SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. SCHAPIRA

Cycles lagrangiens, fonctions constructibles et applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. nº 11, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A11_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CYCLES LAGRANGIENS, FONCTIONS CONSTRUCTIBLES ET APPLICATIONS.

P. SCHAPIRA

Exposé n°XI

21 Mars 1989

Introduction

Dans [G-R-S], Guibas, Ramschaw et Stolfi introduisent la convolution des circuits polygonaux orientés de $\mathbf{R}^2$ et montrent comment utiliser leurs techniques dans des problèmes de robotique.

On peut interpréter leur calcul et le généraliser en toute dimension en utilisant le langage des fonctions constructibles. On définit à cet effet au §2 un nouveau calcul que l'on pourrait légitimement baptiser "calcul d'Euler" sur ces fonctions, et à titre d'exemple, on résout au §3 des équations de convolution dans ce nouveau formalisme.

Bien que les fonctions constructibles semblent particulièrement maniables pour les applications, il est intéressant de noter qu'il existe un autre langage équivalent à celui des fonctions constructibles, celui des cycles Lagrangiens, que nous développons au §1 (l'équivalence est essentiellement due à Mac Pherson - cf. les "commentaires historiques 2.4").

Des résultats plus détaillés et des démonstrations complètes paraîtront dans [K-S 2] et [Sc].

1. Cycles Lagrangiens

Soit X une variété analytique réelle de dimension n, $\pi : T^*X \to X$ son fibré cotangent. On note or_X le faisceau d'orientation (à valeurs dans $\mathbf{Z}$) et $\omega_X \simeq or_X[n]$ le complexe dualisant sur X.

Soit $\mathcal{L}_X$ la famille des sous-ensembles fermés coniques (pour l'action de $\mathbf{R}^+$) sous-analytiques isotropes de T^*X. On définit sur T^*X le faisceau $\underline{L}_X$ des cycles Lagrangiens par :

$$\underline{L}_X = \lim_{\Lambda \in \mathcal{L}_X} H^0_\Lambda(\pi^{-1}\omega_X). \tag{1.1}$$

Si λ est une section de $\underline{L}_X$ définie sur un ouvert U de T^*X, son support est un ensemble conique sous-analytique isotrope de dimension pure n, fermé dans U.

Si Λ est une sous-variété (lisse) Lagrangienne, on a :

$$H^0_\Lambda(\underline{L}_X) \simeq or_\Lambda \otimes or_{T^*X/X} \tag{1.2}$$

où $or_{T^*X/X} = or_{T^*X} \otimes \pi^{-1} or_X$.

Exemple 1.1 : Soit $\Lambda = \Lambda_0 \sqcup Z \sqcup \Lambda_1$ avec Λ_0 et Λ_1 variété Lagrangiennes lisses, Z ensemble sous-analytique isotrope de dimension $\leq n-1$. Soit Z' la partie régulière de dimension $n-1$ de Z, et supposons que $\Lambda_i \sqcup Z'$ soit une variété à bord. Soit λ_i $(i = 1,2)$ une section de $or_{\Lambda_i} \otimes or_{T^*X/X}$. Alors il existe λ section $H^0_\Lambda(\pi^{-1}\omega_X)$ qui prolonge λ_1 et λ_2 si et seulement si les orientations définies sur Z' par λ_1 et λ_2 sont opposées (avec la même multiplicité).

On va définir un certain nombre d'opérations sur les cycles Lagrangiens.

Dualité : L'application antipodale sur T^*X, notée "a" définit pour $\Lambda \in \mathcal{L}_X$ un isomorphisme

$$(1.3) \qquad H^0_\Lambda(\pi^{-1}\omega_X) \simeq H^0_{\Lambda^a}(\pi^{-1}\omega_X)$$

où $\Lambda^a = a(\Lambda)$. On en déduit un isomorphisme $\pi_*\underline{L}_X \simeq \pi_*\underline{L}_X$. Si λ est une section de $\pi_*\underline{L}_X$ on note λ^a son image par cet isomorphisme et on dit que λ^a est le cycle dual de λ.

