Y. Meyer

# Ondelettes et fonctions splines

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1986-1987), exp. n° 6, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

# ONDELETTES ET FONCTIONS SPLINES

par Y. MEYER

Exposé n° VI

16 Décembre 1986

Les ondelettes sont des bases hilbertiennes de l'espace de référence $L^2(\mathbb{R}^n)$ obtenues par translations entières et dilatations dyadiques à partir d'une seule fonction $\psi$ possédant des propriétés de régularité, de décroissance à l'infini et d'oscillation soigneusement ajustées. Une telle fonction $\psi$ s'appelle une ondelette analysante et elle est la "mère" des autres ondelettes $2^{j/2}\psi(2^j x-k)$ où $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ceci, en dimension un, tandis qu'en dimension $n$ on doit utiliser une seconde fonction $\varphi$ d'intégrale égale à 1 . Cette seconde fonction est "le père" des ondelettes de dimension $\geqslant 2$ . Les ondelettes sont alors de la forme $2^{jn/2}\ \psi_{\varepsilon_1}(2^j x_1-k_1)\ldots\psi_{\varepsilon_n}(2^j x_n-k_n)$ où $\varepsilon_j = 0$ ou $1$ , $\psi_o = \varphi$ , $\psi_1 = \psi$ et où l'on exclut seulement la suite $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = (0,0,\ldots,0)$. La première base d'ondelettes a été découverte par P.G. Lemarié et moi-même pendant l'été 1985. L'existence de la fonction $\psi$ tenait du miracle et la fonction $\varphi$ était construite "après coup" . Un jeune polytechnicien de la promotion 1981, S. Mallat, propose aujourd'hui une construction remarquablement originale des ondelettes. Il montre que la construction des ondelettes ne fait que reproduire celle des martingales dyadiques avec cependant ce changement essentiel que les fonctions en escalier mesurables par rapport à la tribu $F_j$ des intervalles dyadiques $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ sont remplacées par les fonctions splines d'ordre $m$ dont les nœuds sont précisément $k2^{-j}$, $k \in \mathbb{Z}$. Cet espace de fonctions splines est noté $V_j$ . Grosso modo la fonction $\varphi$ apparaît lorsqu'on calcule la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur $V_j$ tandis que la fonction $\psi$ apparaît lorsqu'on considère la projection sur $W_j$ où $W_j \subset V_{j+1}$ est le complément orthogonal de $V_j$ dans $V_{j+1}$ .

Puisque les "ondelettes historiques" de [6] ne correspondent pas aux espaces usuels de fonctions splines mais plutôt à des splines "d'ordre infini" , il convient d'axiomatiser un peu la définition des fonctions splines. A cet effet, nous introduisons la notion <u>d'analyse graduée</u> présentée au premier paragraphe. Le second paragraphe est consacré à la description d'exemples d'analyses graduées. Les algorithmes de construction des fonctions $\varphi$ et $\psi$ ("le père et la mère des ondelettes") sont donnés au paragraphe 3. Les paragraphes 4 et 5 sont consacrés aux calculs explicites sur les exemples les plus importants. Nous retrouvons les ondelettes de [6] ainsi que les ondelettes de G. Battle et de P.G. Lemarié ([1]) qui sont utilisées en théorie constructive des champs .

La souplesse de ces nouveaux algorithmes permet de les adapter, par exemple, à la suite emboîtée des espaces de fonctions splines associés à des suites emboîtées de maillages triangulaires de la sphère. On obtient ainsi des bases d'ondelettes sur la sphère. Cet exemple préfigure d'autres développements esquissés dans le dernier paragraphe. La notion d'analyse graduée reprend, en les précisant, quelques idées familières en théorie de l'approximation ou en analyse numérique. On cherche à approcher des fonctions ou des distributions compliquées $f$, définies sur $\mathbb{R}^d$, par des fonctions $f_j$, $-\infty < j < \infty$, suffisamment simples et régulières pour pouvoir être échantillonnées. Si l'espace fonctionnel que l'on privilégie est l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $f_j$ appartiendra à un sous-espace fermé $V_j \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ et sera la projection sur $V_j$ de $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Intuitivement $V_j$ décrit toutes les connaissances accessibles à l'instant $j$. Le progrès cumulatif des connaissances s'exprime par la condition $V_j \subset V_{j+1}$. Enfin on dira que l'analyse graduée définie par la donnée des sous-espaces fermés $V_j$ est dyadique si, en un certain sens, les fonctions $f_j \in V_j$ permettent de distinguer des détails petits et compliqués, de dimension $2^{-j}$, de l'objet compliqué décrit exactement par $f$. Cette métaphore visuelle n'est pas fortuite puisque les algorithmes qui suivent sont utilisés par S. Mallat dans le traitement numérique de l'image.

