Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

R-J. Di Perna
P-L. Lions

Solutions globales de l'équation de Boltzmann

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A6_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SOLUTIONS GLOBALES
DE L'EQUATION DE BOLTZMANN

R-J. DI PERNA et P-L. LIONS

Exposé n° VI

20 Octobre 1987

I Introduction

Nous donnons ici une brève présentation de résultats récents (voir R.J. Di Perna and P-L. Lions [2],[3],[4]) concernant l'équation de Boltzmann

$$(B) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \xi . \nabla_x f = Q(f,f) \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$$

où $N \geq 1$. La fonction inconnue $f = f(t,x,\xi)$ représente la densité de molécules au temps t, au point x et avec la vitesse ξ dans une description statistique d'un gaz raréfié de molécules que nous supposerons soumises à aucune force, afin de simplifier la présentation. En particulier, ceci explique que f est non-négative

$$(1) \qquad f \geq 0 \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

La nonlinéarité de l'équation de Boltzmann réside dans l'opérateur quadratique Q apparaissant au membre de droite de (B). Ce terme, appelé opérateur de collision, est donné par (en chaque point (t,x))

$$(2) \qquad Q(f,f) = \int_{\mathbf{R}^N} d\xi_* \int_{S^{N-1}} \{f'f'_* - ff_*\} B(\xi - \xi_*, \omega)$$

où nous notons pour toute fonction $\varphi(\xi)$

$$(3) \qquad \varphi' = \varphi(\xi') \ , \ \varphi_* = \varphi(\xi_*) \ , \ \varphi'_* = \varphi(\xi'_*)$$

et où ξ', ξ'_* sont construits à partir de ξ, ξ_*, ω de la manière suivante

$$(4) \qquad \xi' = \xi - (\xi - \xi_*, \omega)\omega \ , \ \xi'_* = \xi_* + (\xi - \xi_*, \omega)\omega.$$

La fonction $B(z,\omega)$ $(z \in \mathbf{R}^N, \omega \in S^{N-1})$ est appelée noyau de collision et dépend de l'interaction des molécules (potentiel intermoléculaire). L'exemple le plus simple d'un tel noyau de collision est donné par

$$(5) \qquad B(z,\omega) = |(z,\omega)| \ ,$$

ce choix correspond au modèle dit des sphères dures (les molécules sont alors considérées comme des sphères entrant en collision de manière parfaitement élastique). Physiquement, le terme $Q(f,f)$ représente le taux de variation de la densité f due aux interactions et collisions des molécules.

Il est important de remarquer que (4) est en fait une paramétrisation de l'ensemble des vitesses (ξ', ξ'_*) (physiquement, vitesses après collision) vérifiant

$$\xi' + \xi'_* = \xi + \xi_* \quad \text{(conservation de la quantité de mouvement)}$$

$$|\xi'|^2 + |\xi'_*|^2 = |\xi|^2 + |\xi_*|^2 \quad \text{(conservation de l'énergie cinétique).}$$

Nous supposerons toujours que B vérifie

$$B \quad \text{ne dépend que de} \quad |z| \quad \text{et de} \quad (z, \omega) \ , \ B \geq 0. \tag{6}$$

Le caractère quadratique de Q et le manque d'estimées a priori pour les solutions de (B) ont conduit divers auteurs à résoudre (B) avec un "petit paramètre" (temps petit, données initiales petites ou proches d'une solution particulière de type Maxwellienne, libre parcours moyen petit ...) ou à étudier des modèles approchés (solutions spatialement homogènes, i.e. indépendantes de x, modèles à vitesse discrète, approximation de l'opérateur Q ...) et nous renvoyons le lecteur à C.Cercignani [1] (et à [2]) pour une bibliographie extensive ainsi que pour l'obtention de l'équation de Boltzmann à partir de l'étude de systèmes infinis de particules et de l'hypothèse de chaos moléculaire, obtention sur laquelle nous reviendrons dans une publication ultérieure.

