationary external metrics and Yang-Mills potentials. Z. Physik C. Particles and Fields 4, 1980, 27-36.

[Se] R. Seeley, Complex powers of elliptic operators Proc. Sympos. Pure Math. AMS 10 (1967), 288-307.