Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Zuily

Existence locale de solutions C^∞ pour l'équation de Monge-Ampère réelle

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. n° 9, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

EXISTENCE LOCALE DE SOLUTIONS C^∞ POUR L'EQUATION DE MONGE-AMPERE RELLE.

par C. ZUILY

(d'après J. HONG et C. ZUILY)

Exposé n° IX

16 décembre 1986

§ 0. INTRODUCTION.

De nombreux travaux ont été récemment consacrés à l'existence de solutions pour l'équation de Monge-Ampère réelle dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$,

$$\det(u_{ij}) = f(x,u,\nabla u) \tag{0.1}$$

ou pour des problèmes aux limites relatifs à cette équation (voir [2] et sa bibliographie). La plupart de ces travaux concernaient le cas elliptique où f est strictement positive. Le cas "dégénéré" où f est positive ou nulle n'a fait l'objet que de quelques publications. (Voir [3],[4],[5],[9]). Dans l'une d'entre elles [4] C.S. Lin démontrait en dimension 2 un théorème d'existence locale H^s, pour s assez grand, pour des seconds membres de même nature. Malheureusement l'ouvert d'existence dépend de s et sa taille tend vers zéro au fur et à mesure que s augmente. Le but de cet exposé est de montrer qu'avec des hypothèses additionnelles sur f on peut, en toute dimension, obtenir des solutions locales C^∞ .

§ 1. NOTATIONS ET ENONCES DES RESULTATS.

Dans tout ce qui suit $f(y,u,p)$ sera une fonction C^∞ , au voisinage d'un point $Z^o = (y^o,u^o,p^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, positive ou nulle.

Le premier résultat est une extension à $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, d'un résultat de C.S. Lin [4] obtenu en dimension $n = 2$.

Théorème 1.1. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $s > [\frac{n}{2}] + 3$ il existe un voisinage de y^o dans lequel l'équation (0.1) admet une solution convexe $u \in H^s$.

Théorème 1.2. Supposons en outre que $D_y^\alpha D_u^\ell D_p^\beta f(y^o,u^o,p^o) = 0$ pour tous $|\alpha| + \ell + |\beta| \leqslant k-1$ et qu'il existe $\alpha^* \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha^*| = k$ tel que $D_y^{\alpha^*} f(y^o,u^o,p^o) \neq 0$. Alors l'équation (0.1) admet une solution convexe C^∞ dans un voisinage de y^o .

Théorème 1.3. On considère le cas où $f(y,u,p) = K(y)g(y,u,p)$ où $K(y^o) = 0$, $K \geqslant 0$ et $g(y^o,u^o,p^o) > 0$. Supposons qu'il existe un nombre fini d'hypersurfaces

C^1 , S_ℓ , $\ell = 0,\dots,\ell_o$ et un voisinage V de y^o tels que

$$V \cap K^{-1}(0) \subset \bigcup_{\ell=0}^{\ell_o} S_\ell$$

Alors (0.1) admet une solution locale convexe et C^∞ près de y^o .

§ II. PREUVE DES RESULTATS.

On peut bien entendu supposer que $Z^o = (0,0,0)$. Comme dans Lin [4] on fait un changement de fonction et un changement de variables ; plus précisément on pose

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_i}{2} y_i^2 + \varepsilon^5 w(\varepsilon^{-2} y) \\ y_i &= \varepsilon^2 x_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{aligned}$$

où ε est positif et petit.

L'équation (0.1) est transformée en l'équation

$$(2.2) \qquad \det(\Phi_{ij}) = \det((1-\delta_i^n)\delta_i^j \sigma_i + \varepsilon w_{ij}) = \tilde{f}$$

où δ_i^j est le symbole de Kronecker. Les constantes σ_i sont choisies telles que

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_{n-1} = 1$$

On pose $G(w) = \frac{1}{\varepsilon} \det(\Phi_{ij}) - \frac{1}{\varepsilon} \tilde{f}\chi(x')$ dans l'ensemble $\Omega = \{(x',x_n) \in \mathbb{R}^n : |x'| \leqslant \pi \ , \ |x_n| \leqslant x_o\}$ où χ est une troncature nulle au voisinage de $\mp\pi$, égale à 1 près de zéro et x_o est à choisir.

