C. Gérard

Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. n° 3, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A3_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PROLONGEMENT MEROMORPHE DE LA MATRICE DE SCATTERING POUR DES PROBLEMES A DEUX CORPS A LONGUE PORTEE

C. GERARD

en collaboration avec A. MARTINEZ

Exposé n°III

24 Novembre 1987

0. Introduction

On s'intéresse dans ce travail aux propriétés analytiques de la matrice de scattering $S(\lambda)$ associé à un opérateur de Schrödinger sur $\mathbf{R}^n$ $H = -h^2\Delta + V$, où V est un potentiel réel à longue portée. On cherche en particulier à établir rigoureusement la relation entre les particules de durée de vie finie appelées résonances par les physiciens, et des pôles pour des énergies complexes de la matrice de scattering $S(\lambda)$.

Les résonances physiques sont observées sous forme de pics (pics de Breit-Wigner) sur la section efficace de diffusion d'une réaction. La forme caractéristique de la plupart de ces pics (en $\frac{\Gamma}{(\lambda-\lambda_0^2+\Gamma^2)}$) fait penser qu'ils proviennent de pôles de la section de diffusion placés dans le complexe au point $\lambda_0 - i\Gamma$. Cette idée est justifiée dans le cas du scattering par un potentiel radial (voir par exemple [La.Li]) par l'existence d'un prolongement méromorphe en λ des amplitudes partielles de diffusion. Mathématiquement il n'y a pas de définition intrinsèque des pôles de la matrice S, sauf pour un potentiel à support compact grâce à la théorie de Lax-Phillips.

Par contre depuis les travaux de Aguilar-Combes [Ag-Co] et Balslev-Combes [Ba-Co], étendus ensuite par beaucoup d'auteurs (voir par exemple [Si 1],[Hu],[Cy],[He-Sj]), on sait prolonger de façon méromorphe en λ la résolvante $(H-\lambda)^{-1}$ dans $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$. On a besoin pour celà de conditions assez fortes sur le potentiel, qui sont essentiellement de deux types :

- décroissance exponentielle à l'infini, ou prolongement holomorphe à l'infini dans un voisinage conique de $\mathbf{R}^n$.

Le problème naturel qui se pose alors (énoncé par Simon dans [Si 2]) est double :

- montrer l'existence (en un sens à définir) d'un prolongement méromorphe de $S(\lambda)$ (problème du prolongement)
- montrer que les pôles de $S(\lambda)$ coincident exactement (avec leur multiplicité algébrique) avec ceux de $(H-\lambda)^{-1}$ (problème de l'identification).

Ces deux problèmes ont été résolus par différents auteurs pour des classes de plus en plus grandes de potentiels (voir par exemple [S.T],[Si 2],[B1],[B2],[Je],[Ag-Kl]), qui sont cependant toujours à courte portée i.e. décroissant à l'infini comme $\|x\|^{-\rho}$ pour $\rho > 1$.

Enfin ces problèmes ont été abordés dans le cas de systèmes à N corps, où on n'a que des résultats très partiels, à cause de la grande complication des équations de résolvante du type Faddeev ou Weinberg-Van Winter. (voir par exemple Derezinski [De]).

1. Rappels de théorie de la diffusion et résultats

Dans la théorie du scattering quantique, on cherche à comparer l'évolution du système d'Hamiltonien H donnée par l'opérateur unitaire e^{-itH} avec l'évolution libre e^{-itH_0} où $H_0 = -h^2\Delta$.

Pour cela on introduit les opérateurs d'onde :

$$W^{\pm} = s. \lim_{t \to \pm\infty} e^{-itH} e^{itH_0} \tag{1.1}$$

$W^{\pm}$ existent et sont complets (i.e. $\mathrm{ImW}^{\pm} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$, où $\mathcal{H}_{ac}$ est le sous-espace spectral absolument continu de H), pour une large classe de potentiels à courte portée. Dans le cas d'un potentiel à longue portée i.e. décroissant à l'infini comme $\|x\|^{-\rho}$ pour $0 < \rho \leq 1$, l'influence du potentiel se fait sentir jusqu'à l'infini et il faut modifier les opérateurs d'onde, i.e. comparer e^{-itH} à une autre dynamique que e^{-itH_0}.

L'approche la plus utilisée est de prendre comme dynamique libre $e^{-iW(t)}$ où $W(t)$ est un opérateur pseudodifférentiel de symbole $W(\xi, t)$ solution de l'équation de Hamilton-Jacobi : $\frac{\partial w}{\partial t} = \|\xi\|^2 + V(\frac{\partial w}{\partial \xi})$, dans certaines régions de l'espace des phases. (Voir par exemple [Hö]).

