

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MIKHAEL BALABANE

**États excités pour une équation de Dirac non linéaire.  
Méthode des « coefficients gelés »**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1987-1988), exp. n° 24,  
p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1987-1988\\_\\_A24\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988__A24_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 691.596 F

**Séminaire 1987-1988**

---

## ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ETATS EXCITES POUR UNE EQUATION  
DE DIRARC NON LINEAIRE  
METHODE DES "COEFFICIENTS GELES"

Mikhael BALABANE



## Etats excités pour une équation de Dirac non linéaire Méthode des "coefficients gelés"

Mikhael Balabane

RESUME Ces résultats ont été obtenus en collaboration avec T.Cazenave, A.Douady, et F.Merle. Les démonstrations complètes sont à paraître aux Comm.Math. Physics (1989).

On y montre l'existence d'une infinité d'états stationnaires pour l'équation de Dirac:  $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi + (\psi^* \psi)\psi = 0$ . L'analyse des états propres de cette équation, solutions séparables en coordonnées sphériques, se ramène à l'étude d'un système dynamique non autonome dans  $\mathbb{R}^2$ . Le nombre d'états propres est fourni par le nombre d'intersections de la variété stable de l'origine (pour ce système dynamique), avec la courbe des données initiales admissibles. L'étude fournit l'existence d'une infinité d'états stationnaires, indexés par le nombre de noeuds de la trajectoire des fonctions composantes.

### 1. INTRODUCTION.

L'équation linéaire suivante a été écrite par Dirac pour rendre compte des champs spinoriels dans  $\mathbb{R}^{1+3}$ . Elle n'a pas été dérivée à partir de lois de conservation, mais de lois d'invariance. Plus précisément, Dirac voulait décrire un phénomène invariant, comme l'équation des ondes, par translation, rotation, transformation de jauge, et transformation de Lorentz. Il ne disposait que d'une seule donnée de Cauchy physiquement fondée. Il est alors naturel de décrire le phénomène par une racine carrée de l'équation des ondes. Pour cela il montre que le système différentiel d'ordre minimum de carré égal au d'Alembertien est d'ordre quatre et s'écrit:

$$D_m \psi = \sum_0^4 i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi - m\psi = 0$$

où  $\psi$  est une fonction de  $\mathbb{R}^{1+3}$  dans  $\mathbb{C}^4$ ,  $x_0$  désigne la variable temporelle  $t$ , et  $x=(x_1, x_2, x_3)$  est la variable spatiale.  $m$  est un réel positif (la masse) et les matrices  $\gamma$  sont les matrices 4x4 de Pauli suivantes:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On a alors:

$$D_m D_{-m} = -(\partial_t^2 - \Delta + m^2)I_4$$

Si on cherche les non linéarités locales invariantes par les mêmes groupes de transformation, seuls deux types de non linéarités sont admissibles dont l'un s'écrit:

$$F(\bar{\psi}\psi)\psi \quad \text{avec} \quad \bar{\psi}\psi = (\gamma^0\psi, \psi)_{\mathbb{C}^4}$$

L'objet de cet exposé est l'équation de Dirac non linéaire:

$$(D) \quad \sum_0^4 i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi - m\psi = F(\bar{\psi}\psi)\psi$$

dans le cas où  $F=Id$  (modèle de Soler des Fermions, voir [4].) Les résultats restent vrais pour toute fonction  $F$  telle que  $F(0)=0$ ,  $F(\infty)=\infty$ ,  $F'>0$ .

Cette équation a été étudiée par J.M.Chadam [7], J.M.Chadam et R.T.Glassey [8], et Mme Choquet Bruhat-Christodoulou [9] dans le cas où  $m=0$ . Et dernièrement par Bachelot [10] et par Diaz-Figueira [11]. Leurs résultats fournissent l'existence globale d'une solution à petite donnée de Cauchy.

Par ailleurs, des physiciens théoriciens tels Ranada et Soler ont proposé des solutions de l'équation (D) qui joueraient le rôle de fonctions propres de l'opérateur linéaire: ce sont les états stationnaires, ou solutions localisées, de l'équation de Dirac, c'est à dire les solutions  $\psi$  de la forme  $\psi(t,x) = e^{-i\omega t} \varphi(x)$  où  $\varphi$  s'écrit en coordonnées sphériques  $(r,\theta,\phi)$  sous la forme:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} v(r) \\ 0 \\ iu(r)\cos\theta \\ ie^{i\phi}u(r)\sin\theta \end{bmatrix}$$

L'équation de Dirac se réduit alors pour les fonctions radiales  $u$  et  $v$  au système dynamique non autonome suivant:

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{du}{dr} = v(v^2 - u^2 - (m - \omega)) - \frac{2}{r}u \\ \frac{dv}{dr} = u(v^2 - u^2 - (m + \omega)) \end{cases}$$

