Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

E. Andronikof

Microlocalisation tempérée. Application aux distributions holonomes sur une variété complexe

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 2, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A2_0>

CENTRE DE MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MICROLOCALISATION TEMPEREE APPLICATION AUX DISTRIBUTIONS HOLONOMES SUR UNE VARIETE COMPLEXE

E. ANDRONIKOF

Exposé n°II

20 Octobre 1987

Résumé

Soit X une variété complexe lisse. Le foncteur $T-\mu\,\mathcal{H}om(\bullet,\mathcal{O}_X)$ version microlocale du foncteur $RH(\bullet)$ de Kashiwara est la version à croissance du foncteur $\mu\,\mathcal{H}om(\bullet,\mathcal{O}_X)$ de Kashiwara et Schapira et permet de construire les analogues tempérés des objets de [S-K-K] avec leurs opérations. Les transformations canoniques opérent sur $T-\mu\,\mathcal{H}om(\bullet,\mathcal{O}_X)$. On montre alors que ces dernières permettent de microlocaliser le foncteur de conjugaison de Kashiwara pour en déduire que le front d'onde d'une distribution u sur X qui est solution d'un $\mathcal{D}_X$-module holonôme régulier coïncide avec la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X u$.

0 -Introduction

0.1

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. On désigne par $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels, Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximum, $\bar{X}$ la variété conjuguée de X, $X_{\mathbf{R}}$ la variété analytique réelle sous-jacente.

Martineau [Ma] avait remarqué que le complexe de Dolbeault des distributions à support dans un sous-ensemble analytique fermé Z calculait la cohomologie à croissance à support dans Z des fonctions holomorphes, en d'autres termes

$$R\Gamma_{[Z]}\mathcal{O}_X = \Omega_{\bar{X}} \underset{\mathcal{D}_{\bar{X}}}{\overset{L}{\bigotimes}} \Gamma_Z \mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}[-n] \tag{0.1}$$

où $\mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}$ désigne le faisceau des distributions sur $X_{\mathbf{R}}$. Supposons d'autre part que X soit complexifié d'une sous-variété M. Martineau a également essentiellement donné la formule

$$\mathcal{D}b_M = R\Gamma_{[M]}\mathcal{O}_X \otimes \mathrm{or}_M[-n] \mid M \ , \tag{0.2}$$

où or_M est le faisceau d'orientation de M, et où $R\Gamma_{[M]}\mathcal{O}_X$ se définit, par exemple, par des cocycles de fonctions holomorphes à croissance lente dans des tubes s'appuyant sur M, ou encore par la formule

$$R\Gamma_{[M]}\mathcal{O}_X = \Omega_{\bar{X}} \underset{\mathcal{D}_X}{\overset{L}{\bigotimes}} \Gamma_M \mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}[-n]. \tag{0.3}$$

Plus généralement, Kashiwara a construit $[K1], [K2]$, pour les besoins de la correspondance de Riemann-Hilbert un foncteur $RH_X(\bullet)$ et des opérations qui réalisent le cadre général pour l'étude de la cohomologie à croissance, et que l'on rappelle ci-dessous.

0.2

Soit M une variété analytique réelle, $D^b_{\mathbf{R}-c}(M)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbf{C}$-vectoriels sur M à cohomologie $\mathbf{R}$-constructible, $D^b(\mathcal{D}_M)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de $\mathcal{D}_M$-modules. Le foncteur triangulé (contravariant) $TH_M(\bullet) : D^b_{\mathbf{R}-c}(M) \to D^b(\mathcal{D}_M)$ est caractérisé par les propriétés suivantes :

(i) $\forall K$ fermé sous-analytique de M on a $TH_M(\mathbf{C}_K) = \Gamma_K \mathcal{D}b_M$

(ii) $\forall \Omega$ ouvert sous-analytique de M et $\forall U$ ouvert de M on a

$R\Gamma\,(U; TH_M(\mathbf{C}_\Omega)) = \mathcal{S}'_U(U \cap \Omega)$ l'espace des distributions sur $U \cap \Omega$ prolongeables à U.

0.3

Si X est une variété analytique complexe, le foncteur $RH_X(\bullet) : D^b_{\mathbf{R}-c}(X_{\mathbf{R}}) \to D^b(\mathcal{D}_X)$ est défini par $RH_X(F) = \Omega_{\bar{X}} \otimes^L_{\mathcal{D}_{\bar{X}}} TH_{X_{\mathbf{R}}}(F)[-n]$.

