J. M. Ghidaglia

Estimation de la dimension des attracteurs associés à des équations aux dérivées partielles non linéaires d'évolution sur R entier

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 9, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A9_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ESTIMATION DE LA DIMENSION DES ATTRACTEURS ASSOCIES A DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES D'EVOLUTION SUR $\mathbb{R}$ ENTIER.

J.M. GHIDAGLIA

Exposé n°IX **23 FEVRIER 1988**

I INTRODUCTION

On s'intéresse au comportement lorsque $t \to +\infty$ des solutions de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires, autonomes et dissipatives (dans un sens précisé plus bas) :

$$\frac{du}{dt} + \Gamma(u) = 0. \tag{1}$$

La fonction u prend ses valeurs dans un espace de Hilbert de dimension infinie E et Γ désigne un opérateur non linéaire, non borné sur E. On suppose que le problème de Cauchy associé à (1) est bien posé pour $t \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire que lorsque l'on adjoint à (1) une condition initiale $u(0) = u_0$ cette équation possède une unique solution (dans un sens convenable) globale $u \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, E)$ et l'application $S(t) : u_0 \longmapsto u(t)$ est continue sur E. S'agissant d'une équation autonome, la famille $\{S(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ forme alors un groupe. Donnons tout de suite les trois exemples que nous traitons ici :

Exemple 1 : Equation de Sine-Gordon. Il s'agit d'une équation du second ordre en temps sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$

$$v_{tt} + \alpha v_t - \Delta v + j \sin v = f, \tag{2}$$

à laquelle on adjoint des conditions aux limites

$$v(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

La fonction f est donnée dans $L^2(\Omega)$ et $\alpha > 0$ est le coefficient de frottement (et $j \in \mathbf{R}$). Ici

$$u = \{v, v_t\}, \quad E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

$$\Gamma\{v, w\} = \{-w, \alpha w - \Delta v + j(\sin v) - f\}$$

de domaine

$$D(\Gamma) = H^2(\Omega) \cap H_0'(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Exemple 2 : Equations de Schrödinger non-linéaire. Avec les notations qui précèdent et pour $\Omega =]0, L[$, on considère

$$i\, u_t + u_{xx} + g(|u|^2)u + i\alpha u = f, \tag{4}$$

$$u(x+L, t) = u(x,t), \tag{5}$$

où la fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifie les conditions

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{G_+(s)}{s^3} \leq 0, \exists \omega > 0 \lim\sup_{s\to+\infty} \frac{h(s) - \omega G(s)}{s^3} \leq 0 \tag{6}$$

et $G(s) = \int_0^s g(\sigma)d\sigma$, $h(s) = sg(s)$, $G_+(s) = \mathrm{Max}(G(s), 0)$, ce qui comprend le cas usuel $g(s) = s$.

Ici $E = \{u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \quad u(x+L) = u(x), \forall x \in \mathbf{R}\}$, $\Gamma(u) = -iu_{xx} - i\ g(|u|^2)u + \alpha u + if$.

Exemple 3 : Equation de Korteweg de Vries perturbée. Ici

(7) $$u_t + u_{3x} + uu_x + \alpha u = f,$$

où u vérifie là encore (5). On prend

$$E = \{H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}), u(x+L) = u(x), \forall x \in \mathbf{R}\},$$
$$\Gamma(u) = u_{3x} + uu_x + \alpha u - f. \quad \blacksquare$$

En raison du terme d'amortissement (le terme qui comporte α), dans tous ces exemples le groupe engendré possède un **borné absorbant** au sens de la

Définition : Un borné $\mathcal{B}_a$ de E est absorbant pour $\{S(t)\}$ si quel que soit $\mathcal{B}$ borné de E, il existe $T(\mathcal{B})$ tel que $S(t)B \subset \mathcal{B}_a$, $\forall t \geq T(B)$.

Nous dirons alors que l'équation (1) est dissipative si le groupe qui lui est associé possède un borné absorbant. Cette notion élémentaire, qui a été introduite par N. Levinson pour les équations différentielles dans le plan, s'est avérée bien utile dans de nombreux exemples. Cette propriété, qui est meilleure qu'une borne uniforme en u_0, i.e. $\|u_0\|_E \leq R$, sur la demi orbite $\{S(t)u_0, t \geq 0\}$, suggère de construire l'ensemble oméga limite de $\mathcal{B}_a$

(8) $$\omega(\mathcal{B}_a) = \bigcap_{s>0} \mathrm{adh}(\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{B}_a)$$

où $\mathrm{adh}(X)$ est l'adhérence de X dans E. Toutefois pour s'assurer de la non vacuité de cet ensemble, il est nécessaire de disposer d'une propriété de compacité des applications $S(t)$ pour t grand. Nous y revenons au paragraphe suivant.