Pour éliminer les solutions singulières à l'origine, il faut imposer la condition

$$(C1) \quad u(0) = 0$$

De plus, en vue d'obtenir des solutions de charge finie ( $\psi(t,.) \in L^2$ ), on impose la condition suivante:

$$(C2) \quad |u(r)| + |v(r)| \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad r \rightarrow \infty$$

La conjecture de Soler est que les solutions localisées introduisent une "quantification" de l'équation: plus précisément: l'ensemble des solutions de (D)-

(C1)-(C2) forment une suite indexée par la suite croissante  $v_n(0)$ . Un premier pas dans cette direction est d'établir l'existence d'une infinité discrète de solutions de (D)-(C1)-(C2). C'est l'objet du présent exposé.

Plus précisément, nous montrons l'existence d'une infinité de solutions (D)-(C1)-(C2) indexées par l'indice de  $(u,v)$  par rapport à l'origine, et correspondant à des données initiales, pour  $v$ , croissantes. Nous prouvons de plus que les données initiales admissibles sont majorées.

## 2. ENONCE DU RESULTAT.

Pour tout  $x$  donné,  $x > 0$ , il existe une solution locale  $(u_x, v_x)$  de (S) telle que  $u(0)=0$  et  $v(0)=x$ . Notons son domaine maximal d'existence par  $]0, R_x[$ . Le problème est de trouver les données initiales  $x$  telles que la solution correspondante soit globale (i.e.  $R_x = \infty$ ) et vérifie (C2). C'est un problème de tir, non autonome, plan.

Le résultat principal est le suivant:

**THEOREME :** *On suppose  $0 < \omega < m$ . Il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  croissante bornée de nombres positifs tels que, si nous notons  $(u_n, v_n)$  la solution de (S), (C1) telle que  $v_n(0) = x_n$ , alors pour tout  $n$  positif on a:*

- (i) *la solution  $(u_n, v_n)$  est globale,*
- (ii)  *$u_n$  et  $v_n$  ont exactement  $n$  zéros sur  $]0, +\infty[$ ,*
- (iii)  *$(u_n, v_n)$ , satisfait (C2) et converge exponentiellement vers  $(0,0)$  quand  $n$  tend vers l'infini.*

*Remarque 1 :* Le premier résultat d'existence de l'état fondamental (i.e. solution d'indice nul) pour l'équation de Dirac non linéaire est paru dans [2].

*Remarque 2 :* La condition  $\omega \in (0, m)$  est pratiquement nécessaire pour l'existence d'une solution (voir Remarque 4.2 dans [2]).

Nous supposons dans toute la suite que  $\omega \in (0, m)$

La démonstration détaillée du théorème est donnée dans [1]. Les difficultés essentielles proviennent bien sûr de la non linéarité, et du fait que le système est non autonome.

Les étapes essentielles de la démonstration sont les suivantes:

- D'abord l'étude qualitative des systèmes associés au système (S), associés en "gelant" la non autonomie : i.e. l'étude des systèmes  $(S_\rho)$  à coefficients constants obtenus à partir de (S) lorsque le coefficient variable aura été remplacé par une valeur constante égale à sa valeur pour la valeur  $\rho$  de la variable  $r$ . L'idée est que l'étude de (S) est qualitativement l'étude du mouvement le long de la "photographie"  $(S_\rho)$ , et la règle du jeu étant qu'il faut "changer de photographie" au cours du temps, pour décrire un mouvement suivant  $(S_\rho)$  au moment  $\rho$ . Les propriétés intéressantes sont les propriétés invariantes par rapport à  $\rho$ , et les valeurs de  $\rho$  pour lesquelles le système présente une bifurcation.

- Puis l'étude de (S) en utilisant les outils introduits par l'étude de  $(S_\rho)$ .

### 3. ETUDE DES SYSTEMES ( $S_\rho$ )

Pour tout  $\rho > 0$ , considérons le système autonome plan suivant:

$$(S_\rho) \quad \begin{cases} \frac{du}{dr} = v(v^2 - u^2 - (m - \omega)) - \frac{2}{\rho}u \\ \frac{dv}{dr} = u(v^2 - u^2 - (m + \omega)) \end{cases}$$

L'étude de ces systèmes montrera une bifurcation pour la valeur  $1/\omega$  de  $\rho$ , le système dynamique changeant de type topologique au passage de cette valeur.

Nous commençons par l'étude asymptotique (pour  $r$  tendant vers l'infini) du système ( $S$ ), qui est fournie par l'étude de ( $S_\infty$ ).