Alors, pour tout sous-ensemble sous-analytique fermé K de X on pose $R\Gamma_{[K]}\mathcal{O}_X = RH_X(\mathbf{C}_K)$ et cette définition est compatible aux formules (0.1) et (0.3).

Si $f : Y \to X$ est un morphisme de variétés complexes (lisses), on a le théorème fondamental d'image directe.

Théorème (Kashiwara [K2]).— *Soit $F \in \mathrm{Ob}(D^b_{\mathbf{R}-c}(Y_{\mathbf{R}}))$ tel que f soit propre sur supp F. On a un isomorphisme canonique*

$$Rf_* \left(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \bigotimes^L_{\mathcal{D}_Y} RH_Y(F) \right) [\dim_{\mathbf{C}} Y] \simeq RH_X(Rf_* F)[\dim_{\mathbf{C}} X].$$

Alors si M est une variété analytique réelle de complexifié X et si j désigne l'injection $j : M \hookrightarrow X$ on a pour tout $F \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(M)\right)$,

$$TH_M(F) \simeq RH_X(j_* F) \otimes \mathrm{or}_M[n] \mid_M ,$$

et pour $F = \mathbf{C}_M$ on retrouve la formule (0.2).

C'est le foncteur $RH_X(\bullet)$ que l'on a microlocalisé dans [A1] sur le modèle des constructions “sans condition de croissance” de [K-S1].

1. Microlocalisation à croissance [A1]

Soit X une variété analytique complexe de dimension $\dim_C X = n$, et soit $F \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(X_{\mathbf{R}})\right)$.

Si Y est une sous-variété complexe de X on pose

$$(1.1) \qquad T-\mu_Y RH_X(F) \overset{\text{def}}{=} s^{-1}\left(\mathcal{D}_{X\leftarrow\tilde{X}} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}{\bigotimes}} RH_{\tilde{X}}(p^! F_\Omega)\right)[1].$$

où $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ est la déformation au cône normal le long de Y, s l'immersion $s : T_Y X \hookrightarrow \tilde{X}$ et $\Omega = z^{-1}(\mathbf{R}_+ \setminus \{0\})$, où z est la coordonnée complexe de $\tilde{X}$.

Soient q_j la j-ième projection de $X \times X$ et $\Delta = \Delta_X$ la diagonale de $X \times X$. On pose

$$(1.2) \qquad T-\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{X \xleftarrow{q_1} X\times X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{X\times X}}{\bigotimes}} T-\mu_\Delta RH_{X\times X}(q_2^{-1}F)[n],$$

ce qui définit un foncteur (contravariant)

$$T-\mu\, \mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{O}_X) : D^b_{\mathbf{R}-c}(X_{\mathbf{R}}) \to D^b_{\text{coni}}(T^* X_{\mathbf{R}})$$

où $D^b_{\text{coni}}(T^* X_{\mathbf{R}})$ désigne la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux sur T^*X à cohomologie $\mathbf{R}^\times$ -conique. $T-\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$ est aussi un objet de la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$-Modules, où π désigne $\pi : T^*X \to X$.

Rappelons alors que

$$(1.3) \qquad \mathrm{supp}(T-\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)) \subset SS(F)$$

où $SS(F)$ désigne le micro-support de F ([K-S]).

$$(1.4) \qquad T-\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)\,|_{T^*_X X} \simeq RH_X(F),$$

qu'on a un triangle de Sato

$$(1.5) \qquad F^* \otimes \mathcal{O}_X \to RH_X(F) \to R\mathring{\pi}_*\, T-\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{+1}$$

où $\mathring{\pi} = \pi\,|_{\mathring{T}^* X}$ $(\mathring{T}^* X = T^*X \setminus T^*_X X)$, et $F^* = R\,\mathcal{H}om_{\mathbf{C}_X}(F, \mathbf{C}_X)$, et un morphisme canonique

$$(1.6) \qquad T-\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \to \mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$$

où $\mu\, \mathcal{H}om(\bullet, \bullet)$ est le foncteur de Kashiwara - Schapira (loc. cit).