Les deux exigences (en apparence contradictoire) d'une analyse graduée seront

(a) la simplicité (tant géométrique que numérique) des espaces $V_j$ utilisés

(b) la qualité de l'approximation de $f$ (fonction régulière ou distribution sauvage) par les $f_j$ (qui sont déduits de $f$ par l'algorithme qui convient en norme $L^2(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire la projection orthogonale de $f$ sur $V_j$).

## 1. DEFINITION D'UNE ANALYSE GRADUEE.

Rappelons qu'un réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-groupe discret tel que le quotient $\mathbb{R}^d / \Gamma$ soit compact. Le réseau dual $\Gamma^*$ est alors défini par la condition que $\exp(ix.\gamma) = 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Le groupe compact quotient $\mathbb{R}^d / \Gamma^*$ est noté $G$. Ce groupe compact $G$ est le dual de $\Gamma$. Enfin nous identifierons $L^2(G)$ au sous-espace des fonctions $f(x)$ de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ qui sont $\Gamma^*$-périodiques.

L'espace de référence que nous commencerons à utiliser est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$.

<u>Définition</u> 1. <u>Une analyse graduée dyadique de</u> $L^2(\mathbb{R}^d)$ <u>est, par définition, une suite croissante</u> $V_j$, $j \in \mathbb{Z}$, <u>de sous-espaces fermés de</u> $L^2(\mathbb{R}^d)$ <u>ayant les propriétés suivantes</u>

(1.1) $\cap V_j = \{0\}$ , $\cup V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

(1.2) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

(1.3) il existe un réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on ait $R_\gamma(V_o) = V_o$ où $R_\gamma : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ désigne l'opérateur unitaire de translation par $\gamma \in \Gamma$

(1.4) il existe un isomorphisme $T : V_o \to \ell^2(\Gamma)$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ , on ait $TR_\gamma = r_\gamma T$ où $r_\gamma : \ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$ est l'opérateur unitaire de translation par $\gamma \in \Gamma$ .

Pour expliciter l'opérateur d'échantillonnage $T$ , on désigne par $\varepsilon_\gamma \in \ell^2(\Gamma)$ la suite qui vaut 1 en $\gamma$ et 0 ailleurs. On désigne par $g \in V_o$ l'image réciproque de $\varepsilon_o$ par $T$ . Alors on a $T^{-1}(\varepsilon_\gamma) = g(x-\gamma)$ et la propriété (1.4) signifie que la suite $g(x-\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ , est une base inconditionnelle de l'espace de Hilbert $V_o$ . Soient $H$ un espace de Hilbert, $\delta_2 > \delta_1 > 0$ deux constantes et $e_k$ , $k \in \mathbb{N}$ , une suite d'éléments de $H$ telle que $\delta_1 \leq \|e_k\| \leq \delta_2$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$) . Alors cette suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de $H$ si les combinaisons linéaires finies $\Sigma \alpha_k e_k$ sont denses dans $H$ et si l'on a

$$C_1 (\Sigma |\alpha_k|^2)^{1/2} \leq \|\Sigma \alpha_k e_k\| \leq C_2 (\Sigma |\alpha_k|^2)^{1/2} \quad .$$