Le linéarisé de G en w est l'opérateur

$$(2.3) \qquad L_G(w) = \sum_{i,j=1}^{n} \Phi^{ij} \partial_i \partial_j + \Sigma\, a_i \partial_i + a$$

où (Φ^{ij}) est la matrice des cofacteurs de la matrice (Φ_{ij}) .

Lemme 2.1. Supposons que w soit C^2 et que $\|w\|_{C^2} \leqslant 1$. Il existe une matrice orthogonale $T(x,\varepsilon)$ telle que :

a) $T(x,\varepsilon)\Phi_{ij}\,{}^tT(x,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

b) $T(x,\varepsilon)$ est régulière en (x,ε) dans $\bar{\Omega}\times[0,\varepsilon_o[$ où $\varepsilon_o>0$.

c) Il existe une constante C indépendante de w et de ε telle que

$$(2.4)\quad |T_{nn}(x,\varepsilon)-1| + \sum_{i,j=1}^{n} |\nabla_x T_{ij}(x,\varepsilon)| + \sum_{\ell=1}^{n-1} |\lambda_\ell(x,\varepsilon)-\sigma_\ell| + |\lambda_n(x,\varepsilon)| +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n-1} |T_{\ell n}(x,\varepsilon)| \leqq C\,\varepsilon\ .$$

A l'aide de ce lemme il est facile de démontrer le résultat suivant :

Lemme 2.2 : Soit $w\in C^2$ telle que $\|w\|_{C^2}\leqslant 1$ et $\theta = \sup_{\bar{\Omega}}|G(w)|\geqslant 0$. Alors l'opérateur

$$L = -L_G(w) - \theta\Delta \quad \text{où } \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

est pour ε assez petit un opérateur à symbole positif ou nul.

Ce résultat va nous permettre de poser un problème de Dirichlet pour l'opérateur L . Pour cela on travaillera dans des espaces de Sobolev formés de fonctions qui sont périodiques en les variables x_i' , $i = 1,\dots,n-1$ de période 2π . On notera H_s ces espaces et $\overset{\circ}{H}_s$ l'espace des fonctions s'annulant en $x_n = \mp x_o$; Ω désignera l'ouvert $\{|x_i'|<\pi,\ i = 1,\dots,n-1\ ,\ |x_n|<x_o\}$, $x_o>0$. Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 2.3. Soit w une fonction régulière, périodique en x' telle que $\|w\|_{C^{[\frac{n}{2}]+3}}\leqq 1$. Pour tout $s_o\in\mathbb{N}$ il existe $\varepsilon(s_o)$ tel que le problème

$$(2.5)\qquad L_G(w)\rho + \theta\Delta\rho = g$$

admet une solution unique $u\in\overset{\circ}{H}_s$ pour $g\in H_s$, $0\leqslant s\leqslant s_o$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(s_o)$.

On a, de plus, l'inégalité

$$(2.6)\qquad \|\rho\|_s \leqq C_s(\|g\|_s + \|(w)\|_{s+4}\,\|\rho\|_{L^\infty})$$

où C_s est une constante indépendante de w et de ε . Ici $\|(w)\|_{s+4}$ est égale à zéro si $s\leqq[\frac{n}{2}]+1$ et à $\|w\|_{s+4}$ si $s>[\frac{n}{2}]+1$.

Décrivons les principales étapes de la preuve.