Il sera en fait possible de construire un attracteur global pour $\{S(t)\}$ (ou (1)) dans les Exemples 1 à 3, c'est-à-dire un sous ensemble $\mathcal{A}$ de E vérifiant

(9) $\mathcal{A}$ est un compact, connexe non vide de E,

(10) $$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

(11) Quel que soit $\mathcal{B}$ borné de E, la distance de $S(t)\mathcal{B}$ à $\mathcal{A}$ tend vers zéro lorsque $t \to +\infty$.

On se convainc aisément qu'il existe au plus un tel ensemble. Celui-ci contient tout ensemble borné invariant par (1), par exemple les points fixes de (1), les solutions périodiques ainsi que les ensembles instables qui en sont issu ceux ci pouvant être topologiquement très complexes. Ceci expliquerait en partie l'évolution chaotique des solutions de certaines équations du type (1).

Le principal résultat que nous voulons décrire ici concerne alors la dimension de $\mathcal{A}$. Il s'agit en effet d'un des paramètres pertinants. Le fait que celle-ci soit finie (ce que nous détaillerons au paragraphe 3) montre que, passée une période transitoire, les solutions de (1) (dans les exemples 1 à 3), ne dépendent que d'un nombre fini de degrés de liberté dans le langage de la Physique ; alors que le problème se trouve posé dans un espace fonctionnel de dimension infinie.

II CONSTRUCTION DE L'ATTRACTEUR GLOBAL

Pour commencer ouvrons une parenthèse à propos des semi groupes compacts qui se rencontrent par exemple lorsque (1) est une équation parabolique (équation de la chaleur non linéaire, systèmes de réaction diffusion, équations de Navier-Stokes,...). Dans ce cas pour tout $t_0 > 0$, l'application $S(t_0)$ est compacte et alors $K_a = adh(S(1)B_a)$ est un compact absorbant ce qui rend la construction (8) possible et $\mathcal{A} = \omega(K_a) = \omega(\mathcal{B}_a)$ vérifie (9) à (11). Fin de la parenthèse.

Une telle situation est bien sûr exclue lorsque $S(t)$ est inversible, il faut travailler un peu plus pour définir $\mathcal{A}$ à l'aide de (8). L'Exemple 1 et les Exemples 2 et 3 relèvent de techniques différentes.

Proposition 1 ([6]).— *On désigne par $\{S(t)\}$ le groupe solution de (2)-(3) et par $\{\Sigma(t)\}$ le groupe linéaire de (2)-(3) lorsque $f = 0$, $j = 0$. Alors, $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,*

$$\lim_{t\to+\infty} |\Sigma(t)|_{\mathcal{L}(E)} = 0, \tag{12}$$

(13) quelque soit $\mathcal{B}$ borné dans E,$\bigcup_{t\geq 0}\{S(t) - \Sigma(t)\}B$ est borné dans $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Proposition 2 ([4,5]).— *Le groupe $\{S(t)\}$ associé à (4)-(5) (resp. (7)-(5)) est faiblement continu sur E i.e. l'application $(t, u_0) \mapsto S(t)u_0$ est partiellement continue de $\mathbf{R} \times E$ dans E lorsque E est muni de la topologie faible.*

Donnons brièvement une idée de la preuve de ces résultats, renvoyant à la bibliographie pour les détails. En fait la convergence (12) est exponentielle : il existe C et $\varepsilon > 0$ tels que

$$|\Sigma(t)\phi|_E \leq C|\phi|_E e^{-\varepsilon t}, \forall t \in \mathbf{R}. \tag{14}$$

L'expression $S(t) - \Sigma(t)$ apparaît alors de manière naturelle lorsque l'on écrit la solution de (2)-(3) à l'aide de la formule de Duhamel

$$S(t)\{v_0, v_1\} = \Sigma(t)\{v_0, v_1\} + \int_0^t \Sigma(t-s)\{0, f - j\sin v(s)\}ds. \tag{15}$$