#### 3.1 ETUDE DE ( $S_\infty$ ):

Ce système s'écrit:

$$(S_\infty) \quad \begin{cases} \frac{du}{dr} = v(v^2 - u^2 - (m - \omega)) \\ \frac{dv}{dr} = u(v^2 - u^2 - (m + \omega)) \end{cases}$$

C'est un système Hamiltonien présentant trois points critiques. Le Hamiltonien associé est:

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(v^2 - u^2) - m(v^2 - u^2) + \omega(u^2 + v^2) \right]$$

Toutes les trajectoires sont périodiques, sauf les variétés stables-instables du point col, situé à l'origine.

L'allure des trajectoires est donnée par la figure 1.

#### 3.2 ETUDE DE ( $S_\rho$ ) pour $\rho > 1/\omega$

Le système présente trois points critiques à distance finie: un col à l'origine, et deux puits aux points  $u=0, v=(m-\omega)^{1/2}$  et  $u=0, v=-(m-\omega)^{1/2}$ . Le point à l'infini est un col.

Les variétés instables du col vont aux puits. Les variétés stables viennent de l'infini, en tournant autour de l'origine. (voir figure 2)

Toute trajectoire existe globalement. Elle est bornée et converge vers l'un des deux puits, sauf les trajectoires issues d'un point de la variété stable de l'origine.

Ces variétés stables partitionnent le plan en deux régions caractérisées par le puits vers lequel converge une trajectoire issue de cette région.

Toutes ces propriétés découlent du fait que toute trajectoire est bornée. La preuve de cette assertion réside dans les bornes des trajectoires fournies par:

- Les droites  $v=cte$  dans la région  $\{u < 0, v > 0 \text{ et } v^2 - u^2 > m + \omega\}$  et dans la région  $\{u > 0, v < 0 \text{ et } v^2 - u^2 > m + \omega\}$
- Les courbes  $H=cte$  dans la région  $\{v^2 - u^2 < m + \omega\}$
- Les courbes  $H^p=cte$  dans la région  $\{u > 0, v > 0 \text{ et } v^2 - u^2 > m + \omega\}$  et dans la région  $\{u < 0, v < 0 \text{ et } v^2 - u^2 > m + \omega\}$ . Ici  $H^p$  désigne le Hamiltonien du système Hamiltonien auxiliaire suivant:

$$(S^p) \quad \begin{cases} \frac{du}{dr} = v(v^2 - u^2 - (m - \omega)) - \frac{2}{\rho}v \\ \frac{dv}{dr} = u(v^2 - u^2 - (m + \omega)) \end{cases}$$

Les courbes  $H^p=cte$  sont bornées lorsque  $\rho > 1/\omega$ .

Ceci montre que toute trajectoire est bornée sur une portion faisant un tour autour de l'origine. On termine la preuve de la bornitude en constatant que le flot est contractant, car la divergence du champ est négative, égale à  $-2/\rho$

Les autres propriétés découlent de l'application de la théorie de Poincaré-Bendixson au système  $(S_p)$ .

### 3.3 ETUDE DE $(S_p)$ pour $\rho < 1/\omega$

Pour  $\rho < 1/\omega$ , le système  $(S_p)$  présente cinq points critiques à distance finie : Deux puits identiques à ceux du cas précédent, un col à l'origine, et deux nouveaux cols à distance finie situés sur l'hyperbole  $v^2 - u^2 = m + \omega$ , ayant bifurqué du point à l'infini. (voir figure 3)

La variété instable de l'origine converge vers les puits. La variété stable vient de l'infini.

Une demi variété instable de l'un des nouveaux cols converge vers l'un des puits. Le point essentiel est que l'autre demi variété instable tend vers l'infini en temps fini. (la démonstration de ce point étant identique à celle donnée en 4.1 ci dessous, nous ne la donnons pas ici) Les variétés stables de ces cols viennent de l'infini.

Une trajectoire telle que  $u(0)=0$  tendra asymptotiquement vers un puits si  $v(0)$  est inférieur au point d'intersection de  $u=0$  et de la variété stable d'un col situé sur l'hyperbole  $v^2 - u^2 = m + \omega$ . Elle tendra vers l'infini en temps fini si  $v(0)$  est supérieur à ce point d'intersection.

## 4. ETUDE DU SYSTEME (S)

### 4.1 REMARQUES PRELIMINAIRES:

Le système (S) changeant de type topologique à  $r=1/\omega$ , les deux lemmes suivants permettent de situer la trajectoire dans le plan, avant et après cette valeur. Pour cela, notons  $(u_x, v_x)$  la trajectoire pour le système (S) telle que  $u_x(0)=0, v_x(0)=x$ , et notons  $[0, R_x[$  son intervalle maximal d'existence.



Le lemme suivant montre que toute trajectoire vérifiant (C1) reste dans la région  $v > u$  pour un temps au moins égal à  $1/\omega$ . Il découle de l'expression de la dérivée le long de la trajectoire de  $(u-v)$  en un point où  $u=v$ .