Récemment Isozaki et Kitada [I.K1],[I.K2] ont introduit des modificateurs indépendants du temps : on considère les opérateurs d'onde modifiés :

$$W_J^{\pm} = s. \lim_{t \to \pm\infty} e^{-itH} J e^{itH_0} \tag{1.2}$$

où J est un opérateur intégral de Fourier qui entrelace H et H_0 dans de grandes régions de l'espace des phases.

On définit alors l'opérateur de scattering

$$S = W_J^{-*} W_J^{+}$$

qui est unitaire sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Comme S commute avec H_0, S se décompose sur la décomposition spectrale du laplacien comme $S = \int_{\mathbf{R}^+} S(\lambda) dE_{0\lambda}$, où $S(\lambda)$ est la matrice de scattering à l'énergie λ définie de $L^2(S^{n-1})$ dans $L^2(S^{n-1})$.

Donnons maintenant le résultat :

On considère $H = -h^2\Delta + V$ où $h \in]0,1]$ est un paramètre et V est un potentiel réel qui s'écrit sous la forme suivante :

$$V(x) = V_L(x) + V_s(x)$$

avec :

(1.2) $V_L \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et $\exists \rho \in]0,1], \varepsilon_0 > 0, R_0 > 0$ tels que V_L se prolonge holomorphiquement dans $D = \{x \in \mathbf{C}^n | \langle Re\, x\rangle \geq R_0, |Im\, x| \leq \varepsilon_0 \langle Re\, x\rangle\}$ et y vérifie : $|V(x)| = 0(\langle x\rangle^{-\rho})$.

(1.3) $V_s(x)$ est un potentiel à support compact tel que $V_s(\Delta + i)^{-1}$ est compact.

Théorème 1.1.— *Sous les hypothèses (1.2),(1.3), il existe un voisinage complexe U de $\mathbf{R}^+_-$ indépendant de h tel que :*

- *si $\rho < 1$, $S(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement en λ dans U comme opérateur de $G^s(S^{n-1})$ dans $G^s(S^{n-1})$ et de $G^s(S^{n-1})'$ dans $G^s(S^{n-1})'$ pour tout $s \in]1,(1-\rho)^{-1}[$.*
- *si $\rho = 1$, $S(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement en λ dans U comme opérateur de $C^\infty(S^{n-1})$ dans $C^\infty(S^{n-1})$ et de $D'(S^{n-1})$ dans $D'(S^{n-1})$.*
- *les résidus de $S(\lambda)$ en un pôle λ_0 sont de rang fini et ont des noyaux analytiques sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$.*
- *le noyau de $S(\lambda)$ est analytique pour $(\omega,\omega') \in S^{n-1} \times S^{n-1}, \omega \neq \omega'$.*

Corollaire 1.2.— *Les pôles de $S(\lambda)$ sont parmi les résonances de H.*

Remarque :

- Agmon et Klein ont étudié ce problème pour un potentiel V à symétrie sphérique. Dans ce cas $S(\lambda)$ se diagonalise sur la base des harmoniques sphériques Y_ℓ^m et la croissance des valeurs propres de $S(\lambda)$ est en $\exp(\ell^{1-\rho})$, ce qui correspond exactement à l'indice critique $s = \frac{1}{1-\rho}$ dans le théorème 1.1.
- La notion de résonances utilisée est celle obtenue par la méthode des distortions analytiques de Hunziker [Hu]. D'après Helffer-Martinez [He-Ma] ces résonances sont les mêmes que celles définies par Helffer et Sjöstrand dans le cas semi-classique. (voir [He-Sj]).

Exemple : Considérons le hamiltonien d'un électron dans une molécule avec des noyaux fixes (i.e. de masse très grande par rapport à celle de l'electron). $H = \frac{-h^2}{2m}\Delta + \sum_1^N a_i(x-r_i)^{-1}$. Notre théorème s'applique à ce hamiltonien.