Le point clé est alors que $\frac{d}{ds}\{0, f - j\sin v(s)\}$ est borné dans $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ce qui implique par (14)-(15) que $\{w, w_t\} = \{S(t) - \Sigma(t)\}\{v_0, v_1\}$ vérifie $\{w_t, w_{tt}\}$ est borné dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Ainsi revenant à l'équation (non autonome) que vérifie w :

$$w_{tt} + \alpha w_t - \Delta w = f - \sin v$$

avec $w(0) = 0$, $w_t(0) = 0$ et les propriétés de régularité classiques du Laplacien dans $H_0^1(\Omega)$, il vient que w est borné dans $H^2(\Omega)$ ce qui achève la preuve de la Proposition 1.

Quant à la Proposition 2, elle résulte du fait que dans chacun des deux cas, le groupe $S(t)$ est continu sur E lorsque l'on muni cet espace de la topologie induite par la norme H^1 (ce qui s'obtient par la technique d'énergie classique : étude de l'inéquation différentielle que vérifie $\int_0^L (v^2 + L^2 v_x^2)dx$ où $v = v_1 - v_2$ deux solutions de (4) (resp.(7)). Une fois ce résultat acquis, la compacité de $H^2(0, L)$ dans $H^1(0, L)$ permet de conclure la preuve de la Proposition 2.

Il en résulte alors le

Théorème 1.—
i) Dans l'Exemple 1, $\mathcal{A} = \omega(B_a)$ est l'attracteur global pour $S(t)$.
ii) Dans les Exemples 2 et 3, lorsque l'on munit E de sa topologie faible, les adhérences dans (8) étant alors prises dans ce sens, l'ensemble $\mathcal{A} = \omega_f(B_a)$ est l'attracteur global pour $S(t)$.

Remarque 1 : La propriété (11) a bien un sens puisque d'après l'existence d'un borné absorbant les ensembles $S(t)B$ sont inclus dans $\mathcal{B}_a$ pour $t \geq T(B)$ et la topologie faible de E y est métrisable. ∎

Remarque 2 : Pour l'équation de Sine-Gordon (Exemple 1) et lorsque la donnée f est plus régulière, $f \in H^k(\Omega)$ par exemple, nous avons montré ([7]) que l'attracteur global est borné dans $H^{k+2}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$ dans les cas $\Omega \subset \mathbf{R}^n, n = 1,2$ ou 3. Il est utile de noter qu'aucune condition de compatibilité pour f (sur $\partial\Omega$) n'est nécessaire. Nous renvoyons à [7] (et [6]) pour des exemples plus généraux et des résultats de convergence vers l'attracteur dans des normes du type $H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega), k \geq 2$. L'analogue de ces résultats, en particulier lorsque $f \in H^k_{loc}(\mathbf{R})$ a t'on $\mathcal{A} \subset H^{k+2}_{loc}(\mathbf{R})$ nous semble ouvert dans les Exemples 2 et 3.∎

III ETUDE DE LA DIMENSION DE L'ATTRACTEUR GLOBAL

III.1 Un résultat général

L'étude de la dimension de l'attracteur global est liée de manière naturelle à l'équation linéarisée

$$\frac{dv}{dt} + \Gamma'(u)v = 0. \tag{16}$$

Donnons nous $u_0 \in \mathcal{A}$, alors $u(t) = S(t)u_0 \in \mathcal{A}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et désignons par $L(t, u_0)$ l'application linéaire $v_0 \mapsto v(t) = L(t, u_0)v_0$ où $v(t)$ est la solution de (16) avec donnée initiale $v(0) = v_0$. On suppose que $L(t, u_0)$ est linéaire et continue sur un espace de Hilbert réel H munit d'un produit scalaire noté $(\quad,\quad)$ et d'une norme $|.|$. On suppose de plus que $E \subset H$ et que $\mathcal{A}$ est un **compact** de H. Dans l'Exemple 1 on prendra $H = E = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$, dans l'Exemple 2, $H = H^1_{per}(0, L)^2 \equiv \{u \in H^1_{loc}(\mathbf{R})^2, u(x + L) = u(x)\}$ où les parties réelles et imaginaires sont considérées séparément et enfin dans l'Exemple 3, $H = H^1_{per}(0, L)$.