La souplesse d'utilisation de l'échantillonnage $T : V_o \to \ell^2(\Gamma)$ réside dans la propriété suivante. On commence par restreindre $T^{-1}$ au sous-espace $\sigma(\Gamma) \subset \ell^2(\Gamma)$ composé des suites finies. On souhaite alors que, pour $1 \leq p \leq +\infty$ , on ait, pour toute suite finie $\alpha_\gamma$ , $\gamma \in \Gamma$, la double inégalité

(1.5) $$C_1 (\Sigma |\alpha_\gamma|^p)^{1/p} \leq \|\Sigma \alpha_\gamma g(x-\gamma)\|_p \leq C_2 (\Sigma |\alpha_\gamma|^p)^{1/p}$$

Un second souhait est que l'on ait des inégalités du type de S. Bernstein pour les fonctions $f \in V_o$

(1.6) $$\|f'\|_p \leq C \|f\|_p \quad , \; f \in V_o \; , \; 1 \leq p \leq \infty \; .$$

Dans beaucoup d'exemples importants (comme dans le cas des splines d'ordre impair), l'opérateur $T : V_o \to \ell^2(\Gamma)$ n'est autre que l'opérateur de restriction usuelle à $\Gamma$ des fonctions, $f \in V_o$ , ces fonctions étant par ailleurs uniformément continues.

Notre premier travail sera la construction d'une fonction $\varphi \in V_o$ telle que la suite $\varphi(x-\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, soit une base orthonormée de $V_o$. Ensuite nous désignerons par $W_j \subset V_{j+1}$ le complément orthogonal de $V_j$ dans $V_{j+1}$. On a donc

$$(1.7) \qquad L^2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} W_j \,.$$

Nous montrerons qu'il existe $2^d-1$ fonctions $\psi_m$, $1 \leqslant m < 2^d$, telles que la collection des fonctions $\psi_m(x-\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, $1 \leqslant m < 2^d$, soit une base orthonormée de $W_o$.

Ces fonctions $\psi_m$ seront appelées des ondelettes analysantes si elles vérifient les conditions (1.8), (1.9) et (1.10) suivantes

$$(1.8) \qquad |\psi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-d-1}$$

$$(1.9) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)dx = 0$$

$$(1.10) \qquad |\partial/\partial x_j \psi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-d-1} \qquad (1 \leqslant j \leqslant d)$$

<u>Définition</u> 2. <u>Une base orthonormée d'ondelettes est</u>, <u>par définition</u>, <u>une base orthonormée de</u> $L^2(\mathbb{R}^d)$ <u>de la forme</u>

$$2^{dj/2}\psi_m(2^j x-\gamma), \; j \in \mathbb{Z}, \; 1 \leqslant m < 2^d \,, \; \gamma \in \Gamma$$

<u>où</u> $\Gamma$ <u>est un réseau de</u> $\mathbb{R}^d$ <u>et où les</u> $\psi_m$ <u>vérifient</u> (1.8), (1.9) <u>et</u> (1.10).

Comme nous le verrons au paragraphe 2, il n'est pas vrai qu'en partant d'une analyse graduée arbitraire de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on puisse toujours construire une base d'ondelettes associée à la décomposition (1.7).

En sens inverse, nous ne savons pas si une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^d)$ est toujours obtenue à partir d'une analyse graduée de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en suivant l'algorithme qui sera décrit au paragraphe 3.

Il arrive souvent que l'on soit amené à exiger beaucoup plus de régularité et d'oscillations sur les ondelettes.

On part d'un entier $q \geqslant 1$ (qui sera appelé l'ordre de l'ondelette analysante $\psi$) et l'on demande que $\psi$ vérifie

$$(1.11) \qquad |\psi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-d-q}$$

(1.12) $\int x^{\alpha}\psi(x)dx = 0$ pour tous les $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d = |\alpha| < q$

(1.13) $|\partial^{\beta}\psi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-d-q}$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| \leqslant q$ .

Une ondelette d'ordre infini $\psi$ vérifie ces conditions pour tout $q \in \mathbb{N}$ . Il s'agit alors d'une fonction de la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de Schwartz dont tous les moments sont nuls.