Si M est une sous-variété réelle de X on pose

$$(1.7) \qquad T-\mu_M \mathcal{O}_X \overset{\text{def}}{=} T-\mu\, \mathcal{H}om(\mathbf{C}_M, \mathcal{O}_X)$$

dont le germe en $p \in T^*_M X$ est $(T-\mu_M \mathcal{O}_X)_p = \varinjlim \{H^j_{[Z]}\mathcal{O}_{X,x}\ ; x=\pi(p),\ Z$ fermé sous-analytique de X tel que $C_M(Z)_x \subset \{v \in (T_M X)_x\ ; \langle v, p\rangle > 0\} \cup \{0\}\}$. Si X s'identifie à un complexifié de M, alors $T-\mu_M \mathcal{O}_X$ est concentré en degré n (ce résultat est essentiellement dû à Martineau, mais on peut également le déduire des opérations, cf.[A2]), et on pose

$$(1.8) \qquad \mathcal{C}^f_M \overset{\text{def}}{=} H^n(T-\mu_M \mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{or}_M,$$

i.e. on retrouve le sous-faisceau de $\mathcal{C}_M$ des microfonctions tempérées.

Soit maintenant Z une sous-variété complexe de X de codimension d , alors $T-\mu_Z \mathcal{O}_X$ est concentré en degré d, et (1.6) induit une injection sur la cohomologie en degré d, et on pose

$$(1.9) \qquad \mathcal{C}^{\mathbf{R},f}_{Z|X} \overset{\text{def}}{=} H^d(T-\mu_Z \mathcal{O}_X)$$

qui est un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{C}^{\mathbf{R}}_{Z|X} = H^d(\mu_Z \mathcal{O}_X)$.

Le faisceau des opérateurs microlocaux tempérés est alors

$$(1.10) \qquad \mathcal{E}^{\mathbf{R},f}_X \overset{\text{def}}{=} \mathcal{C}^{\mathbf{R},f}_{\Delta|X\times X} \bigotimes_{q_2^{-1}\mathcal{O}_X} q_2^{-1}\Omega_X \quad \text{(cf. Paragraphe 2)} \quad .$$

2. Opérations - [A1],[A2] -

Soient X et Y deux variétés analytiques complexes.

(2.1) (Image directe).

Soit $f : Y \to X$ un morphisme analytique et $F \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(Y_{\mathbf{R}})\right)$. On suppose f propre sur supp$F$. Alors on a un morphisme canonique

$$(2.1.1) \qquad R\varpi_! \rho^{-1}\left(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\bigotimes_{\mathcal{D}_Y}} T-\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y)\right)[\dim_{\mathbf{C}} Y]$$
$$\to T-\mu\, \mathcal{H}om(Rf_* F, \mathcal{O}_X)[\dim_{\mathbf{C}} X]$$

On a désigné par ρ et ϖ les applications $T^*Y \overset{\rho}{\leftarrow} Y \underset{X}{\times} T^*X \overset{\varpi}{\to} T^*X$.

(2.2) (Image inverse).

Soit $f\ :\ Y \to X$ un morphisme analytique et $F \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(X_{\mathbf{R}})\right)$. On a un morphisme canonique

$$(2.2.1)\qquad R\rho_! \left(\mathcal{D}_{Y\to X} \bigotimes^L_{\mathcal{D}_X} \varpi^{-1} T\!-\!\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \right) [dim_{\mathbf{R}} X]$$

$$\to T\!-\!\mu\, \mathcal{H}om(f^! F, \mathcal{O}_Y)[dim_{\mathbf{R}} Y]$$

(2.3) (Produit externe).

Soit $F \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(X_{\mathbf{R}})\right)$ et $G \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(Y_{\mathbf{R}}\right)$. On a un morphisme canonique

$$(2.3.1)\qquad T\!-\!\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \hat{\otimes} T\!-\!\mu\, \mathcal{H}om(G, \mathcal{O}_Y) \to T\!-\!\mu\, \mathcal{H}om(F \hat{\otimes} G, \mathcal{O}_{X\times Y})$$

où $\hat{\otimes}$ désigne, dans le terme de gauche, le produit tensoriel externe de $\mathcal{D}_{X\times Y}$-modules et, dans le terme de droite, le produit tensoriel externe de faisceaux ([S-K-K],[K-S1]).