Sous la seule hypothèse que B vérifie

$$B \in L^1_{\text{loc}}(B_R \times S^{N-1}), (1 + |\xi|^2)^{-1} \int_{B_R} A(\xi + z) dz \to 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \to \infty \tag{7}$$

pour tout $r < \infty$, où $A(z) = \int_{S^{N-1}} B(z, \omega) d\omega$, nous présentons ci-dessous un résultat d'existence globale d'une solution faible de (B) (définie ci-dessous) lorsque f est prescrite en $t = 0$

$$f(0, x, \xi) = f_0(x, \xi) \quad x \in \mathbf{R}^N \ , \ \xi \in \mathbf{R}^N \tag{8}$$

et f_0 vérifie

$$f_0 \geq 0 \ , \quad \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f_0(1 + |\xi|^2 + |x|^2 + |\operatorname{Log} f_0|) dx d\xi < \infty. \tag{9}$$

Ce résultat d'existence globale est en fait une conséquence directe d'un résultat de stabilité (pour une topologie faible) des solutions faibles de (B) que nous énoncerons ci-dessous avant le résultat d'existence globale. Signalons également que l'hypothèse (7) est une version faible d'hypothèse de troncature angulaire (angular cut-off) initialement introduite par H. Grad [10].

Nous ne donnerons aucune démonstration des résultats énoncés ci-dessous et nous renvoyons le lecteur à [2],[3]. Signalons néanmoins que la démonstration du résultat de stabilité repose sur trois idées :

1) Il est possible pour de nombreux modèles de transport (linéaires ou non) d'opérer des changements non linéaires de fonction inconnue, technique appelée renormalisation des solutions, qui permet d'obtenir en particulier de nombreuses bornes a priori ;

2) les moyennes en vitesse (ξ) de solutions d'équations linéaires de transport ont, sous des conditions très générales, un gain de régularité assurant notamment des phénomènes de compacité locale. Ces résultats ont été pour la première fois observés par F. Golse, B. Perthame et R. Sentis [9], voir aussi F.Golse, P-L. Lions, B. Perthame et R. Sentis [8], P. Gérard [7], R.J. Di Perna et P-L. Lions [5],
3) il est possible d'écrire des formulations faibles de l'équation de Boltzmann en l'intégrant le long des caractéristiques.

Ces méthodes ne sont pas seulement utiles à la résolution des équations de Boltzmann, mais permettent également d'aborder de nombreux modèles de théorie cinétique comme les équations de Vlasov-Poisson, Vlasov-Maxwell, avec ou sans terme de collision de type Boltzmann ou Fokker-Planck, et nous renvoyons le lecteur à [5], [6] pour plus de précisions. Signalons aussi que le traitement de certains de ces modèles nécessitent l'étude de "caractéristiques généralisées" (voir [6]). Remarquons enfin que les solutions globales (faibles) de (B) que nous construisons, vérifient une inégalité d'entropie, ce qui permet une étude (partielle) du comportement asymptotique quand t tend vers $+\infty$ ou quand le libre parcours moyen tend vers 0 (limite hydrodynamique), sujet qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

II Quantités conservées et estimées a priori

L'identité formelle suivante est obténue par des considérations élémentaires de symétrie basées sur la forme de B induite par l'hypothèse (6)

$$(10)\qquad \int_{\mathbf{R}^N} Q(\varphi,\varphi)\psi d\xi$$

$$= \frac{1}{4} \iiint\limits_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N\times S^{N-1}} B(\xi-\xi_*,\omega)d\xi d\xi_* d\omega\{\varphi'\varphi'_* - \varphi\varphi_*\}\{\psi+\psi_*-\psi'-\psi'_*\}\ .$$

pour toutes fonctions φ et ψ. Les relations liant ξ', ξ'_*, ξ et ξ_* impliquent donc que $[\psi+\psi_*-\psi'-\psi'_*]$ est identiquement nulle si $\psi = a + b.\xi + c|\xi|^2$ où $a, c \in \mathbf{R}^N$. Grâce à cette remarque, on déduit facilement que les solutions de (B) - au moins formellement - doivent vérifier les invariances suivantes.