L'intérêt principal des bases d'ondelettes est de fournir des bases inconditionnelles universelles pour la plupart des espaces fonctionnels classiques. C'est à dire que l'appartenance à $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 < p < \infty$, aux espaces de Besov, de Sobolev, de Hölder, de Hardy (dans la version réelle donnée par Stein et Weiss) sont des propriétés que l'on lit immédiatement sur les modules $|\alpha(m,j,k)|$ des coefficients de la décomposition de $f$ dans la base d'ondelettes. Les seules limitations résident dans la régularité de l'ondelette analysante, dans sa décroissance à l'infini et dans le nombre de moments nuls (et finalement dans la remarque triviale que certains espaces comme $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou comme $C_o(\mathbb{R}^d)$ n'ont pas de bases inconditionnelles).

Il est peut être utile de rappeler la définition précise d'une base inconditionnelle.

Définition 3. Soit $E$ un espace de Banach et soit $e_k$ , $k \in \mathbb{N}$ , une suite d'éléments (non nuls) de $E$ . Nous dirons que cette suite est une base inconditionnelle de $E$ si d'une part les combinaisons linéaires finies des $e_k$ , $k \in \mathbb{N}$ , sont denses dans $E$ et si, d'autre part, il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que, pour tout entier $k \geqslant 1$, toute suite $\alpha_o,\ldots,\alpha_k$ , de scalaires et toute suite $\beta_o,\ldots,\beta_k$ vérifiant $|\beta_j| \leqslant |\alpha_j|$ pour $0 \leqslant j \leqslant k$ , on ait

$$\|\beta_o e_o + \ldots + \beta_k e_k\|_E \leqslant C\|\alpha_o e_o + \ldots + \alpha_k e_k\|_E \quad .$$

Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de $E$ , tout élément $x \in E$ s'écrit, de façon unique, $x = \alpha_o e_o + \ldots + \alpha_k e_k + \ldots$ où la série est commutativement convergente vers $x$ et où les coefficients $\alpha_o,\ldots,\alpha_k,\ldots$ sont alors unique. Le fait qu'une suite $e_o,\ldots,e_k,\ldots$ soit une base inconditionnelle a toujours une interprétation en théorie des opérateurs. On désigne, en effet, par $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E,E)$ l'algèbre commutative des opérateurs continus de $E$ qui sont diagonalisés dans la base de Schauder constituée par les $e_k$ , $k \in \mathbb{N}$. Le fait que la suite des $e_k$ , $k \in \mathbb{N}$ , soit une base inconditionnelle s'exprime par le fait que la correspondance qui à $T \in A$ associe la suite $\lambda_k, k\in\mathbb{N}$, des valeurs propres de T dans la base des $e_k, k\in\mathbb{N}$, est un isomorphisme entre les algèbres $A$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$

Dans le cas des bases orthonormées d'ondelettes, l'algèbre $A$ est composée d'opérateurs de Calderon-Zygmund généralisés décrits par la définition suivante.

Définition 4. Un opérateur défini au sens faible $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ est un opérateur de Calderon-Zygmund si les deux propriétés suivantes sont vérifiées

(a) T est continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

(b) il existe une fonction $K(x,y)$, définie si $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^n$, et $x \neq y$, continue sur cet ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ et telle que

(b.1) $$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}$$

(b.2) $$|\partial/\partial x_j\, K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1} \quad \text{si } 1\leq j\leq n$$

(b.3) $$|\partial/\partial y_j\, K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1} \quad \text{si } 1\leq j\leq n$$

(b.4) $Tf(x) = \int K(x,y)f(y)dy$ pour toute fonction $f\in\mathcal{D}$ et tout $x$ n'appartenant pas au support de $f$.