(2.4) (Transformation à noyau intégral).

Notons q_1, q_2, p_1, p_2 les projections définies par les diagrammes $X \overset{q_1}{\leftarrow} X \times Y \overset{q_2}{\to} Y$ et $T^*X \overset{p_1}{\leftarrow} T^*(X\times Y) \overset{p_2}{\to} T^*Y$

On se donne

U un ouvert de $T^*(X\times Y)$

Λ une sous-variété lagrangienne complexe de U

$K \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(X_{\mathbf{R}} \times Y_{\mathbf{R}})\right)$

tels que

$p_{1|\Lambda}$ est une immersion $\Lambda \to T^*X$

q_1 est propre sur supp$K$

$SS(K) \cap U \subset \Lambda$

(cette dernière condition impliquant que K est microlocalement isomorphe à un objet $\mathbf{C}$ -constructible, localement sur U ([K-S1])). Pour tout $F \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(Y_{\mathbf{R}})\right)$ on a un morphisme canonique

$$(2.4.1)\qquad Rp_{1*}\left(T\!-\!\mu\, \mathcal{H}om\left(K[-m], \Omega^{(0,m)}_{X\times Y}\right) \otimes p_2^{-1} T\!-\!\mu\, \mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y)\right)$$

$$\to T\!-\!\mu\, \mathcal{H}om\left(\Phi_K(F), \mathcal{O}_X\right)$$

où $m = \dim_{\mathbf{C}} Y$, $\Omega^{(0,m)}_{X\times Y}$ est le faisceau des formes holomorphes de type $(0,m)$ sur $X\times Y$, et où $\Phi_K(F) \overset{\mathrm{def}}{=} Rq_{1!}(K \otimes q_2^{-1} F)$.

La flèche 2.4.1 résulte aussitôt des opérations de 2.1, 2.2 et 2.3 .

2.5 De ces opérations résultent celles à la [S-K-K] sur les microfonctions tempérées et les microfonctions holomorphes tempérées. Rappelons en particulier que :

$\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R}}$

$\gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f} = \mathcal{E}_X$ où γ désigne $\gamma : T^*X \to T^*X/\mathbf{C}^\times$

$T\!-\!\mu\,\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ -Module à gauche, plus précisément, si on fait $Y = X$ et $K = \mathbf{C}_\Delta$ dans (2.4.1) on trouve une flèche

$$\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f} \otimes T\!-\!\mu\,\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X) \to T\!-\!\mu\,\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$$

qui induit une structure de $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ -Module sur $H^j(T\!-\!\mu\,\mathcal{H}om\,(F, \mathcal{O}_X))$, $\forall j$. Par exemple $\mathcal{C}_M^f$ et $\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R},f}$ (notations de (1.8) et (1.9)) sont des $\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ -Modules.

Signalons également que

$\mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{E}_X$,

$\mathcal{C}_{Z|X}^{\mathbf{R},f} = \mathcal{E}_X^{\mathbf{R},f} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{C}_{Z|X}$.

2.6 Transformations canoniques.

Les transformations canoniques quantifiées de [S-K-K] ont été étendues par Kashiwara-Schapira en une opération sur $\mu\,\mathcal{H}om(\bullet, \mathcal{O}_X)$ [K-S1] ; l'énoncé ci-dessous en fournit une version tempérée.

Soient X une variété analytique complexe, Y un autre exemplaire de X, U_X(resp.U_Y) un ouvert de T^*X (resp.T^*Y) et φ : $U_Y \xrightarrow{\sim} U_X$ une transformation canonique. Soit $\tilde{\varphi}$ une "quantification" de φ

$$\tilde{\varphi} : \varphi_*\mathcal{E}_{Y|U_Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{X|U_X}$$

définie par la correspondance $P \mapsto (Q$ tel que $Ps = sQ)$ où s est une section simple de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{Y\times X}} \Omega_{Y\times X}^{(n,0)}$, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_{Y\times X}$ -Module holonôme simple porté par la lagrangienne Λ associée à φ.

Soit $p = (p_Y, p_X^a) \in \Lambda$, où a est l'application antipodale de T^*X, et soit $K \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(Y_{\mathbf{R}} \times X_{\mathbf{R}})\right)$ un objet simple de décalage 0 le long de Λ au voisinage de p au sens de [K-S1] (i.e. K est, microlocalement en p, isomorphe à un objet pervers).