$$(11)\qquad \iint\limits_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} f(t,x,\xi)dxd\xi \quad \text{est indépendant de} \quad t \quad \text{(conservation de la masse)}$$

$$(12)\qquad \iint\limits_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} f(t,x,\xi)\xi dxd\xi \quad \text{est indépendant de} \quad t$$

(conservation de la quantité de mouvement).

$$(13)\qquad \iint\limits_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} f(t,x,\xi)|\xi|^2 dxd\xi \quad \text{est indépendant de} \quad t$$

(conservation de l'énergie cinétique).

$$(14) \qquad \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t,x,\xi)|x-\xi t|^2 dx d\xi \quad \text{est indépendant de} \quad t$$

(évolution du moment d'inertie).
Comme $f \geq 0$, les invariances (11),(13),(14) donnent bien sûr des estimées a priori. La dernière identité remarquable (connue) satisfaite formellement par les solutions de (B) est l'identité *d'entropie* que l'on obtient en remarquant que (10) implique (en prenant $\psi = \operatorname{Log} \varphi$)

$$(15) \quad -\int_{\mathbf{R}^N} Q(\varphi,\varphi) \operatorname{Log} \varphi d\xi = \frac{1}{4} \iiint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times S^{N-1}} B d\xi d\xi_* d\omega \{\varphi'\varphi_* - \varphi\varphi_*\} \operatorname{Log} \frac{\varphi'\varphi'_*}{\varphi\varphi_*} \geq 0.$$

Et en reportant dans (B), ceci donne facilement

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f \operatorname{Log} f dx d\xi + \frac{1}{4} \iiiint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times S^{N-1}} dB d\xi d\xi_* d\omega \{f'f'_* - ff_*\} \operatorname{Log} \frac{f'f'_*}{ff_*} = 0$$

d'où en particulier

$$(17) \qquad \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f \operatorname{Log} f dx d\xi \quad \text{est décroissante par rapport à} \quad t\ .$$

De toutes ces identités remarquables, on déduit tout d'abord que si $f_0 \geq 0$ est une donnée initiale vérifiant

$$(18) \qquad R_0 = \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f_0 (1 + |\xi|^2 + |x|^2) dx d\xi < \infty$$

alors (formellement) $f(t) \geq 0$ et

$$(19) \qquad \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t)(1 + |\xi|^2 + |x-\xi t|^2) dx d\xi = R_0\ ,\ \forall t \geq 0$$

où $f(t)$ est une solution de (B) vérifiant (8). D'où en particulier

$$(20) \qquad \sup_{t \in [0,T]} \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t)|x|^2 dx d\xi \leq C(T, R_0).$$

De plus, on démontre grâce à (16) (et (17)) et aux bornes précédentes que si f_0 vérifie

$$R_1 = \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f_0 |\operatorname{Log} f_0| dx d\xi < \infty \tag{21}$$

alors

$$\sup_{t \geq 0} \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t) |\operatorname{Log} f(t)| dx d\xi \geq C(R_0, R_1) \tag{22}$$

et

$$\int_0^\infty dt \iiiint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times S^{N-1}} dx d\xi d\xi_* d\omega \; B(\xi - \xi_*, \omega) \{f' f'_* - f f_*\} \operatorname{Log} \frac{f' f'_*}{f f_*} \tag{23}$$

$$\leq C(R_0, R_1) \; .$$

Dans tout ce qui suit, nous dirons qu'une suite de solutions f_n (classiques ou faibles) de (B) est bornée si les bornes naturelles (au vu de ce qui précède) suivantes sont vérifiées