La continuité sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ de ces opérateurs s'établit, si $1<p<\infty$, par les méthodes de "variable réelle" dont A.P. Calderon et A. Zygmund ont été les pionniers. La continuité sur les autres espaces fonctionnels (Sobolev, Besov etc...) a été étudiée par P.G. Lemarié et M. Meyer (Wu Han, Chine). Les critères de continuité sur ces divers espaces fonctionnels s'écrivent à l'aide du "symbole" T(1) de l'opérateur T tel qu'il a été introduit par G. David et J.L. Journé. Si, par exemple, $T(1) = 0$ (modulo les fonctions constantes) alors T est continu sur tous les espaces de Besov $B_q^{s,p}$ où $0<s<1$, $1\leq p\leq\infty$ et $1\leq q\leq\infty$ ainsi que sur l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$. Si $T^*(1) = 0$, alors T est continu sur l'espace de Hardy généralisé $H^1(\mathbb{R}^n)$. Cela implique que les ondelettes forment une base inconditionnelle de $H^1(\mathbb{R}^n)$ et des espaces fonctionnels $B_q^{s,p}$. Si l'on veut considérer des valeurs de $s$ appartenant à $]1,2[$, il convient d'ajouter à (b.2) les conditions correspondantes portant sur les dérivées secondes. Ces conditions nécessitent l'usage d'ondelettes d'ordre 2. La condition suffisante $T(1) = 0$ (modulo les fonctions constantes) sera alors complétée par $T(x_j) = 0$ (modulo les fonctions affines) pour $1\leq j\leq n$. Ceci est fourni par (1.12).

Mais avant d'aller plus loin, il est temps de donner des exemples d'analyse graduée.

2. EXEMPLES D'ANALYSES GRADUEES.

Le premier exemple est didactique. Il a pour objet de montrer qu'une analyse graduée ne conduit pas toujours à des ondelettes. On fixe un nombre positif $\ell$ et l'on appelle $V_o$ le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ composé des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx$ est portée par $[-\ell,\ell]$. Alors $V_j$ est défini, de façon semblable, par la condition que $\hat{f}(\xi) = 0$ presque-partout pour $|\xi|>2^j\ell$. Dans cet exemple, $\Gamma$ est le sous-groupe $\pi\ell^{-1}\mathbb{Z}$ et (1.5) se réduit à la formule de Plancherel.

Dans ce cas il est très facile de caractériser les fonctions $\psi \in W_o$ telles que $\psi(x-\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, soit une base orthonormée de $W_o$. La condition est $|\hat{\psi}(\xi)| = 1$ si $\ell \leq |\xi| \leq 2\ell$ et $\hat{\psi}(\xi) = 0$ ailleurs. Mais alors (1.7) est impossible car cette condition impliquerait la continuité de $\hat{\psi}(\xi)$.

Le second exemple est une correction du premier. Cette correction a pour objet la construction d'une base d'ondelettes d'ordre infini pour $L^2(\mathbb{R})$. Par ailleurs la condition (1.5) est toujours vérifiée dans notre second exemple.

On appelle $\theta(\xi)$ une fonction paire dans $C_o^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\theta(\xi) = 0$ si $\xi \geq \frac{4\ell}{3}$, $\theta(\xi) = 1$ si $0 \leq \xi \leq \frac{2\ell}{3}$, $0 \leq \theta(\xi) \leq 1$ pour tout $\xi \geq 0$ et finalement $\theta(2\ell-\xi) + \theta(\xi) = 1$ si $0 \leq \xi \leq 2\ell$.

Alors la fonction $\eta(\xi) = \sin(\frac{\pi}{2}\,\theta(\xi))$ vérifie l'identité $\sum_{-\infty}^{\infty} |\eta(\xi+2k\ell)|^2 = 1$. Il en résulte que la collection $\exp(ik\pi\ell^{-1}\xi)\eta(\xi)$, $k \in \mathbb{Z}$, est une suite orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$. Ensuite on appelle $\varphi$ la fonction de la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz telle que $\hat{\varphi}(\xi) = \eta(\xi)$. Alors la suite $\varphi(x-k\pi\ell^{-1})$, $k \in \mathbb{Z}$, est également une suite orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$. Finalement on définit $V_o$ comme le sous-espace (fermé) de $L^2(\mathbb{R})$ dont $\varphi(x-k\pi\ell^{-1})$, $k \in \mathbb{Z}$, est une base hilbertienne. Les autres espaces $V_j$ sont définis par $f(x) \in V_o \Leftrightarrow f(2^jx) \in V_j$ $(j \in \mathbb{Z})$ et il est immédiat de vérifier que les $V_j$, $j \in \mathbb{Z}$, constituent une analyse graduée. Nous verrons plus loin que cette analyse graduée conduit à une base d'ondelettes d'ordre infini.