L'introduction de l'espace H peut paraître artificielle, toutefois elle s'impose dans de nombreux cas où on est incapable de montrer que $L(t, u_0), u_0 \in E$ est la différentielle au sens de Fréchet de $S(t)$ en u_0. En pratique, et pour ce qui concerne l'estimation de la dimension de $\mathcal{A}$, il est suffisant de s'assurer des conditions (17) et (18) ci-après. La première est une propriété de différentiabilité uniforme sur $\mathcal{A}$: pour tout $t \in \mathbf{R}$ fixé, on demande que

$$\lim_{\substack{u_0, v_0 \in \mathcal{A} \\ |u_0 - v_0| \to 0}} \frac{|S(t)v_0 - S(t)u_0 - L(t, u_0)(v_0 - u_0)|}{|v_0 - u_0|} = 0. \tag{17}$$

La seconde est une borne sur les normes de $L(t, u_0)$:

(18) $$\sup_{u_0 \in \mathcal{A}} |L(t, u_0)|_{\mathcal{L}(H)} \leq \ell(t) < \infty, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Cette dernière condition est peu restrictive en pratique (du fait que $\mathcal{A}$ est borné dans E) et dans les exemples envisagés, (17) résulte de la propriété plus forte : Etant donné $t \in \mathbf{R}$ et $R > 0$ il existe $C(t, R) < \infty$ tel que pour $|u_0|_E \leq R$, $|v_0|_E \leq R$

$$|S(t)v_0 - S(t)u_0 - L(t, u_0)(v_0 - u_0| \leq C(t, R)|v_0 - u_0|^2.$$

Revenons au cas général et introduisons les nombres

(19) $$\omega_m(t, u_0) = \|\Lambda^m L(t, u_0)\|_{\mathcal{L}(\Lambda^m H)} \quad \text{(voir aussi (24)-(25))}$$

$$\bar{\omega}_m(t) = \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \omega_m(t, u_0), \bar{\pi}_m = \lim_{t \to +\infty} \bar{\omega}(t)^{1/t}$$

(Cette dernière limite existe car $\bar{\omega}_m(t_1 + t_2) \leq \bar{\omega}_m(t_1)\bar{\omega}(t_2)$).

Ainsi $\bar{\omega}_m(t)$ borne la variation des volumes m-dimensionnel par l'application tangente le long des trajectoires de $\mathcal{A}$. Le résultat de dimension finie sur $\mathcal{A}$ s'obtient alors dès que l'un des π_m est strictement inférieur à 1. En effet dans ce cas, et pour t assez grand, les applications $L(t, u_0)$ contractent les volumes m-dimensionnels de l'espace tangent en tout point d'une trajectoire sur $\mathcal{A}$. De manière précise, nous avons le

Théorème 2 ([3,2,6]).— *Etant donné un compact $\mathcal{A}$ d'un espace de Hilbert H, invariant par une famille d'applications $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ définie sur $\mathcal{A}$ et pour laquelle il existe des opérateurs linéaires $\{L(t, u_0), t \geq 0, u_0 \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{L}(H)$ qui vérifient (17) et (18). S'il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que*

(20) $$\pi_{m_0} < 1$$

alors

(21) la dimension de Hausdorff de $\mathcal{A}$ est inférieure à $1 + m_0$,

(22) la dimension capacitaire de $\mathcal{A}$ est $\leq (1 + m_0) \underset{1 \leq \ell \leq m_0}{\operatorname{Max}} \left(1 + \frac{|Ln \pi_\ell|}{|Ln \pi_{n_0}|}\right)$.

Rappelons que la dimension capacitaire (ou fractale) de $\mathcal{A}$ est la limite

(23) $$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{Ln N_\varepsilon(\mathcal{A})}{Ln 1/\varepsilon}$$

où $N_\varepsilon(\mathcal{A})$ est le nombre minimal de boules de H qu'il faut pour recouvrir $\mathcal{A}$.

Dans le cas où les applications $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sont **compactes**, (21) a été prouvé par Douady et Oesterlé [3] ; (22) résulte, toujours dans le cas compact, d'un résultat plus précis de Constantin Foias-Temam [2]. L'extension au cas non compact, qui est nécessaire en particulier pour les Exemples 1 à 3, est faite dans Ghidaglia-Temam [6]. Signalons enfin qu'en pratique la majoration (22) est de l'ordre de (21), souvent $2(1 + m_0)$.