*Lemme 1 . Soit  $x \neq 0$ . Supposons que pour  $r_0 > 0$ , nous ayons  $v_x(r_0) = u_x(r_0)$ . Alors  $r_0 > 1/\omega$ .*

Le lemme suivant montre que toute trajectoire vérifiant (C1) reste dans la région  $v^2 - u^2 > m + \omega$  un temps au plus égal à  $3/2\omega$ . Il découle de l'expression de la dérivée de  $v^2 - u^2$ .

*Lemme 2 . Soit  $x \neq 0$ . Supposons que nous ayons  $(u_x, v_x) \in \{v^2 - u^2 > m + \omega\}$ . sur  $[0, r[ \subset ]0, R_x[$ , Alors  $r < 3/2\omega$ .*

Le comportement asymptotique de certaines trajectoires globales est donné par les deux lemmes suivants:

*Lemme 3 . Soit  $x \neq 0$ . Supposons  $R_x = +\infty$ , et qu'il existe  $r_0 > 0$ , tel que  $lu_x| > 0$  sur  $[r_0, +\infty[$ . Alors*

(i)  $u_x v_x > 0$  sur  $]r_0, +\infty[$ ,

(ii) Il existe  $C$ , tel que  $0 < |u_x(r)| < |v_x(r)| < C \exp(-(1/2)(m-\omega)r)$ , pour  $r \in ]r_0, +\infty[$ .

*Lemme 4 . Soit  $x \neq 0$ . Supposons que  $R_x \geq 1/\omega$ , et que  $u_x$  a un nombre fini de zéros . Alors  $R_x = +\infty$ , et  $|u_x| + |v_x| \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow +\infty$ .*

#### 4.2 EXPLOSION A DISTANCE FINIE DE SOLUTIONS.

Nous montrons que pour  $v(0)$  assez grand, la solution du système (S) explose pour une valeur finie du paramètre  $r$ , en restant à l'intérieur de la région limitée par l'hyperbole:  $\{v^2 - u^2 > m + \omega\}$ . Ceci prouve l'existence d'une majoration a priori de l'ensemble des données initiales admissibles. Il prouve donc que la suite  $(u_n, v_n)$  introduite dans l'énoncé du théorème est bornée.

*Proposition 1 . Pour tout  $\tau > 0$ , il existe  $B(\tau)$  tel que :*

*si  $|x| \geq B(\tau)$ , alors  $R_x < \tau$  et  $v_x^2 - u_x^2 > m + \omega$  pour  $r \in ]0, R_x[$ .*

*Schéma de la preuve :* (voir figure 4) Nous construisons une région piège (pour  $0 < r < 1/\omega$ ) contenant le point à l'infini, contenue dans  $\{v^2 - u^2 > m + \omega\}$ , et que la solution doit avoir quitté pour  $r > 1/\omega$  (d'après le Lemme 2). Ceci entraîne l'explosion en temps fini (inférieur à  $1/\omega$ ) de toute trajectoire dont la région piège contient les données initiales.

On prend  $\tau > 0$ , tel que  $\tau\omega < 1$ , et soit  $(x_\tau, y_\tau)$  la solution du système algébrique:

$$y_\tau = \tau\omega x_\tau, \quad x_\tau^2 - y_\tau^2 = m + \omega, \quad x_\tau > 0.$$

Soit  $C > 0$  suffisamment petit, et  $\beta > 1$ . La région piège (pour  $x > 0$ ) est la suivante:

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, v > x_\tau, u > 0, v^2 - u^2 > (m + \omega) + C(\text{Log}(v/x_\tau))^\beta\}.$$

### 4.3 UNE BORNE UNIFORME SUR CERTAINES TRAJECTOIRES:

Il n'est pas possible d'obtenir une borne sur l'ensemble des trajectoires, même en se restreignant à celles qui existent globalement. Néanmoins, certaines trajectoires, celles qui par un processus limite, permettent de construire les solutions de (S), (C1), (C2), peuvent être estimées.

Nous définissons, pour  $n \in \mathbb{N}$ , les ensembles suivants (voir figure 5):

$I_n = \{x > (m-\omega)^{1/2} / \text{il existe } r_{x,n} \in ]0, R_x[ \text{ tel que } u_x \text{ et } v_x \text{ ont } n \text{ zéros sur } ]0, r_{x,n}[ \text{ et } u_x(r_{x,n})=0\}$ ,

$A_n = \{x > (m-\omega)^{1/2} / R_x = +\infty, u_x \text{ et } v_x \text{ ont } n \text{ zéros sur } ]0, +\infty[, \text{ et } |u_x| + |v_x| \text{ tend vers zéro à l'infini}\}$ ,

$E_n = I_n \cup A_n$ . Pour  $x \in A_n$ , on pose:  $r_{x,n} = +\infty$ .