Produit externe : Soit Y une autre variété analytique réelle. Si $\Lambda_X \in \mathcal{L}_X$, $\Lambda_Y \in \mathcal{L}_Y$, on a un morphisme naturel :

$$(1.4) \qquad H^0_{\Lambda_X}(\pi^{-1}\omega_X) \boxtimes H^0_{\Lambda_Y}(\pi^{-1}\omega_Y) \to H^0_{\Lambda_X \times \Lambda_Y}(\pi^{-1}\omega_{X\times Y}).$$

On en déduit le morphisme :

$$\underline{L}_X \boxtimes \underline{L}_Y \to \underline{L}_{X\times Y}.$$

Si λ et μ sont des cycles Lagrangiens sur X et Y respectivement on note $\lambda \boxtimes \mu$ le cycle correspondant sur $X \times Y$.

Image directe : Soit $f : Y \to X$ un morphisme de variétés analytiques réelles.
L'application tangente Tf se décompose en :

$$Tf : TY \underset{f'}{\to} Y \underset{X}{\times} TX \underset{f_\tau}{\to} TX.$$

On en déduit les applications :

$$T^*Y \underset{{}^tf'}{\leftarrow} Y \underset{X}{\times} T^*X \underset{f_\pi}{\to} T^*X.$$

Soit $\Lambda_Y \in \mathcal{L}_Y$ et supposons f propre sur $\pi(\Lambda_Y)$.
On a alors un morphisme naturel :

$$(1.5) \qquad H^0_{\Lambda_Y}(T^*Y\,;\pi^{-1}\omega_Y) \to H^0_{f_\pi\,{}^tf'^{-1}(\Lambda_Y)}(T^*X;\pi^{-1}\omega_X).$$

Si λ est un cycle Lagrangien sur Y et si f est propre sur $\pi(\mathrm{supp}(\lambda))$, on note $f_*\lambda$ le cycle Lagrangien sur X défini par (1.5).

Image inverse : Soit $f : Y \to X$ comme ci-dessus, et soit $\Lambda_X \in \mathcal{L}_X$. Supposons ${}^tf'$ propre sur $f_\pi^{-1}(\Lambda_X)$. On a alors un morphisme naturel :

$$(1.6) \qquad H^0_{\Lambda_X}(T^*X\,;\pi^{-1}\omega_X) \to H^0_{{}^tf' f_\pi^{-1}(\Lambda_X)}(T^*Y\,;\pi^{-1}\omega_Y).$$

Si λ est un cycle Lagrangien sur X et si ${}^tf'$ est propre sur $f_\pi^{-1}(\mathrm{supp}(\lambda))$, on note $f^*\lambda$ le cycle Lagrangien sur Y défini par (1.6).

Exemples 1.2 :

(i) Notons a_X l'application $X \to \{\mathrm{pt}\}$. On pose :

$$[T_X^* X] = a_X^*[1]\,,$$

où $[1]$ est l'image de $1 \in \mathbf{Z}$ dans l'isomorphisme $\underline{L}_{\{\mathrm{pt}\}} \simeq \mathbf{Z}$.

(ii) Soit $f : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermée. On pose :

$$[T_Y^* X] = f_*[T_Y^* Y]\,.$$

(iii) Soit Z une sous-variété fermée de X et $f : Y \to X$ un morphisme transverse à Z. Alors :

$$f^*[T_Z^* X] = [T_{f^{-1}(Z)}^* Y]\,.$$

(iv) Soit Z une sous-variété fermée de X de dimension d. On a :

$$[T_Z X]^a = (-1)^d [T_Z^* X]\,.$$

Intersection : Soit maintenant $\sigma : X \to T^*X$ une section continue de π. On a les isomorphismes :

$$H^0_{\sigma(X)}(T^*X\,;\,\pi^!\mathbf{Z}_X) \simeq H^0(X\,;\,\sigma^!\pi^!\mathbf{Z}_X) = H^0(X\,;\,\mathbf{Z}_X)\,.$$

On note $[\sigma]$ l'image de la section $1 \in H^0(X\,;\,\mathbf{Z}_X)$ dans $H^0_{\sigma(X)}(T^*X\,;\,\pi^!\mathbf{Z}_X)$.