Alors on a les isomorphismes de [K-S1]

$$\mathcal{E}^{\mathbf{R}}_{Y,p_Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\mathbf{R}}_{X,p_X} \tag{2.6.1}$$

$$\mu\,\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \xrightarrow{\sim} \mu\,\mathcal{H}om\left(\phi_{K[n]}F, \mathcal{O}_X\right)_{p_X} \tag{2.6.2}$$

pour tout $F \in \mathrm{Ob}\left(D^b_{\mathbf{R}-c}(Y_{\mathbf{R}})\right)$

Proposition 2.1.—

(i) L'isomorphisme (2.6.1) précédent induit un isomorphisme $\mathcal{E}^{\mathbf{R},f}_{Y,p_Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\mathbf{R},f}_{X,p_X}$

(ii) Pour tout $F \in \mathrm{Ob}(D^b_{\mathbf{R}-c}(Y_{\mathbf{R}})$ *on a un isomorphisme canonique*

$$T\!-\!\mu\,\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \xrightarrow{\sim} T\!-\!\mu\,\mathcal{H}om\left(\phi_{K[n]}(F), \mathcal{O}_X\right)_{p_X}$$

compatible à (2.6.2).

La flèche (ii) résulte de (2.4.1) et c'est un isomorphisme parce que $T-\mu\,\mathcal{H}om(F,\mathcal{O}_Y)$ est un $\mathcal{E}_Y$ -Module. L'isomorphisme du (i) résulte d'une version de (ii) à paramètres dans une variété complexe Z. Les détails paraîtront ailleurs.

Corollaire 2.2.— *Soit Z une sous-variété complexe de X. Notant γ l'application $\overset{\circ}{T^*_Z} X \to \mathbf{P}^*_Z X$, on a*

$$R^j\gamma_* \mathcal{C}^{\mathbf{R},f}_{Z|X} = 0 \quad \forall j > 0.$$

Démonstration. Par transformation canonique, on peut supposer que Z est une hypersurface (transformation de Legendre), alors l'isomorphisme $\mathbf{P}^*_Z X \simeq Z$ identifie γ à $\overset{\circ}{\pi} : \overset{\circ}{T^*_Z} X \to Z$ et l'assertion $R^j\,\overset{\circ}{\pi}{}^*\,\mathcal{C}^{\mathbf{R},f}_{Z|X} = 0\ \forall j > 0$ résulte du triangle de Sato (1.5).

La remarque suivante sera utile au Paragraphe 3.

Remarque 2.3.- On garde les notations de la Proposition 2.1.

Soit $s \in H^0\left(T-\mu\,\mathcal{H}om(K,\Omega^{(n,0)}_{Y\times X})\right)_p$ définissant la quantification de la transformation canonique φ.

Considérons la transformation canonique complexe

$$\phi :\ U_Y \times U_Y \subset T^*(Y\times\bar{Y}) \longrightarrow U_X \times U_X \subset T^*(X\times\bar{X})$$

associée à la lagrangienne

$\Lambda\times\Lambda \subset T^*(Y\times X\times\bar{Y}\times\bar{X}) \simeq T^*(Y\times\bar{Y}\times X\times\bar{X})$. Regardant $s\otimes s$ comme une section de $T-\mu\,\mathcal{H}om\left(K\hat{\otimes}K,\Omega^{(n,n,0,0)}_{Y\times\bar{Y}\times X\times\bar{X}}\right)_{(p,p)}$ (cf. (2.3.1)), on définit une transformation canonique quantifiée

$$\tilde{\phi} :\ \mathcal{E}^{\mathbf{R},f}_{Y\times\bar{Y},(p_Y,p_Y)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\mathbf{R},f}_{X\times\bar{X},(p_X,p_X)}$$

qui est par définition la complexifiée de $\tilde{\varphi}$.

On identifie $\mathcal{E}_{X,p_X}$ (resp.$\mathcal{E}_{\bar{X},p_X}$) à un sous-anneau de $\mathcal{E}^{\mathbf{R},f}_{X\times\bar{X},(p_X,p_X)}$ par $X\times\bar{X}\to X$ (resp.$X\times\bar{X}\to\bar{X}$) et, comme d'habitude, on identifie $X\times\bar{X}$ à un complexifié de $X_{\mathbf{R}}$ (et on fait les identifications analogues avec Y à la place de X).