Nous donnons ici une borne uniforme pour les solutions  $(u_x, v_x)$  de (S), (C1), telles que  $v_x(0) \in E_n$ .

*Proposition 2 . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons  $E_n \neq \emptyset$ . Alors  $\sup_{x \in E_n} \sup_{r \in ]0, r_{x,n}[} |u_x(r)| + |v_x(r)| < \infty$ .*

*Schéma de la preuve :* On utilise de manière essentielle le Lemme 1, ainsi que le résultat suivant, qui découle de la comparaison du système (S) et du système Hamiltonien  $(S_\infty)$ :

*Lemme 5 . Pour tout  $n \geq 1$ , et  $K > 0$ , il existe  $\tau(K, n)$  tel que si  $x \in E_n$ ,  $r_{x,n} > \tau$  et  $H_x(\rho) = K$ , alors  $\rho < \tau(K, n)$ .*

La démonstration se fait en intégrant les inéquations différentielles vérifiées par  $(u_x, v_x)$  dans chacune des régions du plan, (voir figure 6), de frontière  $\{u=0\} \cup \{v=0\} \cup \{u=v\} \cup \{u=-v\} \cup \{v^2 - u^2 = (m+\omega)\}$ .

De par la définition de  $E_n$ , une trajectoire de condition initiale appartenant à  $E_n$  coupe au maximum  $n$  fois chacune des régions décrites ci-dessus, avant de rester bornée dans  $\{H < \varepsilon\}$ , pour  $\varepsilon > 0$ . Or  $\{H < \varepsilon\}$  est bornée; Il suffit donc d'estimer la borne d'une telle trajectoire dans chacune de ces régions.

La technique est alors, sachant qu'une telle portion de trajectoire admet son point final majoré, d'en déduire une majoration de la portion de trajectoire.

Le temps de parcours étant borné d'après le lemme 5, il suffit de montrer que le système différentiel rétrograde est sous linéaire.

Ceci se fait de manière identique (au changement de formulation près) dans chacune des régions. Voici la preuve pour la région  $\delta_2$  (voir figure 6):

En posant  $X = u+v$  et  $Y = u-v$ , on a  $X > Y > 0$  et les équation différentielles rétrogrades suivantes pour  $X$  et  $Y$ :

$$(A) \begin{cases} X' = X^2 Y + mX + \omega Y + \frac{1}{\omega}(X + Y) \\ Y' = -Y^2 X - mY - \omega X + \frac{1}{\omega}(X + Y) \end{cases}$$

d'où

$$XY' + X'Y = \omega(Y^2 - X^2) + \frac{1}{r}(X + Y)^2$$

d'où d'après le lemme 1

$$(XY)' = XY' + X'Y \leq 2\omega Y^2 + 2\omega XY \leq 4XY$$

Ceci montre que XY satisfait une équation différentielle sous linéaire. D'où la borne sur XY.

En reportant cette borne dans le système (A), X vérifie une équation différentielle sous linéaire, et est donc borné. La borne sur Y découle de l'inégalité sur  $\delta_2$ :  $X > Y > 0$ .

Ceci entraîne la majoration sur u et v.

## 5. QUELQUES PROPRIETES DES TRAJECTOIRES DE DONNEES INITIALES DANS $E_n$

Les propriétés suivantes découlent de l'application de la propriété de continuité d'une trajectoire comme fonction de son point initial:

*Lemme 6 . Soit  $n \geq 0$ . Supposons  $A_n \neq \emptyset$ , et soit  $x$  appartenant à la fermeture de  $A_n$ . Alors  $x \in \cup_{0 \leq j \leq n} A_j$*

*Lemme 7 . Soit  $n \geq 0$ . Supposons  $I_n \neq \emptyset$ , et soit  $x$  un point limite de  $I_n$ . Alors  $x \in \cup_{0 \leq j \leq n} A_j$ .*

Les lemmes suivants sont les lemmes clés pour la preuve du théorème:

*Lemme 8 . Pour tout  $C > 0$ , il existe  $T > 0$ , tel que: si  $x \neq 0$  vérifie  $R_x \geq T$  et, pour une valeur  $\rho \geq T$ ,  $v_x(\rho) = 0$  et  $|u_x(\rho)| \leq C \exp(-(1/2)(m-\omega)\rho)$ ; alors il existe  $\theta > \rho$ , avec  $|u_x| > 0$  et  $|v_x| \leq (m-\omega)^{1/2}$  sur  $] \rho, \theta[$ ,  $|v_x(\theta)| = (m-\omega)^{1/2}$ , et  $H_x(\theta) < 0$ .*