Idée de la démonstration :

On utilise la formule de représentation démontrée par Isozaki-Kitada dans [I-K2] pour $\lambda \in \mathbf{R}^+_*$:

(2.1)

$$\begin{aligned} S(\omega,\omega',\lambda,h) &= \delta(\omega-\omega') - 2i\pi\lambda^{n/2-1}(2\pi h)^n \times \\ &\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(\varphi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega')-\varphi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega))/h} t_2(x,\sqrt{\lambda}\omega',h)\bar{a}_1(x,\sqrt{\lambda}\omega,h)dx \\ &+ 2i\pi\lambda^{n/2-1}(2\pi h)^{-n}\times \\ &\int_{\mathbf{R}^n} R(\lambda+i0)(e^{i\varphi_2(.,\sqrt{\lambda}\omega')/h}t_2(.,\sqrt{\lambda}\omega',h))e^{-i\varphi_1(x,\sqrt{\lambda}\omega)/h}\bar{t}_1(x,\sqrt{\lambda}\omega,h)dx\,. \end{aligned}$$

Ici - $\varphi_1(x,\xi)$ et $\varphi_2(x,\xi)$ sont des solutions de l'équation eikonale $(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2 + V_L(x) = \xi^2$ dans des régions entrantes et sortantes de l'espace des phases du type $\Gamma = \{(x,\xi) \in T^*(\mathbf{R}^n) \mid |x| \geq R\,,\ |\xi| \geq d\,,\quad x.\xi \leq \sigma_i^-|x||\xi| \quad \text{ou} \quad x.\xi \geq \sigma_i^+|x||\xi|\}$. De plus $\varphi_i(x,\xi)$ est asymptotique à $x.\xi$ à l'infini, au sens que :

$$|D_x^\alpha(\varphi_i(x,\xi) - x.\xi)| \leq C_\alpha < x >^{1-\rho-|\alpha|}\,.$$

- $a_1(x,\xi,h)$ est un symbole solution des équations de transport $2\nabla_x\varphi.\nabla_x a_1 + \Delta_x\varphi_1 a_1 + ih\Delta_x a_1 = 0$ dans des régions du type de Γ. Ces phases et amplitudes sont utilisées par

Isozaki-Kitada pour construire des modificateurs J_i sous la forme :

$$J_i u(x,h) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(\varphi_i(x,\xi)-y.\xi)/h} a_i(x,\xi,h) u(y) dy\, d\xi.$$

J_i vérifie $HJ_i - J_i H_0 = T_i$ avec :

$$T_i u(x,h) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(\varphi_i(x,\xi)-y.\xi)/h} t_i(x,\xi,h) u(y) dy\, d\xi\,.$$

De plus le support essentiel de t_1 (resp.t_2) est inclus dans une région $\{x.\xi \leq \sigma_1^- |x|.|\xi|\}$ avec $\sigma_1^- < 0$ (resp.$\{x.\xi \geq \sigma_2^+ |x|.|\xi|\}$ avec $G_2^+ > 0$).

- Enfin $R(\lambda + i0)$ désigne la valeur au bord de la résolvante $R(\lambda) = (H-\lambda)^{-1}$ à partir du 1/2 plan supérieur.

Ecrivons $S(\omega,\omega',\lambda,h) = \delta(\omega-\omega') + f(\omega,\omega',\lambda,h) + g(\omega,\omega',\lambda,h)$ où g est le terme de (2.1) où figure $R(\lambda + i0)$.

La démonstration se décompose en plusieurs étapes :

(On renvoie à [Ge-Ma2] pour les détails).

Etape 1 : On va supposer pour simplifier les notations que $V_s = 0$. Sous l'hypothèse (1.2), on montre que on peut construire les phases φ_i et les symboles a_i dans des voisinages complexes de Γ de la forme

$$\Gamma^{\mathbf{C}} = \Big\{ (x,\xi) \in T^*\mathbf{C}^n \mid |Re\, x| \geq R\,,\ Re\, x.Re\, \xi \leq \sigma_1^- |Re\, x|\ |Re\, \xi|$$
$$\text{ou}\quad Re\, x.Re\, \xi \geq \sigma_1^+ |Re\, x|\ |Re\, \xi|, \quad |Im\, \xi| \leq \varepsilon_0, \quad |Im\, x| \leq \varepsilon_0 \langle Re\, x\rangle \Big\}.$$

Un point essentiel est de montrer que $a(x,\xi,h) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x,\xi)h^k$ peut être construit comme un symbole analytique i.e. vérifiant $|a_k(x,\xi)| \leq C^{k+1}k^k\langle x\rangle^{-k}$ sur $\Gamma^{\mathbf{C}}$. En prenant une réalisation holomorphe de a_i on voit que $t_i(x,\xi,h)$ est $0(e^{-\varepsilon_0 <x>/h})$ dans $\{Re\, x.Re\, \xi \geq \sigma_1^- |Re\, x|\ |Re\, \xi|\}$ pour $i=1$ et dans $\{Re\, x.Re\, \xi \leq \sigma_2^+ |Re\, x|\ |Re\, \xi|\}$ pour $i=2$, avec $\sigma_1^- < 0$, $\sigma_2^+ > 0$.