La troisième famille d'exemples a été découverte indépendamment par G. Battle (Département de Mathématiques, Cornell University) et par P.G. Lemarié. G. Battle est un physicien théoricien qui utilise les bases d'ondelettes pour faire, de façon plus commode, les calculs nécessités par la physique quantique des champs.

Cette troisième famille d'exemples a aussi le mérite d'expliciter le lien entre les analyses graduées, la théorie des martingales et les méthodes classiques de l'analyse numérique (fonctions splines et éléments finis).

On fixe un entier $q \geq 0$. On appelle $V_o$ le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ composé des fonctions de classe $C^{q-1}(\mathbb{R})$ sur toute la droite réelle dont la restriction à chaque intervalle $[k,k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, est un polynôme $P_k(x)$ de degré au plus $q$. Si $q = 0$, $V_o$ est le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ composé des fonctions en escalier ayant des sauts (éventuels) en $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce dernier cas, l'algorithme du paragraphe 3 produira le système de Haar alors que, si $q \geq 1$, on obtient de véritables ondelettes.

## 3. LES DEUX ALGORITHMES FONDAMENTAUX.

Théorème 1. Si $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une analyse graduée, alors il existe une fonction $\varphi \in V_o$ telle que la collection $\varphi(x-\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, soit une base orthonormée de $V_o$.

Le théorème 1 s'obtient facilement à partir d'un algorithme plus général que nous allons rappeler. Soit $H$ un espace de Hilbert et soit $(e_j)_{j\in J}$ une suite de vecteurs de $H$ ayant les deux propriétés suivantes

(3.1) $$0 < c \leq \|e_j\| \leq C \quad \text{pour tout } j \in J$$

(3.2) $$e_j,\ j \in J\ , \text{ est une base inconditionnelle de } H\ .$$

Suivant [2], on pose alors $T(x) = \sum\limits_{j\in J} \langle x|e_j\rangle e_j$ et l'on vérifie aussitôt que $T$ est un opérateur continu, auto-adjoint et que l'on a $C_1 \mathbb{1} \leq T \leq C_2 \mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est l'opérateur identité et où $C_2 \geq C_1 > 0$. Alors $T^{-1/2}$ existe, est un opérateur auto-adjoint et $T^{-1/2}(e_j)$, $j \in J$, est une base hilbertienne de $H$.

La matrice de $T$ dans la base inconditionnelle des $e_j$, $j \in J$, est la matrice de Gram $M = (\langle e_j|e_k\rangle)_{(j,k)\in J\times J}$. Cette matrice est elle-même auto-adjointe et positive. Il en résulte que $A = M^{-1/2}$ (qui résulte du calcul symbolique sur les matrices définies-positives) est la matrice de $T^{-1/2}$ dans la base inconditionnelle des $e_j$, $j \in J$. Finalement on a obtenu

(3.3) $$T^{-1/2}(e_j) = \sum_{k\in J} \alpha(j,k) e_k$$

où $(\alpha(j,k))_{(j,k)\in J\times J} = A$.

Il reste à calculer $A$ ce que nous allons faire dans le cas particulier que nous allons maintenant étudier. Nous partons donc des fonctions $g(x-\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, fournies par (1.4). Elles jouent le rôle des $e_j$, $j \in J$.

Alors $M$ est une matrice de Toeplitz dont les coefficients sont $\mu(\gamma-\gamma') = \int g(x-\gamma)\bar{g}(x-\gamma')dx$. Le calcul symbolique sur $M$ s'obtient donc par la transformation de Fourier. Le symbole de $M$ est $M(\xi) = \sum_{\gamma\in\Gamma^*} |\hat{g}(\xi+\gamma)|^2$ où $\Gamma^*$ est le réseau dual de $\Gamma$. Le symbole de $M^{-1/2}$ est évidemment $(M(\xi))^{-1/2}$ et finalement (3.3) donne $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{g}(\xi)(M(\xi))^{-1/2}$.