$$\iint_{B_R \times \mathbf{R}^N} dx d\xi \; f_n(t)(1 + |\xi|^2) \leq C(R, T) \; , \quad \text{p.p.} \quad t \in]0, T[\tag{24}$$

$$\int_0^T dt \iiiint_{B_R \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times S^{N-1}} dx d\xi d\xi_* d\omega \; B\{f'_n f'_{n*} - f_n f_{n*}\} \operatorname{Log} \frac{f'_n f'_{n*}}{f_n f_{n*}} \leq C(R, T) \tag{25}$$

$$\iint_{B_R \times \mathbf{R}^N} dx d\xi \; f_n(t) |\operatorname{Log} f_n(t)| \leq C(R, T) \; , \quad \text{p.p.} \quad t \in]0, T[\tag{26}$$

pour tous $R, T \in]0, \infty[$.

III Formulations faibles de l'équation de Boltzmann

Nous dirons que $f \in C\left([0,\infty[, L^1_+(B_R \times \mathbf{R}^N)\right)$ $(\forall R < \infty)$ est solution de (B) si $Q^\pm(f,f)(1+f)^{-1} \in L^1((O,T) \times B_R \times B_R)$ $(\forall R, T < \infty)$ et si f vérifie

$$(26) \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \xi.\nabla_x\right\} \operatorname{Log}(1+f) = \frac{1}{1+f} Q(f,f) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$$

où on note
$Q^+(f,f) = \int\limits_{\mathbf{R}^N \times S^{N-1}}\int d\xi_* d\omega B f' f_*$, $Q^-(f,f) = \int\limits_{\mathbf{R}^N \times S^{N-1}}\int d\xi_* d\omega B f f_* = f L(f)$, $L(f) = \int_{\mathbf{R}^N} f_* A(\xi - \xi_*)$ de sorte que $Q = Q^+ - Q^-$.
On peut alors vérifier (voir [2]pour plus de détails) que pour toute solution f de (B) on a

1) Si $Q^\pm(f,f) \in L^1_{\text{loc}}\left(]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N\right)$, alors (B) a lieu au sens des distributions
2) pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbf{R})$ telle que $\beta'(t)(1+t)$ est bornée sur $[0,\infty[$

$$(27) \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \xi.\nabla_x\right\} \beta(f) = \beta'(f) Q(f,f) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$$

3) en notant pour toute fonction φ , $\varphi^\#(t,x,\xi) = \varphi(t, x+t\xi, \xi)$, pour presque tous $x, \xi \in \mathbf{R}^N$, $f^\#$ est absolument continue par rapport à t , $Q^\pm(s,f)^\# \in L^1(0,T)$ $(\forall T < \infty)$ et pour tous $0 \leq s < t < \infty$

$$(28) \qquad f^\#(t) - f^\#(s) = \int_s^t Q(f,f)^\#(\sigma) d\sigma$$

(29)
$$f^\#(t) - f^\#(s) \exp\left(-\int_s^t L(f)^\#(\sigma) d\sigma\right) = \int_s^t Q^+(f,f)^\# \exp\left(-\int_s^\sigma L(f)^\#(\tau) d\tau\right) d\sigma.$$

IV Principaux résultats

Les bornes (24) et (26) impliquent bien sûr que, à une extraction de sous-suite près, on peut toujours supposer qu'une suite bornée f^n de solutions de (B) (au sens de la section III) converge faiblement dans $L^1\left((0,T) \times B_R \times \mathbf{R}^N\right)$ vers f $(\forall R, T < \infty)$. On démontre alors le