On commence par un changement de fonctions qui aura pour effet de donner à l'opérateur $L(w)$ un terme constant qui soit grand ; pour cela on conjugue $L(w)$ par une exponentielle $e^{\lambda x_n^2}$. on procède ensuite à une régularisation elliptique i.e. on ajoute $\nu\Delta$ (où $\nu > 0$ et Δ est le Laplacien) à l'opérateur obtenu ; soit $L_\nu = \tilde{L}(w) + \nu\Delta$. On montre que le problème de Dirichlet homogène pour L_ν admet une solution unique $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Pour cela on cherche une borne inférieure à la quantité $-(L_\nu \rho,\rho)$. C'est là que les lemmes 2.1 et 2.2 sont utiles. Après quelques calculs on obtient l'inégalité

$$-(L_\nu\rho,\rho) \geqslant \int\{\nu|\nabla\rho|^2 + \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i\,|\tilde{\rho}_n|^2 + [(\sigma+\theta)\lambda - C(1+\lambda^2 x_n^2) + O(\varepsilon)]\rho^2\}\,dx$$

ce qui pour λ assez grand fournit l'existence et l'uncité de la solution. De cette inégalité découle la suivante

$$\int|\tilde{\rho}_n|^2\,dx + \|\rho\|_{L^2} \leqq C_o\,\|g\|^2_{L^2} \tag{2.7}$$

Elle correspond à l'étape $s = o$ de l'inégalité (2.5). On obtient une inégalité H_s par récurrence sur s, partant de (2.6), en commençant par obtenir de la régularité tangentielle puis tirant la régularité normale de l'équation. Les détails sont donnés dans [10].

On utilise ensuite, pour montrer l'existence d'une solution du problème (2.1), le procédé de Nash-Moser (voir [6]).

On notera S_k l'opérateur de lissage qui consiste essentiellement à convoluer par la fonction $\mu_k^n\varphi(\mu_k x)$ où $\varphi \in \mathcal{S}$ est convenablement choisie et

$\mu_k = \sigma^{\tau^k}$, $\sigma > 1$, $\tau > 1$ sont à choisir.

Le schéma d'approximation utilisé sera le suivant :

$$\begin{cases} w_o = 0 \qquad w_{k+1} = w_k + S_k\,\rho_k \\ L(w_k)\rho_k = g_k \quad , \rho_k \in \overset{\circ}{H}_s(\Omega) \\ g_k = -\,G(w_k) \\ \theta_k = \sup\limits_{\overline{\Omega}}|G(w_k)| \end{cases} \tag{2.8}$$

<u>Lemme 2.4</u>. Supposons $\|w_k\|_{C^{[\frac{n}{2}]+3}} \leqq 1$ pour $k = 0,\ldots,n$. Alors pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\|g_k\|_s \leqq C_s\,\{\|g_o\|_s + \|w_k\|_{s+2}\} \tag{2.9}$$

(2.10) $$\|w_{k+1}\|_{s+4} \leqq C_s^{k+1}\ \mu_{k+1}^{\beta} \|g_o\|_s \quad \text{où } \beta > \frac{4}{\tau-1}$$

(2.11) $$\|g_{k+1}\|_{L^2} \leqq \mu_{k+1}^{-\chi} \| g_o\|_{s^*} \quad \text{où } \chi > 0 \text{ et } s^* > 0 .$$

Sous l'hypothèse du lemme 2.4 si w_k converge ce sera, grâce à (2.11), vers un w tel que $G(w) = 0$ c'est à dire une solution de notre problème.
La suite de la preuve va consister à prouver que w_k converge et satisfait à l'inégalité du Lemme 2.4. Plus précisément on montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

(2.12) $$\| w_k\|_{2[\frac{n}{2}]+4} \leqq C$$

cela se fait par récurrence sur k et nous renvoyons à [10] pour les détails.
Ceci permet de démontrer le théorème 1.1.
Pour le théorème 1.2. on utilise le théorème de régularité suivant dû à C.J. Xu [8] . Soit $F(x,u,\nabla u,D^2u) = 0$ où F est réelle et C^∞ , une équation aux dérivées partielles non linéaire. A chaque solution réelle u on associe les champs de vecteurs réels $X_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{jk}} \partial_k$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Théorème 2.5. ([8]). Supposons que $u \in C^{\rho}_{loc}(\Omega)$ où $\rho > \mathrm{Max}(4,r+2)$ où r est un entier $\geqslant 0$ tel que les crochets des X_j d'ordre inférieur ou égal à r engendrent l'espace tangent en tout point de Ω . Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Dans notre cas particulier on a :