<u>Théorème</u> 2. <u>Il existe</u> $2^d-1$ <u>fonctions</u> $\psi_m$, $1\leqslant m< 2^d$, <u>dans</u> $W_o$ <u>telles que la collection des fonctions</u> $\psi_m(x-\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, $1\leqslant m < 2^d$, <u>soit une base orthonormée de</u> $W_o$.

Avant de vérifier ce résultat, nous pouvons observer que les fonctions $\psi_m$, $1 \leqslant m <2^d$, ne sont certainement pas uniques mais que leur nombre l'est. Ceci résulte de l'observation suivante.

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> $H$ <u>un espace de Hilbert et soit</u> $U_\gamma : H \to H$, $\gamma\in\Gamma$, <u>un groupe commutatif d'isomorphismes unitaires de</u> $H$. <u>Supposons qu'il existe un entier</u> $q \geqslant 1$ <u>et</u> $q$ <u>vecteurs</u> $e_1,\dots,e_q$ <u>de</u> $H$ <u>tels que la collection des</u> $U_\gamma(e_1),\dots, U_\gamma(e_q)$, $\gamma \in\Gamma$, <u>soit une base hilbertienne de</u> $H$. <u>Alors si une suite</u> $U_\gamma(f_1),\dots,U_\gamma(f_p)$, $f_j\in H$, $\gamma \in \Gamma$, <u>est orthonormée dans</u> $H$, <u>on a nécessairement</u> $1\leqslant p\leqslant q$.

Revenons au théorème 2. On commence par observer qu'il existe une fonction $\Gamma^*$-périodique $m_o(\xi)\in L^2(G)$ telle que $\hat{\varphi}(2\xi) = m_o(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$. Cette existence résulte de l'inclusion $V_j \subset V_{j+1}$ $(j\in \mathbb{Z})$. Désignons par $R$ le groupe fini $(1/2\Gamma^*)/\Gamma^*$ inclus dans $G = \mathbb{R}^d/\Gamma^*$. On cherche alors les fonctions $\psi$ en utilisant $R$ privé de $0$ comme ensemble d'indices. On convient que $\psi_o = \varphi$. Le fait que $\psi_s$ appartient à $V_1$ pour $s \in R$ nous amène à écrire $\hat{\psi}_s(2\xi) = m_s(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ où $m_s(\xi)\in L^2(G)$, $m_s(\xi)$ étant $\Gamma^*$-périodique. Si $s = 0$, on retombe sur l'identité définissant $m_o(\xi)$.

Le fait que la collection $2^{dj/2}\varphi(2^jx-\gamma)$, $\gamma\in \Gamma$, soit une base orthonormée de $V_j$ implique $\sum_{r\in R} |m_o(\xi+r)|^2 = 1$. Finalement la collection des fonctions $\psi_s(x-\gamma)$, $s\in R$, $\gamma\in\Gamma$, est une base orthonormée de $V_1$ si et seulement si la matrice $S(\xi) = (m_s(\xi+r))_{(s,r)\in R\times R}$ est unitaire. On est donc amené à compléter une matrice unitaire dont on connait un vecteur colonne.

Revenons à deux cas particuliers.

Si $d = 1$ et si $\Gamma = \mathbb{Z}$, il y a seulement une fonction $\psi$ que l'on cherchera sous la forme $\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$. La matrice $S(\xi)$ est ici

$\begin{pmatrix} m_o(\xi) & m_1(\xi) \\ m_o(\xi+\pi) & m_1(\xi+\pi)\end{pmatrix}$ et nous avons $|m_o(\xi)|^2 + |m_o(\xi+\pi)|^2 = 1$. Un choix naturel de $m_1(\xi)$ est donné par $m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{m_o}(\xi+\pi)$. Supposons, en outre, $\hat{\varphi}(\xi) \geqslant 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Alors on a $|\hat{\psi}(\xi)| = \sqrt{(\hat{\varphi}(\xi/2))^2-(\hat{\varphi}(\xi))^2}$ et $\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}|\hat{\psi}(\xi)|$ .