Alors, $\tilde{\phi}$ échange $\mathcal{C}^f_{Y_{\mathbf{R}},p_Y}$ et $\mathcal{C}^f_{X_{\mathbf{R}},p_X}$, d'une part, et $\mathcal{E}_{Y,p_Y}$ et $\mathcal{E}_{X,p_X}$ (resp. $\mathcal{E}_{\bar{Y},p_Y}$ et $\mathcal{E}_{\bar{X},p_X}$), d'autre part, avec compatibilité des opérations.

3. Conjugaison de Kashiwara et front d'onde de distributions holonômes régulières.

Soit X une variété analytique complexe. Une distribution u sur $X_{\mathbf{R}}$ est dite holonôme régulière si elle est localement solution d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonôme régulier, i.e. s'il existe, localement sur $X_{\mathbf{R}}$, un idéal cohérent $\mathcal{I}$ de $\mathcal{D}_X$ tel que $\mathcal{I}u = 0$ et que $\mathcal{D}_X/\mathcal{I}$ est holonôme régulier. L'intérêt de ce type de distribution réside dans le

Théorème 3.1 (Kashiwara [K3]).—

(i) Une distribution u est holonôme régulière si elle est localement solution d'un $\mathcal{D}_{\bar{X}}$-Module holonôme régulier.

(ii) Si u est une distribution holonôme régulière, alors $\mathcal{D}_X u$ est un $\mathcal{D}_X$-Module holonôme régulier.

(iii) Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-Module holonôme régulier, alors, localement sur X, il existe une distribution holonôme régulière u et un isomorphisme $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_X u$.

Exemples:

1) Soit $X = \mathbf{C}$, z une coordonnée holomorphe $\partial = \partial/\partial z$. On a

$$\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X z = \mathcal{D}_X\delta \ , \ \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X\partial z\partial = \mathcal{D}_X \operatorname{Log} z\bar{z}.$$

2) $X = \mathbf{C}^n$, $f \in \mathcal{O}_X$, $Z = f^{-1}(0)$. Alors pour $m >> 0$ on a $\mathcal{O}_X[*Z] \simeq \mathcal{D}_X vp\frac{1}{f^m}$ (cet exemple est emprunté à [B-K]).

Pour analyser les singularités analytiques microlocales des distributions holonômes régulières on paraphrase [K3] dans le cadre microlocal comme suit.

Soit γ l'application canonique $T^*X \to T^*X/\mathbf{C}^\times$. On définit le faisceau des microfonctions tempérées C-homogènes par $\tilde{\mathcal{C}}^f_X \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{C}^f_{X_{\mathbf{R}}}$. On a $\tilde{\mathcal{C}}^f_X \mid_{T^*_X X} = \mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}$ et $\overset{\circ}{\pi}_* \tilde{\mathcal{C}}^f_X = \mathcal{D}b_{X_{\mathbf{R}}}/\mathcal{A}_{X_{\mathbf{R}}}$ où $\mathcal{A}_{X_{\mathbf{R}}}$ désigne le faisceau des fonctions analytiques réelles sur $X_{\mathbf{R}}$. Soit U un ouvert de T^*X et u une section de $\tilde{\mathcal{C}}^f_X$ définie sur U. On dira que u est holonôme régulière si elle est, localement sur U, solution d'un $\mathcal{E}_X$-Module holonôme régulier.

Théorème 3.2.—

(i) u est holonôme régulière si elle est, localement sur U, solution d'un $\mathcal{E}_{\bar{X}}$-Module holonôme régulier.

(ii) Si u est holonôme régulière, alors $\mathcal{E}_X u$ est un $\mathcal{E}_X$-Module holonôme régulier.

(iii) Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-Module holonôme régulier défini sur U, alors localement sur U, il existe une section v de $\tilde{\mathcal{C}}^f_X$ et un morphisme $\mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_X v$.