(Remarquons que si l'on choisit une orientation sur T^*X, on obtient un isomorphisme $\pi^!\mathbf{Z}_X \simeq \pi^{-1}\omega_X$ et $[\sigma]$ est alors un cycle, mais le choix d'une telle orientation ne simplifie en rien les calculs).

Considérons la chaîne de morphismes :

$$\begin{aligned} H^0_{\sigma(X)}(T^*X\,;\,\pi^!\mathbf{Z}_X) \otimes H^0_\Lambda(T^*X\,;\,\pi^{-1}\omega_X) & \\ \to H^0_{\sigma(X)\cap\Lambda}(T^*X; \pi^!\mathbf{Z}_X \otimes \pi^{-1}\omega_X) & \\ \simeq H^0_{\sigma(X)\cap\Lambda}(T^*X; \pi^!\omega_X) & \\ \simeq H^0_{\sigma(X)\cap\Lambda}(T^*X; \omega_{T^*X}) & \end{aligned}$$

On appelle intersection de $[\sigma]$ et λ, et on note $[\sigma]\cap\lambda$, l'image de $[\sigma]\otimes\lambda$ par cette suite de morphismes.

Notons $\int_{T^*X}$ l'application naturelle de $H^0_c(T^*X;\omega_{T^*X})$ dans $\mathbf{Z}$. Si $\sigma(X)\cap\mathrm{supp}(\lambda)$ est compact, on pose :

$$\sharp([\sigma]\cap\lambda) = \int_{T^*X} [\sigma]\cap\lambda$$

et on appelle ce nombre, le nombre d'intersection de $[\sigma]$ et λ.

Si p est isolé dans $\sigma(X) \cap \operatorname{supp}(\lambda)$ on définit de manière évidente le nombre $\sharp([\sigma] \cap \lambda)_p$, (nombre d'intersection en p).

Exemple 1.3 : Soit Z une sous-variété de $X, x \in Z$ et soit $\varphi : X \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $d(\varphi\,|_Z) = 0$ et le Hessien de $\varphi\,|_Z$ est non dégénéré en x, avec s^- valeurs propres négatives. Alors :

$$\sharp([\sigma_\varphi] \cap [T^*_Z X])_{d\varphi(x)} = (-1)^{s^-}$$

où σ_φ désigne la section de T^*X définie par $d\varphi$.

Commentaires historiques 1.3 : Les cycles Lagrangiens ont été étudiés par Sabbah [Sa] dans le cas analytique complexe et par Kashiwara dans le cas réel [Ka]. La présentation que nous suivons ici est essentiellement celle de Kashiwara (loc. cit.) à ceci près, que le fait de ne pas identifier $\pi^!\mathbf{Z}_X$ et $\pi^{-1}\omega_X$ permet d'échapper à de délicates questions de signes. Ces constructions seront détaillées dans Kashiwara-Schapira [K-S 2].

2. Fonctions constructibles

Soit X une variété analytique réelle de dimension n. Une fonction constructible φ sur X est une application de X dans $\mathbf{Z}$ qui vérifie :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \text{quel que soit } m \in \mathbf{Z},\ \varphi^{-1}(m) \text{ est un ensemble sous-analytique de } X \\ \text{et la famille } \{\varphi^{-1}(m)\}_{m \in \mathbf{Z}} \text{ est localement finie.} \end{cases}$$

D'après le théorème de triangulation des ensembles sous-analytiques, il revient au même de dire :

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \text{Il existe un recouvrement localement fini } X = \bigcup\limits_\alpha X_a\ , \\ \text{où les } X_a \text{ sont des compacts sous-analytiques contractiles,} \\ \text{tel que } \varphi = \sum\limits_\alpha m_\alpha \mathbf{1}_{X_\alpha} \end{cases}$$

($m_\alpha \in \mathbf{Z}$ et $\mathbf{1}_{X_\alpha}$ désigne la fonction caractéristique de X_α).

Notons $CF(X)$ le groupe des fonctions constructibles, et $\underline{CF}_X$ le faisceau $U \mapsto CF(U)$.

Le faisceau $\underline{CF}_X$ est un faisceau d'anneaux pour l'addition et la multiplication usuelles des fonctions.