*Lemme 9 . Il existe  $R$  vérifiant la propriété suivante: Supposons que  $x \neq 0$  soit tel que  $R_x \geq R$ . Supposons de plus que pour une valeur  $\rho \geq R$ , nous ayons  $v_x(\rho) = -(m-\omega)^{1/2}$ ,  $u_x(\rho) > 0$  (respectivement  $v_x(\rho) = (m-\omega)^{1/2}$ ,  $u_x(\rho) < 0$ ), et  $H_x(\rho) < 0$ . Alors il existe  $\tau > \rho$  tel que  $|v_x| > 0$  sur  $(\rho, \tau)$  et tel que  $u_x$  ait deux zéros sur  $] \rho, \tau[$ .*

Des lemmes 6 à 8 découle le:

*Corollaire . Soit  $n \geq 0$  avec  $A_n \neq \emptyset$ . Soit  $x_n = \text{Sup } A_n$ . Supposons  $x_n \in A_n$ , et  $x_n \geq \text{Sup } I_n$ . Alors, il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $]x_n, x_n + \epsilon[ \subset I_{n+1}$ .*

## 6. PREUVE DU THEOREME.

Il s'agit de prouver que pour tout n,  $A_n$  est non vide.

D'après [2] (voir Remarque 1),  $A_0$  est non vide. Soit  $x_0 = \text{Sup } A_0$ . Appliquant le Lemme 6, on a  $x_0 \in A_0$ . D'après le Corollaire, il existe  $\epsilon_0 > 0$ , tel que  $(x_0, x_0 + \epsilon_0) \subset I_1$ . Ainsi,  $I_1 \neq \emptyset$ . Soit  $y_1 = \text{Sup } I_1$ . On a  $y_1 > x_0 \geq y_0 = \text{Sup } I_0$ ; le Lemme 7 entraîne alors

$y_1 \in A_1$ , et par le lemme 6,  $x_1 = \text{Sup} A_1 \in A_1$ . Les lemmes 10 et 11 montrent alors que les valeurs de  $x$  suffisamment proches de  $x_1$ , et supérieures à  $x_1$ , appartiennent à  $I_2$ . Itérant cet argument, nous construisons une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  avec  $x_n \in A_n$ .  $(x_n)_{n \geq 0}$  est bornée d'après la Proposition 1. Ceci termine la preuve.

#### REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. Balabane, T. Cazenave, A. Douady, F. Merle. Existence of excited states for a nonlinear Dirac field. A paraître.
- [2] T. Cazenave, L. Vazquez. Existence of localized solutions for a classical nonlinear Dirac field. Comm. Math. Phys., **105** (1986), 35-47.
- [3] F. Merle. Existence of stationary states for nonlinear Dirac equations. A paraître, J. Diff. Eq.
- [4] M. Soler. Classical, stable, nonlinear spinor field with positive rest energy. Phys. Rev., **D 1** (1970), 2766-2769.
- [5] L. Vazquez. Localized solutions of a nonlinear spinor field. J. Phys., **A 10** (1977), 1361-1368.
- [6] M. Wakano. Intensely localized solutions of the classical Dirac-Maxwell field equations. Prog. Theor. Phys. (Kyoto), **35** (1966), 1117-1141.
- [7] M. Chadam. Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) Maxwell Dirac equations in one space dimension. J. Funct. Anal. **13** (1973)
- [8] M. Chadam et R.T. Glassey. On the Cauchy problem for the coupled Maxwell Dirac equations. J. Math. Phys. **13-5** (1972)
- [9] Mme Choquet Bruhat-Christodoulou: J. Math Pure Appl. (1980)
- [10] A. Bachelot : Preprint de l'Université de Bordeaux (1988)
- [11] J.P. Diaz-M. Figueira: Preprint de l'IMAF-Lisbonne (1988)