Dans la construction des a_i et t_i interviennent certaines troncatures homogènes de degré 0 que l'on prendra dans $\cap_s G^s(S^{n-1})$.

Etape 2 : prolongement de $g(\omega,\omega',\lambda,h)$

Pour prolonger λ on va employer une méthode due à Hunziker [Hu], la méthode des distortions analytiques :

pour μ réel $|\mu|$ assez petit, on pose : $U_\mu\varphi(x) = j_\mu(x)^{1/2}\varphi(x+\mu v(x))$, où $v(x) = x\chi(|x|)$, $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, $X = 0$ pour $|x| \leq R$, $X = 1$ pour $|x| \geq 2R$, où R est choisi assez grand, et $j_\mu(x)$ est le Jacobien de $x \mapsto x + \mu v(x)$.

U_μ est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ et $U_\mu H U_\mu^{-1}$ se prolonge analytiquement en μ comme opérateur sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ de domaine $H^2(\mathbf{R}^n)$ pour μ complexe $|\mu|$ assez petit.

On note $R_\mu(\lambda) = (U_\mu H U_\mu^{-1} - \lambda)^{-1}$ sa résolvante, qui est définie et méromorphe pour λ complexe $|Im\,\lambda| << |Im\,\mu|$. les pôles de $R_\mu(\lambda)$ sont précisément les résonances de H.

Dans (2.1), on écrit alors pour μ réel :

$$\begin{aligned}&\langle R(\lambda+i0)e^{i\varphi_2}t_2, e^{i\varphi_1}t_1\rangle = \\ &\langle U_\mu^{-1}R_\mu(\lambda+i0)U_\mu e^{i\varphi_2}t_2, e^{i\varphi_1}t_1\rangle = \langle R_\mu(\lambda+i0)U_\mu e^{i\varphi_2}t_2, U_{\bar\mu}e^{i\varphi_1}t_1\rangle\ .\end{aligned} \tag{2.2}$$

Pour donner un sens à $U_\mu(e^{i\varphi_2}t_2)$ et $U_{\bar\mu}(e^{i\varphi_1}t_1)$ pour μ complexe on utilise le fait que φ_i et a_i sont holomorphes en $|x|$ et $|\xi|$ dans une région $\{Re|x| \geq R/2,\ Im|x| \leq \varepsilon Re|x|\}$.

De plus comme t_2 est essentiellement supporté dans $Re\,x.Re\,\xi \geq \sigma_2^+|Re\,x|\ |Re\,\xi|$ et que $\varphi_2 = x.\xi + 0(< x >^{1-\rho})$ on voit que $U_\mu\left(e^{i\varphi_2(x,\sqrt{\lambda}\omega)/h}t_2(x,\sqrt{\lambda}\omega,h)\right) = 0(e^{-\varepsilon<x>/h})$ uniformément pour $\omega \in S^{n-1}$ et pour $|Im\,\lambda| << Im\,\mu$.

On a le même résultat pour $U_{\bar\mu}\left(e^{i\varphi_1}t_1\right)$ ce qui donne un sens à (2.2) pour λ complexe.

En suivant une suggestion de Bony, on peut remplacer les fonctions troncatures intervenant dans t_1 et t_2 par des fonctions à support compact dans une classe non quasi-analytique arbitraire, ce qui montre que les résidus de $g(\omega,\omega',\lambda,h)$ en un pôle λ_0 sont des fonctions analytiques sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

Etape 3 : Prolongement de $f(\omega,\omega',\lambda,h)$

L'existence d'un prolongement pour $f(\omega,\omega',\lambda,h)$ comme opérateur de $G^s(S^{n-1})$ dans $G^s(S^{n-1})$ et de $G^s(S^{n-1})'$ dans $G^s(S^{n-1})'$ provient facilement des résultats de continuité dans les classes de Gevrey des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre infini.