Idée de la démonstration : On définit l'analogue microlocal du foncteur de conjugaison C_X de Kashiwara [K3] en posant, pour tout $\mathcal{E}_X$-Module holonôme régulier $\mathcal{M}$,

$$\tilde{C}_X(\mathcal{M}) \stackrel{\text{def}}{=} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}}^f_X) \ , \qquad (\text{on a } \tilde{C}_X \mid_{T^*_X X} = C_X).$$

Comme les transformations canoniques C-homogènes - complexifiées et quantifiées comme dans la Remarque 2.3 - opèrent sur $\tilde{C}_X(\mathcal{M})$, on peut placer la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ en position générique en un point $p \in \overset{\circ}{T}{}^* X$. [K-K], [Bj], et on est ramené à la situation de Kashiwara.

Soit maintenant u une distribution holonôme régulière et soit $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X u$. On note $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}$ la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ et $WF_A(u)$ le spectre singulier de Sato (front d'onde analytique) de u.

Théorème 3.3.— $WF_A(u) = \mathrm{Car}\,\mathcal{M}$.

Idée de la démonstration :

1) L'inclusion $WF_A(u) \subset \mathrm{Car}\,\mathcal{M}$ est claire.
2) On montre que $WF_A(u)$ rencontre toutes les composantes irréductibles de la partie régulière $(\mathrm{Car}\,\mathcal{M})_{\mathrm{reg}}$ de $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}$ en utilisant le Théorème 3.2. (ii).
3) On conclut en remarquant que $(\mathrm{Car}\,\mathcal{M})_{\mathrm{reg}} \cap WF_A(u)$ est ouvert dans $\mathrm{Car}\,\mathcal{M}$ par le théorème de propagation de [K-S2].

Bibliographie

[A1] Andronikof, E. : Microlocalisation des distributions et des fonctions holomorphes. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 303, série I, 347-350 (1986), t. 304, Série I, 511-514 (1987) et Thèse d'Etat Paris-Nord (Juin 1987).

[A2] Andronikof, E. : Article à paraître.

[B-K] Barlet, D - Kashiwara, M. : Le réseau L^2 d'un système holonôme régulier. Invent. math. 86, 35-62 (1986).

[Bj] Björk, J.-E. : Livre à paraître chez Academic Press.

[K1] Kashiwara, M. : Faisceaux constructibles et systèmes holonômes d'équations aux dérivées partielles à points singuliers réguliers. Sém. Goulaouic-Schwartz, 1979-80, exposé XIX.

[K2] Kashiwara, M. : The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., t. 20, 319-365 (1984).

[K3] Kashiwara, M. : Regular holonomic $\mathcal{D}$ -modules and distributions on complex manifolds. Adv. Stud. in pure Math., 8, 199-206 (1986).

[K-K] Kashiwara, M. - Kawaî, T. : On the holonomic systems of micro-differential equations, III. Systems with regular singularities. Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., t. 17, 813-979 (1981).

[K-S1] Kashiwara, M. - Schapira, P. : Microlocal Study of sheaves. Astérisque 128 (1985).

[K-S2] Kashiwara, M. - Schapira, P. : Micro-hyperbolic systems. Acta Math. 142, 1-55 (1979).

[Ma] Martineau, A. : Oeuvre de André Martineau. Publ. C.N.R.S. (1977).

[S-K-K] Sato, M. - Kashiwara, M. - Kawaï, T. : Hyperfunctions and pseudo-differential equations - in Lecture Notes in Math. 287, Springer- Verlag, 265-529 (1973).

E. ANDRONIKOF
Département de Mathématiques
et Informatique
C.S.P. Université Paris-Nord
93430 VILLETANEUSE

ERRATA

Exposé n°2 - 20 Octobre 1987 -

E. Andronikof

Microlocalisation tempérée,
applications aux distributions holonomes
sur une variété complexe

- p. II-3 : la formule (1.1) doit être remplacée par les deux lignes suivantes :

$$(1.1) \qquad T-\mu_Y RH_X(F) \overset{\text{def}}{=} s^{-1}\left(\mathcal{D}_{X\leftarrow\tilde{X}} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}{\bigotimes}} RH_{\tilde{X}}(p^! F_\Omega)\right)^{\wedge} [1],$$

où ( )^ désigne la transformation de Fourier-Sato et ..."

- p. II-4, ligne 3, lire : $H^j(T-\mu_M\mathcal{O}_X)_p$ au lieu de $(T-\mu_M\mathcal{O}_X)_p$.