III.2 Application à l'équation de Sine-Gordon

Il s'agit donc d'estimer $\omega_m(t, u_0)$. Puisque

$$\omega_m(t, u_0) = \sup |v^1(t) \wedge \ldots \wedge v^m(t)| \tag{24}$$

où le suprémum est prit sur tous les $(v_0^1, \ldots, v_0^m)$ avec $|v_0^1 \wedge \ldots \wedge v_0^m| = 1$ et $v^i(t) \equiv L(t, u_0)v_0^i$, il faut exprimer le déterminant de Gram

$$G_m(t) = \det_{1 \le i,j \le m} (v^i(t), v^j(t)). \tag{25}$$

qui est le carré de $|v^1(t) \wedge \ldots \wedge v^m(t)|$. Introduisons $Q_m(t)$ le projecteur orthogonal dans H sur l'espace engendré par les $\{v^i(t)\}$. L'équation d'évolution de G_m (qui est un Wronskien) se déduit de (16) :

$$\frac{dG_m}{dt} + 2\, Tr(\Gamma'(u) \circ Q_m) G_m = 0, \tag{26}$$

où Tr désigne la trace d'un opérateur (ici de rang fini). On conçoit qu'il n'est pas aisé de calculer $Q_m(t)$ (qui reste un opérateur de rang m, $\forall t$). On introduit alors le nombre

$$q_m = \lim_{t \to +\infty} \inf \operatorname*{Inf}_{u_0 \in \mathcal{A}} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname*{Inf}_{rgQ = m} Tr\{\Gamma'(S(s)u_0) \circ Q\} ds \tag{27}$$

qui permet, par (19) et (26), d'écrire

$$\pi_m \le exp(-q_m). \tag{28}$$

L'avantage de q_m est qu'il ne fait plus intervenir l'équation linéarisé. La condition $\pi_m < 1$ se ramène donc à vérifier que $q_m > 0$.

Cette démarche, introduite dans [2] à propos des équations de Navier-Stokes s'est avérée efficace pour une très large classe d'équations paraboliques dissipatives, puis pour des équations hyperboliques amorties ([6]) comme celle de l'Exemple 1 et plus récemment pour d'autres équations intermédiaires (cf. le livre de R. Temam [9] pour une revue). Dans les Exemples 2 et 3, il n'est pas possible d'obtenir que $q_m > 0$ pour m assez grand (nous y reviendrons). Pour obtenir que $\pi_m < 1$, pour certains m, nous avons introduit ([4,5]) une autre méthode qui permet d'estimer $G_m(t)$ et qui se confond avec la "méthode des q_m" lorsque celle ci est possible. Avant d'y venir indiquons brièvement comment on obtient pour l'Exemple 1 le

Théorème 2.— *L'attracteur global $\mathcal{A}$ obtenu au Théorème 1 pour l'équation de Sine-Gordon (2)-(3) est de dimension capacitaire finie (il en est donc de même pour sa dimension de Hausdorff). De plus il existe une constante universelle C_n (qui ne dépend que de la dimension d'espace n) telle que*

$$d_F(\mathcal{A}) \le \begin{cases} 2(1 + C_1 R) & pour \quad n = 1, \\ 2(1 + C_2 R \operatorname{Log} R) & pour \quad n = 2, \\ 2(1 + C_n R^{n/2}) & pour \quad n \ge 3. \end{cases} \tag{29}$$

Le nombre sans dimension R vaut

$$R = \begin{cases} j^2/\lambda_1 \alpha^2 & si \quad \alpha^2 \le 3\lambda_1, \\ j^2/3\lambda_1^2 & si \quad \alpha^2 \ge 3\lambda_1, \end{cases} \tag{30}$$

et λ_1 est la première valeur propre du Laplacien sur Ω avec conditions de Dirichlet.