On définit le produit externe :

$$\underline{CF}_X \boxtimes \underline{CF}_Y \to \underline{CF}_{X \times Y}$$

par la formule évidente :

$$(2.3) \qquad (\varphi \boxtimes \psi)(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y)\,.$$

Si $f : Y \to X$ est morphisme de variétés analytiques réelles, on définit l'image inverse :

$$f^* : f^{-1}\underline{CF}_X \to \underline{CF}_Y$$

par la formule évidente :

$$(f^*\varphi)(y) = \varphi(f(y))\,. \tag{2.4}$$

L'image directe est plus subtile.
Commençons par le "cas absolu".

Soit $\varphi \in CF(X)$ et supposons φ à support compact. On peut écrire φ comme une somme finie :

$$\varphi = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{1}_{X_\alpha}$$

où les X_α sont des compacts contractiles. On pose :

$$\int_X \varphi = \sum_\alpha m_\alpha \tag{2.5}$$

après avoir vérifié que le terme de droite de (2.5) ne dépend que de φ.

Soit maintenant $f : Y \to X$ un morphisme de variété et supposons f propre sur le support de $\psi \in CF(Y)$.
On définit $f_*\psi$ "fibre à fibre" par la formule :

$$(f_*\psi)(x) = \int_Y \psi \cdot \mathbf{1}_{f^{-1}(x)}\,. \tag{2.6}$$

On démontre que $f_*\psi \in CF(X)$.

On a donc défini un morphisme :

$$f_* : f_!\underline{CF}_Y \to \underline{CF}_X\,.$$

On peut aussi définir une opération de dualité sur les fonctions constructibles de la manière suivante.

Soit $\varphi \in CF(X)$ et soit $x \in X$. Dans une carte locale au voisinage de x on note $B(x,\varepsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ε.
Alors $\int_X \varphi \cdot \mathbf{1}_{B(x,\varepsilon)}$ ne dépend ni de la carte locale ni de ε pour $0 < \varepsilon << 1$. On pose :

$$(D_X\varphi)(x) = \int_X \varphi \cdot \mathbf{1}_{B(x,\varepsilon)}\,. \tag{2.7}$$

Proposition 2.1.—
(i) $D_X\varphi$ *est une fonction constructible.*

(ii) *Le morphisme* $D_X : \underline{CF}_X \to \underline{CF}_X$ *satisfait à* $D_X \circ D_X = id$.

(iii) D_X *commute à l'image directe. Plus précisément si* $f : Y \to X$ *est un morphisme de variétés, et si* f *est propre sur le support de* $\psi \in CF(Y)$ *alors :*

$$D_X \int_f \psi = \int_f D_Y \psi .$$

Exemple 2.2 : Soit Z un sous-variété (localement fermée) de X de codimension d et supposons que l'immersion de Z dans X soit localement homéomorphe à l'immersion d'un ouvert convexe de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$. Alors :

$$D_X(\mathbf{1}_Z) = (-1)^d \mathbf{1}_{\overline{Z}} . \tag{2.8}$$

Supposons de plus $\overline{Z}$ compact et contractile. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_X \mathbf{1}_{\partial Z} &= \int_X \mathbf{1}_{\overline{Z}} - \int_X \mathbf{1}_Z \\ &= 1 - (-1)^d \end{aligned} . \tag{2.9}$$

On retrouve ainsi (quand Z est un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^3$) la formule d'Euler.

On va maintenant construire un isomorphisme d'Euler :

$$\mathrm{Eu} : H^0(T^*X\,;\underline{L}_X) \xrightarrow{\sim} CF(X) . \tag{2.10}$$

Soit λ un cycle Lagrangien sur T^*X et soit $x \in X$. Choisissons une fonction réelle φ de classe C^2 sur X avec $\varphi(x) = 0$, $d\varphi(x) = 0$ et le Hessien de φ en x est défini positif. Soit σ_φ la section de π définie par $d\varphi$. L'ensemble $\sigma_\varphi \cap \mathrm{supp}(\lambda)$ est discret. On pose :

$$\mathrm{Eu}(\lambda)(x) = \sharp([\sigma_\varphi] \cap \lambda)_x . \tag{2.11}$$

Théorème 2.3.—

(i) $\mathrm{Eu}(\lambda)(x)$ *ne dépend pas du choix de* φ.