$$\begin{cases} X_j = \varepsilon w_{nn} A_j \partial_j + \varepsilon \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j\neq i} w_{ij}\ B_{ij}\ (D^2w)\partial_\ell & 1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ X_n = A_n \partial_n + \varepsilon \sum_{j,\ell\neq n} w_{nj}\ B_{nj\ell}(D^2w)\partial_\ell \end{cases}$$

où les $B_{ij\ell}$ sont des polynômes en D^2w , $A_n = \det(\delta_i^j \sigma_i + \varepsilon w_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n-1)$ et A_ℓ est le cofacteur de $\sigma_\ell + \varepsilon w_{\ell\ell}$ dans A_n . Tous les A_i sont strictement positifs.

Lemme 2.6. Supposons $\partial_y^\alpha \partial_u^\ell \partial_p^\beta f(0,0,0) = 0$ pour $|\alpha| + \ell + |\beta| \leqq k-1$.
Supposons que $w \in C^{k+2}$ où $s > [\frac{n}{2}] + k + 3$ alors

(2.13) $$|\partial^\alpha w| \leqq C_\alpha\ \varepsilon^{2k-1} , \quad |\alpha| \leqslant s - [\tfrac{n}{2}] - 1$$

Ce lemme résulte de la formule de Taylor appliquée à $g_o = - G(w_o)$ et de l'inégalité $\| w \|_s \leq c_{s,s^*} \| g_o \|_{s^*}$ prouvée précédemment.

Lemme 2.7. Supposons de plus que $\partial_n^k f(0,0,0) > 0$. Alors si ε est assez petit on a

(2.14) $$\partial_n^{k+2} w \geqslant c\,\varepsilon^{2k-1}$$

où C est une constante indépendante de ε .

On écrit pour cela l'équation $\det(\Phi_{ij}) = f$ sous la forme

$$w_{nn} + \varepsilon \sum_{i,j,k,m} w_{ij}\, w_{km}\, A_{ijkm}(D^2 w) = \frac{\tilde{f}}{\varepsilon}$$

on développe f autour de l'origine, on différentie les deux membres k fois, et on utilise (2.13).

A l'aide de ces deux lemmes et d'un calcul précis de $(\mathrm{ad}X_i)^k\,(X_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on montre facilement que les champs de vecteurs $(\mathrm{ad}X_n)^k(X_i)$, $i = 1,\ldots,n$, et X_n engendrent l'espace tangent ce qui, utilisant le théorème 2.5 démontre le théorème 1.2.

Donnons maintenant une idée de la preuve du théorème 1.3.

On peut tout de suite supposer que $y_o = 0$ et que les normales à l'origine aux surfaces S_ℓ , $\nu^\ell = (\nu_1^\ell,\ldots,\nu_n^\ell)$ satisfont la condition $\nu_n^\ell > 0$ dans Ω .

Au lieu de l'équation (2.2) nous considérons l'équation

$$\tilde{G}(w) = \frac{1}{\varepsilon}\det(\sigma_i \delta_i^j (1-\delta_i^n) + \varepsilon w_{ij}) = \frac{K}{\varepsilon} g\chi_1 + (1-\chi_1)\varepsilon^P g = K_1 g$$

où $\chi_1 \in C_o^\infty(\Omega)$, $\chi_1 = 1$ dans un voisinage V de zéro. D'après la régularité des solutions des équations elliptiques il est facile de voir que la solution construite au théorème 1.1. est C^∞ près de $\partial\Omega$ et que son support singulier est contenu dans $M = \bigcup_{\ell=o}^{\ell_o} S_\ell \cap V$. Il suffit donc de prouver que w est C^∞ près de M . On montre tout d'abord une inégalité de Poincaré.

Lemme 2.8. Soit $V = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\partial_j$ un champ de vecteur réel et C^1 dans $\bar{\Omega}$, non dégénéré.

Supposons que M est un ensemble compact et que pour chaque ℓ , $\sum_{j=1}^{n} \nu_j^\ell v_j(x) > 0$ sur M . Alors pour tout $\eta > 0$ on peut trouver un voisinage N_η de M tel que

$$\|u\|_o \leqq \eta \|Vu\|_o$$

pour tout $u \in H^1$ telle que supp $u \subset N_\eta$.
Montrons comment le théorème 1.3 se déduit de ce lemme.