M. Balabane

Université de Reims, Dpt Maths et CMA, Ecole Normale Supérieure

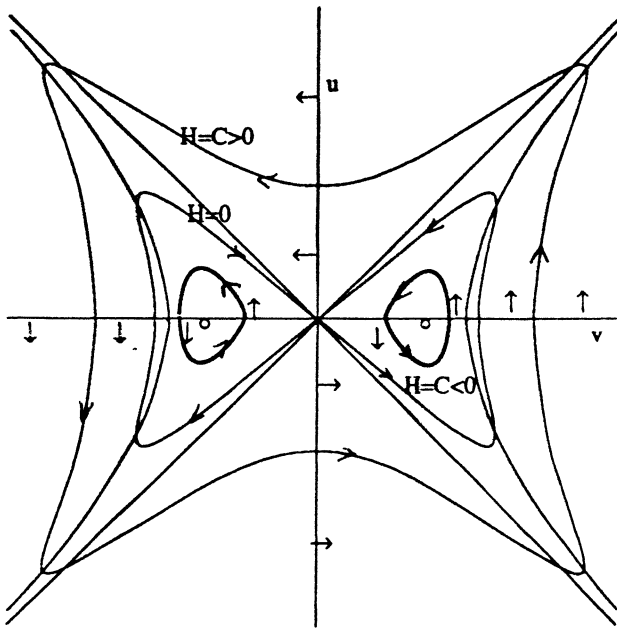


Fig 1: trajectoires du système Hamiltonien

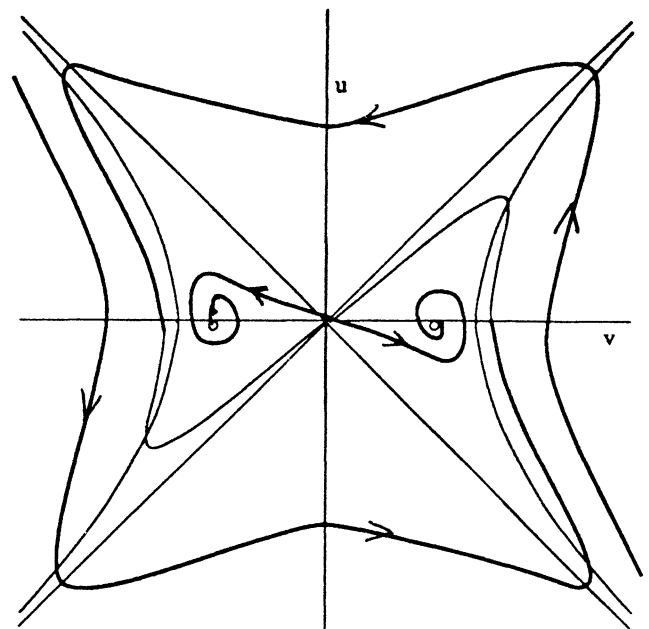


Fig 2:  $\rho > 1/\omega$ . les deux puits, le col à l'origine et ses variétés stables-instables

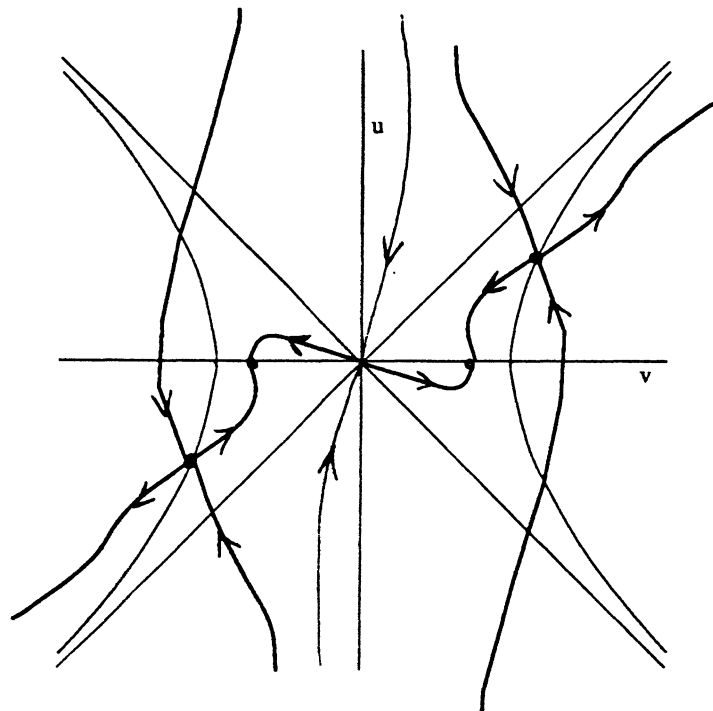


Fig 3:  $\rho < 1/\omega$ . les deux puits, les trois cols à l'origine et sur l'hyperbole et leurs variétés stables-instables