(ii) *La fonction* $\mathrm{Eu}(\lambda)$ *est constructible.*

(iii) *Le morphisme* Eu *(cf. (2.10)) ainsi défini est un isomorphisme.*

(iv) *Le morphisme* Eu *commute aux opérations de : produit externe, image inverse, image directe, dualité.*

Commentaires 2.4 : Une démonstration complète de ce théorème figurera dans Kashiwara-Schapira [K-S 2]. Elle utilise un troisième groupe isomorphe à $H^0(T^*X;\underline{L}_X)$ et à $CF(X)$, à savoir le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux $\mathbf{R}$-constructibles sur X.

Commentaires historiques 2.5 : Dans le cadre analytique complexe (et à l'exception de ce qui concerne la dualité), remplaçant "cycle Lagrangien" par "cycle analytique complexe", le théorème 2.3 est dû à Mac Pherson [McP], le morphisme Eu désignant alors “l'obstruction d'Euler”.

La version Lagrangienne et le point de vue “intersection de cycles” est apparue beaucoup plus tard et semble avoir émergé simultanément chez différents auteurs (Dubson [Du], Ginzburg [Gi], Sabbah [Sa], pour le cas complexe, Kashiwara [Ka] pour le cas réel).

Le théorème 2.3 dans la formulation ci-dessus est dû à Kashiwara, à l'exception de la notion de “duale d'une fonction constructible” due à l'auteur [Sc]. Cette notion est la version “fonctions constructibles” de la dualité de Poincaré-Verdier des faisceaux (cf. [Ve]).

3. Applications

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. Notons $\mathcal{A}$ le groupe des fonctions constructibles à support compact sur V, i.e. :

$$\mathcal{A} = \Gamma_c(V\,;\,\underline{CF}_V)\,. \tag{3.1}$$

C'est une algèbre pour la multiplication, mais nous allons définir un autre produit sur $\mathcal{A}$, la “convolution”.

Notons s l'application $V \times V \to V$

$$s(x,y) = x + y\,. \tag{3.2}$$

Si φ et ψ appartiennent à $\mathcal{A}$, on pose

$$\varphi * \psi = s_*(\varphi \boxtimes \psi)\,. \tag{3.3}$$

Théorème 3.1.—

(i) le produit $*$ munit $\mathcal{A}$ d'une structure d'algèbre commutative unitaire, l'élément unité étant la fonction $\mathbf{1}_{\{0\}}$.

(ii) La convolution commute à la dualité :

$$D_V(\varphi * \psi) = D_V\,\varphi * D_V\,\psi$$

(iii) La convolution commute à l'image directe :

$$\int_V (\varphi * \psi) = (\int_V \varphi)\cdot(\int_V \psi)\,.$$

La démonstration est immédiate.

Exemples 3.2 :

(i) Soient A et B deux compacts convexes sous-analytiques. Alors :

$$\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A+B} \tag{3.4}$$

(ii) Soit A un compact convexe sous-analytique. Si A engendre un espace vectoriel de dimension d et si l'on note $\mathrm{Int}\,(A)$ l'intérieur de A dans cet espace, on a :

$$D_V\,\mathbf{1}_A = (-1)^d\,\mathbf{1}_{\mathrm{Int}(A)}\,. \tag{3.5}$$

Posons $A^a = -A$, et soit B un compact sous-analytique. Définissons la fonction constructible :

$$\varphi_{A,B} = (D_V\,\mathbf{1}_{A^a}) * \mathbf{1}_B\,. \tag{3.6}$$

Alors

$$\varphi_{A,B}(x) = (-1)^d\chi((x+\mathrm{Int}(A))\cap B)\,, \tag{3.7}$$

où χ désigne la caractéristique d'Euler-poincaré.

On obtient ainsi

$$\mathbf{1}_A * D_V\,\mathbf{1}_{A^a} = \mathbf{1}_{\{0\}}\,. \tag{3.8}$$

Les éléments du type $\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{\mathrm{Int}\,(B)}$, A et B convexes compacts sous-analytiques, sont donc inversibles dans l'algèbre de convolution $\mathcal{A}$.