Ce résultat est prouvé en détails dans [8]. Ici $H = E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que l'on munit du produit scalaire biaisé associé à la norme

$$|\{v,w\}|^2 = \int_\Omega \{|\nabla v|^2 + |w+\varepsilon v|^2\}dx, \tag{31}$$

où ε est un nombre arbitraire que l'on choisit en fonction des paramètres α et λ_1 du problème : $\varepsilon = \alpha/3$ lorsque $\alpha^2 \leq 3\lambda_1$ et $\varepsilon = \lambda_1/\alpha$ lorsque $\alpha^2 \geq 3\lambda_1$ c'est à dire $\varepsilon = min(\alpha/3, \lambda_1/\alpha)$. Nous voulons étudier q_m donnée par (27), pour cela soit $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée de QH : $\varphi_i = \{v_i, w_i\}$. Etant donné que $\Gamma'(u)\varphi = \{-w, \alpha w - \Delta v + j\ v \cos\ u\}$,

$$(\Gamma'(u)\varphi,\varphi) = \int_\Omega \{\varepsilon|\nabla v|^2 + \varepsilon(\varepsilon-\alpha)v(w+\varepsilon v) + (\alpha-\varepsilon)|w+\varepsilon v|^2\}dx +$$

$$+j\int_\Omega v(w+\varepsilon v)\cos u dx.$$

Le choix de ε est tel que la première intégrale définit une norme équivalente à la norme (31). Plaçons nous dans le cas $\alpha^2 \leq 3\lambda_1$ (l'autre cas est similaire), il vient alors que

$$(\Gamma'(u)\varphi,\varphi) \geq \frac{\alpha}{3}|\varphi|^2 - \frac{3}{4\alpha}(\frac{2\alpha^2}{9} + |j|)^2 \int_\Omega v^2 dx. \tag{32}$$

Ainsi

$$Tr(\Gamma'(u)\circ Q) \equiv \sum_{i=1}^m (\Gamma'(u)\varphi_i,\varphi_i) = \frac{\alpha m}{3} - \frac{3}{4\alpha}(\frac{2\alpha^2}{9} + |j|)\sum_{i=1}^{2m}\int_\Omega v_i^2 dx. \tag{33}$$

Si l'on désigne par λ_i la ième valeur propre du laplacien sur Ω avec conditions de Dirichet,

$$\sum_{i=1}^m \int_\Omega v_i^2 dx \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i}$$

compte tenu du fait que les $\{(v_i, w_i)\}$ sont orthonormés dans H pour (31). Ceci montre que

$$q_m \geq \frac{\alpha m}{3} - \frac{3}{2\alpha\nu\lambda_1}\left(\frac{4\alpha^4}{81} + j^2\right)\sum_{k=1}^m \frac{\lambda_1}{\lambda_k}.$$

Etant donné que $\lambda_k \geq \lambda_1 C_n' k^{2/n}$, où C_n' est une constante universelle

$$q_m \geq m\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{3C_n'}{2\alpha\nu\lambda_1}\left(j^2 + \frac{4\alpha^4}{81}\right)\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m k^{2/n}\right),$$

expression qui montre que $q_m > 0$ pour m assez grand et produit (29).

III.3 Application aux équations dispersives

La démarche pour traiter les Exemples 1 et 2 présente une grande similarité (et quelques différences). Nous allons nous consacrer au cas des équations de $K-dV$ (Exemple 3) pour lesquelles l'algèbre est plus simple. Dans le cas conservatif, c'est à dire lorsque $\alpha = 0$ et $f = 0$, cette équation possède une infinité d'invariants polynomiaux qui résultent du fait qu'il s'agit d'un système complètement intégrable. Les trois premiers sont I_0, I_1 et I_2

$$I_0(u) = \int_0^L u^2 dx \quad , \quad M_0(u) = 2u,$$

$$I_1(u) = \int_0^L (u_x^2 - u^3/3) dx \quad , \quad M_1(u) = 2u_{xx} + u^2,$$

$$I_2(u) = \int_0^L \{9u_{xx}^2/5 - 3\ uu_x^2 + u^4/4\} dx,$$

$$M_2(u) = 18U_{4x}15 + 6\ uu_{xx} + 3\ U_x^2 + u^3$$

et nous avons désigné par $M_i(u)$ le multiplicateur par lequel on multiplie (7) pour obtenir que $I_i(u)$ est invariant. Dans le cas $\alpha > 0$, $f \neq 0$; et en utilisant toujours les mêmes multiplicateurs on obtient l'existence d'un borné absorbant dans E. Par exemple

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2 dx + \alpha \int_0^L u^2 dx = \int_0^L f\ u dx$$

permet de déduire que

$$\int_0^L u^2(x) dx \le e^{-\alpha t} \int_0^L u_0^2(x) dx\ e^{-\alpha t} + (1 - e^{-\alpha t})\alpha^{-1} \int_0^L f^2(x) dx$$

ce qui montre l'existence d'un borné absorbant dans $L^2(0, L)$.