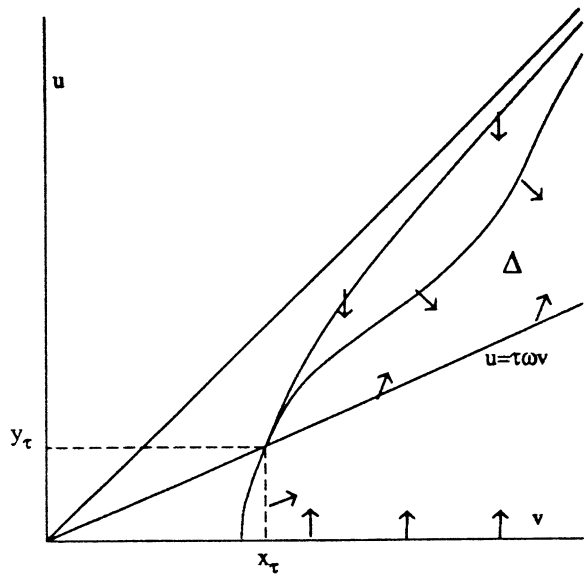


Fig 4: La région piège  $\Delta$

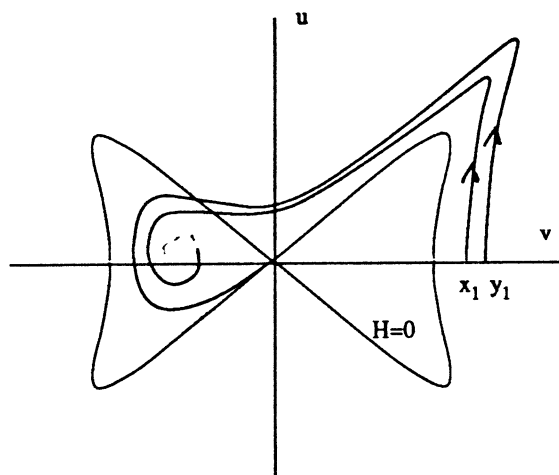


Fig 5: Trajectoires correspondant à:  $x_1$  appartenant à  $I_1$  et  $y_1$  appartenant à  $A_1$

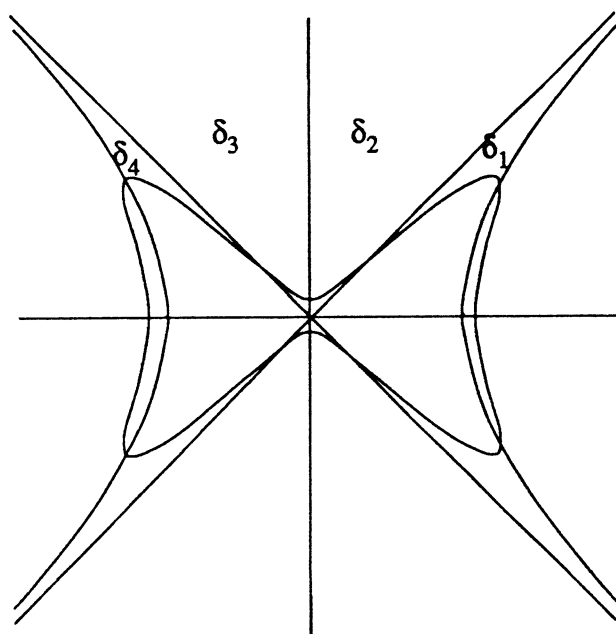


Fig 6: les régions  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ .

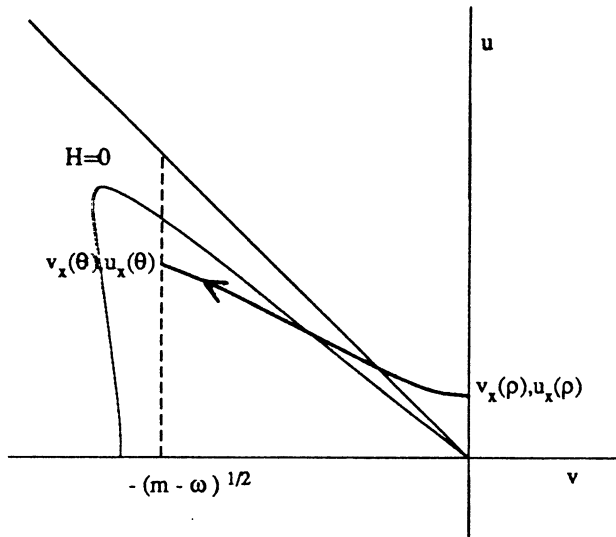


Fig. 7: Notation pour le lemma 8

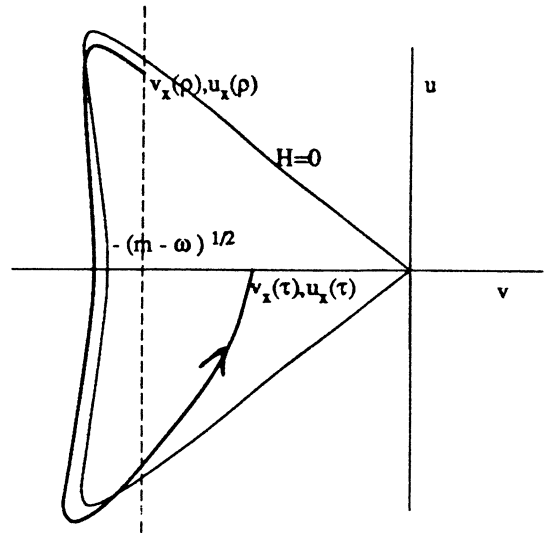


Fig. 8: Notation pour le lemma 9