Théorème 1.— *Soit f^n une suite bornée de solutions de (B) convergeant faiblement dans $L^1\left(]0,T[\times B_R \times \mathbf{R}^N\right)$ vers f $(\forall R, T < \infty)$.*
On suppose que le noyau B vérifie (7). Alors

i) $\int_{\mathbf{R}^N} f^n \psi d\xi$ *converge vers* $\int_{\mathbf{R}^N} f \psi d\xi$ *dans* $L^1(]0,T[\times B_R)$ $(\forall R, T < \infty)$ *pour tout* $\psi \in L^\infty(]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ *à support compact en* x.
ii) $\int_{\mathbf{R}^N} Q^\pm(f^n, f^n) \psi d\xi$ *convergent en mesure vers* $\int_{\mathbf{R}^N} Q^\pm(f,f) \psi d\xi$ *pour tout* $\psi \in L^\infty(]0,\infty[\times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ *à support compact.*
iii) f *est solution de (B).*
iv) $E_{T,R}(f) \leq \varliminf\limits_n E_{T,R}(f^n)$ *où*

$E_{T,R}(\varphi) = \int_0^T dt \int_{B_R} dx \iiint B d\xi d\xi_* d\omega (\varphi' \varphi'_* - \varphi \varphi_*) \operatorname{Log} \frac{\varphi' \varphi'_*}{\varphi \varphi_*}$.

A l'aide de ce résultat, par un procédé d'approximation, on déduit le

Théorème 2.— *Soit* $f_0 \in L^1_+(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$ *vérifiant (9). Alors il existe* $f \in C([0,\infty]\ ; L^1_+(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ *solution de (B) telle que* $f\ |_{t=0} = f_0$, *vérifiant en outre (11), (12) et*

(13′)
$$\iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t)|\xi|^2 dx d\xi \leq \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f_0 |\xi|^2 dx d\xi\ ,\ \forall t \geq 0$$

(14′)
$$\iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t)|x - \xi t|^2 dx d\xi \leq \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f_0 |x|^2 dx d\xi\ ,\ \forall t \geq 0$$

(16′)
$$\iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f(t) \log f(t) dx d\xi + \frac{1}{4}\int_0^t ds \iiiint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times S^{N-1}} dx B d\xi d\xi_* d\omega (f' f_* - f f_*) \log \frac{f' f'_*}{f f'_*}$$

$$\leq \iint\limits_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} f_0 \operatorname{Log} f_0 dx d\xi\ ,\ \forall t \geq 0$$

(30)
$$Q^-(f,f)(1+f)^{-1} \in L^\infty(]0,\infty[L^1(\mathbf{R}^N \times B_R))$$

$$Q^+(f,f)(1+f)^{-1} \in L^1(]0,T[\times \mathbf{R}^N \times B_R)\ (\forall R, T < \infty)\ .$$

Bibliographie

[1] C. Cercignani : Theory and applications of the Boltzmann equation. Scottish Academic press, Edinburgh, 1975.

[2] R. Di Perna et P-L. Lions : On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability. Preprint.

[3] R. Di Perna et P-L. Lions : On the Fokker-Planck-Boltzmann equation. Preprint.

[4] R. Di Perna et P-L. Lions : Solutions globales dde l'équation de Boltzmann. C.R. Acad. Sci. Paris, 1987.

[5] R. Di Perna et P-L. Lions : Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems. Preprint.

[6] R. Di Perna et P-L. Lions : travail en préparation.

[7] P. Gérard : in les Proceedings de Saint–Jean-de-Monts, Juin 1987.

[8] F. Golse, P-L. Lions, B. Perthame et R. Sentis : Regularity of the moments of the solution of a transport equation. J. Funct. Anal., 1988.

[9] F. Golse, B. Perthame et R. Sentis : Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la valeur propre principale d'un opérateur de transport. C.R. Acad. Sci. Paris, t.301 (1985),p. 341-344.

[10] H. Grad : In Rarefied Gas Dynamics, Vol. 1, Ed. J. Laurmann, Academic Press, New York, 1963.

R.J. Di Perna
Department of Mathematics
Univ. of Berkeley-California
Berkeley Ca 94720

P-L. Lions
Ceremade
Univ. Paris-Dauphine
Pl. de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16