L'équation linéarisé (16) s'écrit ici

(34)
$$\frac{\partial V}{\partial t} + v_{3x} + (uv)_x + \alpha v = 0,$$

l'espace H sur lequel on étudie l'évolution des volumes par (34) étant $H = H^1_{per}(0, L)$. Comme nous l'avons signalé au paragraphe précédent, l'équation (26) pour le déterminant de Gram

(35)
$$G_m(t) = \det_{1 \le i,j \le m} \int_0^L (\mathcal{V}_i \mathcal{V}_j + L^2 \mathcal{V}_{ix} \mathcal{V}_{jx}) dx$$

ne permet pas de conclure. Il s'agit en fait d'estimer $v(t)$ dans la norme de H, lorsque v est solution de (34). La méthode consiste à s'inspirer des estimations sur u dans H obtenues grâce à M_0 et M_1. Pour cela on utilise les **mulplicateurs linéarisés** :

$$D_u M_0(u) v = 2v \quad \text{et} \quad D_u M_1(u) v = 2v_{xx} + 2uv \ ;$$

on multiplie donc (34) par $(1+\mu)D_0M_0(u)v + D_uM_1(u)v$ et on intègre pour $x \in]0, L[$. Il vient

$$\frac{d}{dt}q_\mu(t,v) + \alpha q_\mu(t,v) = r_\mu(t,v) \tag{36}$$

où

$$q_\mu(t,v) = \int_0^L \{v^2 + L^2 v_x^2 + (\mu - L^2 u)v^2\}dx, \tag{37}$$

$$r_\mu(t,v) = -\int_0^L \{(1+\mu)u_x + L^2 u_t\}v^2 dx. \tag{38}$$

Lorsque $u_0 \in \mathcal{A}$, $u(t) \in \mathcal{A}$, et puisque $\mathcal{A}$ est borné dans H^2 il est possible de choisir $\mu > 0$ de sorte que

$$|v|^2 \leq q_\mu(t,v) \leq (1+2\mu)|v|^2, \ \forall v \in H, \forall t \in \mathbf{R}. \tag{39}$$

De plus, et toujours car $u(t)$ reste borné dans H^2, il existe une constante C_0 qui ne dépend que des données : α, f et L telle que

$$|r_\mu(t,v)| \leq C_0 |v|^{3/2} (\int_\Omega v^2 dx)^{1/4}, \ \forall v \in H, \forall t \in \mathbf{R}. \tag{40}$$

Soit alors $\tilde{q}_\mu(t,.,.)$ la forme polaire associée à $q_\mu(t,.)$, on introduit

$$H_m(t) = \det_{1\leq i,j \leq m} \tilde{q}_\mu(t, v^i(t), v^j(t)) \tag{41}$$

au lieu de $G_m(t)$. En d'autres termes on évalue le déterminant de Gram des $v^i(t)$ dans le produit scalaire $\tilde{q}_\mu(t,.,.)$ qui est plus adapté.

Au vu de (39),

$$G_m(t) \leq H_m(t) \leq (1+2\mu)^m G_m(t) \tag{42}$$

et il résulte ([5]) de (36) que

$$\frac{dH_m(t)}{dt} + m\alpha H_m(t) = (\sum_{\ell=1}^{m} \omega_\ell(t)) H_m(t) \tag{43}$$

où $\omega_i(t)$ sont les valeurs propres de la forme quadratique sur $\mathbf{R}^m$: $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto r(t, \sum_{i=1}^m x_i v_i(t))$ par rapport à la forme quadratique $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto q(t, \sum_{i=1}^m x_i v_i(t))$. D'après (39) et (40),

$$\frac{|r_\mu(t,v)|}{q(t,v)} \leq C_0 \left[\frac{\int_\Omega v^2 dx}{\int_\Omega (v^2 + L^2 v_x^2) dx} \right]^{1/4}$$

et, en utilisant la formule du min-max, il vient

$$|\omega_\ell(t)| \leq C_0 \sum_{k=1}^{m} (1/\lambda_k) \leq C_1 \sum_{k=1}^{m} k^{-1/2},$$

où λ_k est la $k$ième valeur propre de l'opérateur $v \mapsto v - L^2 v_{xx}$ avec conditions aux limites périodiques. On déduit alors de (43) que

$$H_m(t) \leq H_m(0) \exp(-\alpha m + c_2\sqrt{m})t, \quad \forall t \geq 0$$

puis par (42) (rappelons que $G_m(0) \equiv 1$)

$$G_m(t) \leq (1+2\mu)^m \exp(-\alpha m + C_2\sqrt{m})t, \quad \forall t \geq 0.$$