Problème 3.2 : Existe-t-il d'autres éléments inversibles ?

Commentaires 3.3 :

(i) Un exemple "concret" d'application de la convolution est le suivant. Supposons que l'on épaississe un trait par un pinceau convexe. Comment retrouver le trait original, connaissant le pinceau et le trait épaissi ?

Notons T et P les compacts sous-analytiques de V représentant respectivement le trait et le pinceau. Si l'on considère le "trait épaissi"comme étant simplement $T+P$, le problème de retrouver T semble difficile quand T n'est pas convexe, mais si l'on considère le "trait épaissi avec multiplicités", représenté par la fonction $\mathbf{1}_T * \mathbf{1}_P$, alors le problème inverse a une solution immédiate d'après (3.8) : il suffit de convoler par $D_V(\mathbf{1}_{P^a})$.

(ii) Un autre exemple concret concerne le placement d'objets géométriques (par exemple de polygones), (cf. [A-B], [G-R-S], [Me]). Une question naturelle, et importante dans la pratique, semble-t-il, est de trouver tous les déplacements qui envoient un convexe compact (sous-analytique) A dans un fermé (sous-analytique) B. D'après (3.7) une condition *nécessaire* pour qu'une translation x envoie A dans B est que $\varphi_{A,B}(x) = 1$.

Cette condition n'est malheureusement pas suffisante, mais on peut la raffiner, par exemple en faisant n trous dans A. Si A_n désigne le convexe compact A privé de n boules (ouvertes, disjointes, contenues dans l'intérieur de A), une condition nécessaire pour que $x+A\subset B$ est que $\varphi_{A_n,B}(x) = 1-(-1)^d\,n$.

On pourrait sans doute traiter les rotations de manière analogue .

Commentaire historique 3.4 : Les résultats de cette section sont dus à l'auteur. Rappelons que leur intérêt principal est d'interpréter dans un langage particulièrement simple, et de généraliser à toute dimension l 'article de Guibas-Ramschaw-Stolfi [G-R-S] (cf. l'introduction).

Remerciements : à J-M. Kantor qui a attiré notre attention sur l'article [G-R-S], à l'origine de ce travail.

Bibliographie

[A-B] F. AVNAIM and J.D. BOISSONNAT : Polygon placement under translation and rotation. S.T.A.C.S. 1988, Bordeaux.

[Du] A. DUBSON : Formule pour l'indice des complexes constructibles et des Modules holonomes. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 298, I n° 6, (1984), 113-116.

[Gi] V.A. GINZBURG : A theorem on the index of differential systems and the geometry of manifolds with singularities. Soviet Math. Dokl. Vol.31 (1985) n° 2, 309-313.

[G-R-S] L. GUIBAS, L. RAMSCHAW and J. STOLFI : A kinetric framework for Computational Geometry. proc. I.E.E.E. Symp. on Foundations of Comput. Sci. (1983), 74-123.

[Ka] M. KASHIWARA : Index theorem for constructible sheaves. Astérisque 130, (1985), 193-209 et cours à l'E.N.S. (1985).

[K-S 1] M. KASHIWARA and P. SCHAPIRA : Microlocal study of sheaves. Astérisque 128 (1985).

[K-S 2] M. KASHIWARA and P. SCHAPIRA : Sheaves on manifolds. Springer. To appear.

[McP] R.D. Mac PHERSON : Chern classes for singular varieties. Ann. of Math. 100, (1974), 423-432.

[Me] M. MERLE : Le problème du déménageur. Ecole Polytechnique. Preprint 1987.

[Sa] C. SABBAH : Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux. Astérisque 130 (1985), 161-192.

[Sc] P. SCHAPIRA : Operations on constructible functions. Univ. Paris-Nord. Prepublic. Mars 88, et article soumis à "Comm. on Pure and Applied Algebra".

[Ve] J-L. VERDIER : Dualité dans les espaces localement compacts. Séminaire Bourbaki 300, (1965-66).

Pierre Schapira
Département de Mathématiques
Université Paris XIII
93430 Villetaneuse
France