Pour $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$, on écrit :

$$f(\omega,\omega',\lambda,h) = \int e^{i(\sqrt{\lambda}(\omega'-\omega)x + 0(<x>^{1-\rho})/h}\bar a_1(x,\sqrt{\lambda}\omega,h)t_2(x,\sqrt{\lambda}\omega',h)dx.$$

En négligeant les termes qui viennent du fait que a_1 et t_2 sont nuls pour x près de 0, on se ramène par un changement de variable à :

$$f = \int e^{i(\omega'-\omega)y/h}e^{0(<y>^{1-\rho})/h}\bar a_1(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega,h)t_2(\lambda^{-1/2}y,\lambda^{1/2}\omega',h)dx.$$

où le $0(< y >^{1-\rho})$ reste imaginaire pur. Pour λ complexe le $0(< y >^{1-\rho})$ a une partie réelle non nulle. Il suffit maintenant de le considérer comme une amplitude et d'utiliser par exemple les résultats de Cattabriga-Zanghirati [Ca-Za] pour vérifier que f est continu de $G^s(S^{n-1}) \to G^s(S^{n-1})$ et de $G^s(S^{n-1})' \to G^s(S^{n-1})'$ pour $0 < s < (1-\rho)^{-1}$.

Problèmes ouverts :

- En utilisant ce résultat, un problème intéressant est de démontrer rigoureusement la validité des formules de Breit-Wigner sur la section totale de diffusion par exemple dans le cas des résonances de forme. Dans [Ge-Ma1], nous avons montré la validité de ces formules en ce qui concerne la fonction spectrale de H.
- Un autre problème intéressant (et certainement difficile) est d'étudier les propriétés analytiques des matrices de scattering pour des systèmes à N-corps. Le cas des potentiels à longue portée et celui des énergies assez élevées pour permettre des décompositions en plus de deux corps est pratiquement ouvert.

Bibliographie

[Ag-Co] J. Aguilar, J.M. Combes. A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger hamiltonians, Comm. Math. Phys. 22 (1971) p.269- 279.

[Ag-Kl] S. Agmon, M. Klein. Communication personnelle.

[B1] E. Balslev. Analytic scattering theory for two-body Schrödinger operators, J. Functional Anal. 29 (1978), 375-396.

[B2] E. Balslev. Local spectral deformation techniques for Schrödinger operators J. Functional Anal. 58 (1984), 79-105.

[Ba-Co] E. Balslev, J.M. Combes. Spectral theory of many-body Schrödinger operators with dilation-analytic interactions, Comm. Math. Phys. 22 (1971) 280-294.

[Ca-Za] L. Cattabriga, L. Zanyhirati. Fourier integral operators of infinite order on Gevrey spaces. Applications to the Cauchy problem for hyperbolic operators in Advances in Microlocal Analysis Série C. Vol. 168. Nato ASI Series.

[Cy] H.L. Cycon. Resonances defined by modified dilations, Helv. Phys. Acta 58 (1985) p.969-981.

[De] J. Derezinski. Existence and analyticity of many-body scattering amplitudes at low energies, J. Math. Phys. 28 (1984) p.1080-1088.

[Ge-Ma1] C. Gérard, A. Martinez. Semiclassical asymptotics for the spectral function of long range Schrödinger operators, soumis à J. Functional Anal.

[Ge-Ma2] C. Gérard, A. Martinez. Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée. Manuscrit.

[He-Ma] B. Helffer, A. Martinez. Comparaison entre les diverses notions de résonances, à paraitre dans Helv. Phys. Acta.

[He-Sj] B. Helffer, J. Sjöstrand. Résonances en limite semiclassique, Bull. de la S.M.F. mémoire no24/25 114 (1986).

[Ho] L. Hörmander. The analysis of linear partial differential operators IV Springer Verlag (1984).

[Hu] W. Hunziker. Distortion analyticity and molecular resonances curves, Ann. I.H.P. section A (1986).

[I.K1] H. Isozaki, H. Kitada. Modified wave operators with time independent modifiers, J. Fac. Sci. Tokyo Univ. Sect.IA 32 (1985) p.77-104.

[I.K2] H. Isozaki, H. Kitada. Scattering matrices for two-body Schrödinger operators, Scientific Papers of the College of Arts and Sciences, Tokyo Univ. 35 (1985) p.85-107.

[Je] A. Jensen. Local distortion technique, resonances and poles of the S-matrix, J. Math. Anal. Appl. 59 (1977) p.505-513.

[La-Li] L. Landau, E. Lifchitz. Mécanique quantique Editions Mir (1967).

[S.T] N. Shenk, D. Thoe. Resonant states and poles of the scattering matrix for perturbations of $-\Delta$, J. Math. Anal. Appl. 37 (1972) p.467-491.

[Si1] B. Simon. The definition of molecular resonance curves by the method of exterior complex scaling, Phys. Lett. 71 A (1979) p.211-214.

[Si2] B. Simon. Resonances in N-body quantum systems with dilation analytic potentials and the foundation of time dependent perturbation theory, Ann. Math. 97 (1973) p.247-272.

Ch. GERARD
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU CEDEX