Le second membre de cette inégalité est indépendant de $u_0 \in \mathcal{A}$, il en résulte (voir (19)) que

$$\bar{\omega}_m(t) \leq (1+2\mu)^m \exp(-\alpha m + C_2\sqrt{m})t, \forall t \geq 0$$

et donc

$$\pi_m = \lim_{t \to +\infty} \bar{\omega}_m(t)^{1/t} \leq \exp(-\alpha m + C_2\sqrt{m}).$$

Ainsi la condition (20) est vérifiée dès que $m > \frac{\alpha^2}{C_2^2}$ et on a montré le (l'Exemple 2 se traite de même)

Théorème 3.— *L'attracteur global $\mathcal{A}$ obtenu au Théorème 1 pour les équations de Schrödinger (resp. l'équation de Korteweg-de Vries) est de dimension capacitaire (et donc Hausdorff) finie.*

Remarques.

1. On n'utilise que quelques invariants de l'équation de Korteweg de Vries, la preuve s'étend sans difficulté à des équations voisines qui elles ne sont pas complètement intégrables pour $\alpha = 0, f = 0$. De même les équations de Schrödinger (4)-(5) considérées ne possèdent en général que deux invariants

$$\int_0^L u^2 dx \quad \text{et} \quad \int_0^L \{u_x^2 - G(|u|^2)\} dx.$$

2. Les deux méthodes se confondent lorsque les invariants de base sont quadratiques puisque les multiplicateurs sont alors linéaires.

3. P. Biler [1] a étudié un cas de couplage entre une équation de Klein-Gordon et de Schrödinger (couplage de Yukawa) ce qui conduit à envisager des systèmes du type

$$iu_t + \Delta u + i\alpha_1 u = -uv + f,$$

$$v_{tt} + \alpha_2 v_t - \Delta v = |u|^2 + g.$$

La méthode des multiplicateurs non linéaires conduit la aussi à un résultat de dimension finie pour l'attracteur global. Voir [1] pour la construction de cet ensemble qui utilise une situation intermédiaire entre les Propositions 1 et 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BILER, Attractors for the system of Schrödinger and Klein- Gordon equations with Yukawa Coupling, Prépublication Orsay.

[2] P. CONSTANTIN, C. FOIAS et R. TEMAM, Attractors representing turbulent flows, Memoirs of A.M.S., Vol.53, 1985, 315.

[3] A. DOUADY et J. OESTERLE, Dimension de Hausdorff des attracteurs, C.R. Acad. Sc. Paris, 290, Série A, 1980 1135-1138.

[4] J.M. GHIDAGLIA, Finite dimensional behavior for weakly damped driven Schrödinger equations, Annales de l'I.H.P. Analyse Non Linéaire, à paraître et C.R. Acad. Sci. Paris, t.305, 1987, 291-294.

[5] J.M. GHIDAGLIA, Weakly damped driven Korteweg-de Vries equations behave asymptotically as a finite dimensional system in the long time, J. Diff. Equations, 1989, à paraître et prépublication d'Orsay.

[6] J.M. GHIDAGLIA et R. TEMAM, Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations, J. Math. Pures et Appl. 66, 1987, 273-319 et C.R. Acad. Sci. Paris, t.300, série I (7), 1985, 185-188.

[7] J.M. GHIDAGLIA et R. TEMAM, Regularity of the solutions of second order evolution equations and their attractors, Annali Scuola Norm. Pisa, à paraître et prépublication d'Orsay.

[8] J.M. GHIDAGLIA et R. TEMAM, Periodic dynamical system with application to Sine-Gordon equations : estimates on the fractal dimension of the universal attractor, Prébublication et Contemporary Math. à paraître.

[9] R. TEMAM, Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics, Springer-Verlag, à paraître en 1988.

J.M. GHIDAGLIA
Laboratoire d'Analyse Numérique
Université de Paris-Sud
Bât. 425
91405 ORSAY Cedex
(France)