Supposons que la solution obtenue au théorème 1.1. soit dans $H_s(\Omega)$ pour $s > [\frac{n}{2}] + 6$. En utilisant la théorie para-différentielle de J.M. Bony [1] on obtient

$$\widetilde{G}(w) - \sum_{|\alpha|\leq 2} T_{\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial w_\alpha}} \partial^\alpha w \in H_{2s-4-[\frac{n}{2}]+\mu} \qquad \forall \mu > 0$$

Le symbole de l'opérateur linéarisé de $\widetilde{G}$ en w est

$$\sigma(L_{\widetilde{G}}(w)) = \sum_{i,j=1}^{n} \Phi^{ij} \xi_i \xi_j \quad + \text{ termes d'ordre 1}$$

Considérons le champ de vecteur $V = \sum_{j=1}^{n} \Phi^{jn} \partial_j$. La composante sur l'axe des x_n est égale à $\Phi^{nn} = \sigma + O(\varepsilon)$ où $\sigma = \prod_{j=1}^{n-1} \sigma_i$ tandis que les autres composantes sont $O(\varepsilon)$. On en déduit que V satisfait la condition exigée au lemme 2.8. D'autre part par un résultat de O.A. Oleinik E.V. Radkevitch on a

$$\|Vu\|_o^2 \leqq C\{\mathrm{Re}(L_{\widetilde{G}}(w)u,u) + \|u\|_o^2\} \quad u \in C_o^\infty(\Omega)$$

Par la théorie paradifférentielle on en déduit que

$$\|Vu\|_o^2 \leqq C\{\mathrm{Re} \sum_\alpha (T_{a_\alpha} \partial^\alpha u,u) + \|u\|_o^2\}$$

où $a_\alpha = \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial w_\alpha}$. D'où, utilisant le lemme 2.2

$$\frac{1}{\eta} \|u\|_o^2 + \|Vu\|_o^2 \leqq C \ \mathrm{Re} \ \Sigma(T_{a_\alpha} \partial^\alpha u,u) \tag{2.15}$$

Soit E_δ^s l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\varphi(x)(1+|\xi|^2)^{\frac{s+1}{2}} (1+\delta^2|\xi|^2)^{-2}$ où φ est une troncature égale à 1 près de M .
En utilisant l'inégalité (2.15) avec $E_\delta^s u$ au lieu de u et en utilisant la théorie paradifférentielle pour estimer les commutateurs on déduit que $u \in H_{s+1}$ près de M et en itérant ce procédé, que $u \in C^\infty$ près de M .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.-M. BONY : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., t. 14, 1981, 209-246.

[2] L. CAFFARELLI, L. NIRENBERG, J. SPRUCK : The Dirichlet problem for non linear second order elliptic equations I : Monge-Ampère equations, Comm. on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXVII, 369-402, (1984).

[3] HONG JIAXING : Surface in $\mathbb{R}^3$ with prescribed Gauss curvature, To appear in Chinese Ann. of Math.

[4] C.-S. LIN : The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with non negative curvature, J. Diff. equations, 21 (1985), 213-230.

[5] C.-S. LIN : Isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of Riemannian manifolds with curvature vanishing clearly, To appear.

[6] J. MOSER : A new technique for the construction of solutions of non linear partial differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47 (1961) 1824-1831.

[7] O.A. OLEINIK - E.V. RADKEVITCH : Second order equations with non negative characteristic form, Plenum Press.

[8] C.J. XU : Régularité des solutions des e.d.p. non linéaires, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300 (1985), p. 267-270 et article à paraître.

[9] C. ZUILY : Sur la régularité des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère réelle, Prépublication d'Orsay 85 T 33 et article à paraître.

[10] J. HONG, C. ZUILY : Existence of C^∞ local solutions for the Monge-Ampère equation.Prepublications d'Orsay 86 T 23 et article à paraître.

***