Si $d = 2$, nous supposerons que $\varphi(x)$ est une fonction paire, à valeurs réelles. Là encore, on peut commencer par faire un changement de variables linéaire de sorte que $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ . Le groupe R se compose alors des 4 suites $(\varepsilon_1\pi,\varepsilon_2\pi)$ où $\varepsilon_j = 0$ ou 1 et où l'addition se fait modulo $2\pi$ . La matrice $S(\xi)$ s'écrit $(m_j(\xi_1+\varepsilon_1\pi,\xi_2+\varepsilon_2\pi))_{(j,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$ où $0 \leqslant j \leqslant 3$ , $\varepsilon_1 = 0$ ou 1, $\varepsilon_2 = 0$ ou 1 . S. Jaffard donne l'algorithme $m_1(\xi_1,\xi_2) = e^{-i\xi_1} m_o(\xi_1+\pi,\xi_2)$, $m_2(\xi_1,\xi_2) = e^{-i(\xi_1+\xi_2)} m_o(\xi_1,\xi_2+\pi)$ et finalement $m_3(\xi_1,\xi_2) = e^{-i\xi_2} m_o(\xi_1+\pi,\xi_2+\pi)$.

## 4. APPLICATION DES ALGORITHMES PRECEDENTS.

Nous commençons par l'analyse graduée donnée dans le second exemple. Nous supposerons $\Gamma = \mathbb{Z}$. Alors $\hat{\varphi}(\xi)$ est réelle, comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ , à 0 hors de $[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ , est paire et vérifie $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi+2k\pi)|^2 = 1$ . Alors l'algorithme du paragraphe 3 fournit une ondelette $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\psi}(\xi)$ soit supportée par $\frac{2\pi}{3} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8\pi}{3}$ . De plus $\psi(x)$ est réelle et vérifie $\psi(1-x) = \psi(x)$.

Bien qu'appartenant à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz, la fonction $\psi(x)$ n'a pas une très bonne décroissance numérique. C'est à dire que dans les intervalles de valeurs de $x$ d'usage courant, $\psi(x)$ ressemble à une sinusoïde un peu amortie.

Avant de quitter cet exemple, nous allons vérifier que l'opérateur d'échantillonnage $T : V_o \to \ell^2(\mathbb{Z})$ est tout simplement la restriction usuelle. En effet on définit $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par $\hat{w}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)[\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi+2k\pi)]^{-1}$ . On vérifie immédiatement que $w$ appartient à $V_o$ et que $w(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ et que $w(0) = 1$ . L'existence de cette fonction $w$ assure la surjectivité de l'opérateur de restriction $T : V_o \to \ell^2(\mathbb{Z})$ qui est, en fait, un isomorphisme.

Nous considérons maintenant le cas des fonctions splines d'ordre 1. La construction que nous allons faire sera ensuite généralisée aux splines d'ordre supérieur.

Dans le cas des splines d'ordre 1, $V_o \subset L^2(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues, de carré intégrable, dont la restriction à chaque intervalle $[k,k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, est une fonction affine. Le groupe $\Gamma$ est $\mathbb{Z}$ et finalement $V_j$

est défini par $f(x) \in V_o \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$ .

La fonction $g(x)$ exigée par (1.4) est la fonction triangle $\Delta(x) \in V_o$ définie par $\Delta(0) = 1$ et $\Delta(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}$ et si $k \neq 0$ . Alors toute fonction $f \in V_o$ s'écrit, de façon unique, $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k)\Delta(x-k)$. On a $\hat{\Delta}(\xi) = \frac{\sin^2 \xi/2}{(\xi/2)^2}$ et l'algorithme du théorème 1 donne $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\Delta}(\xi)\ (1 - \frac{2}{3}\sin^2\xi/2)^{-1/2}$ .

Ensuite l'algorithme du théorème 2 fournit

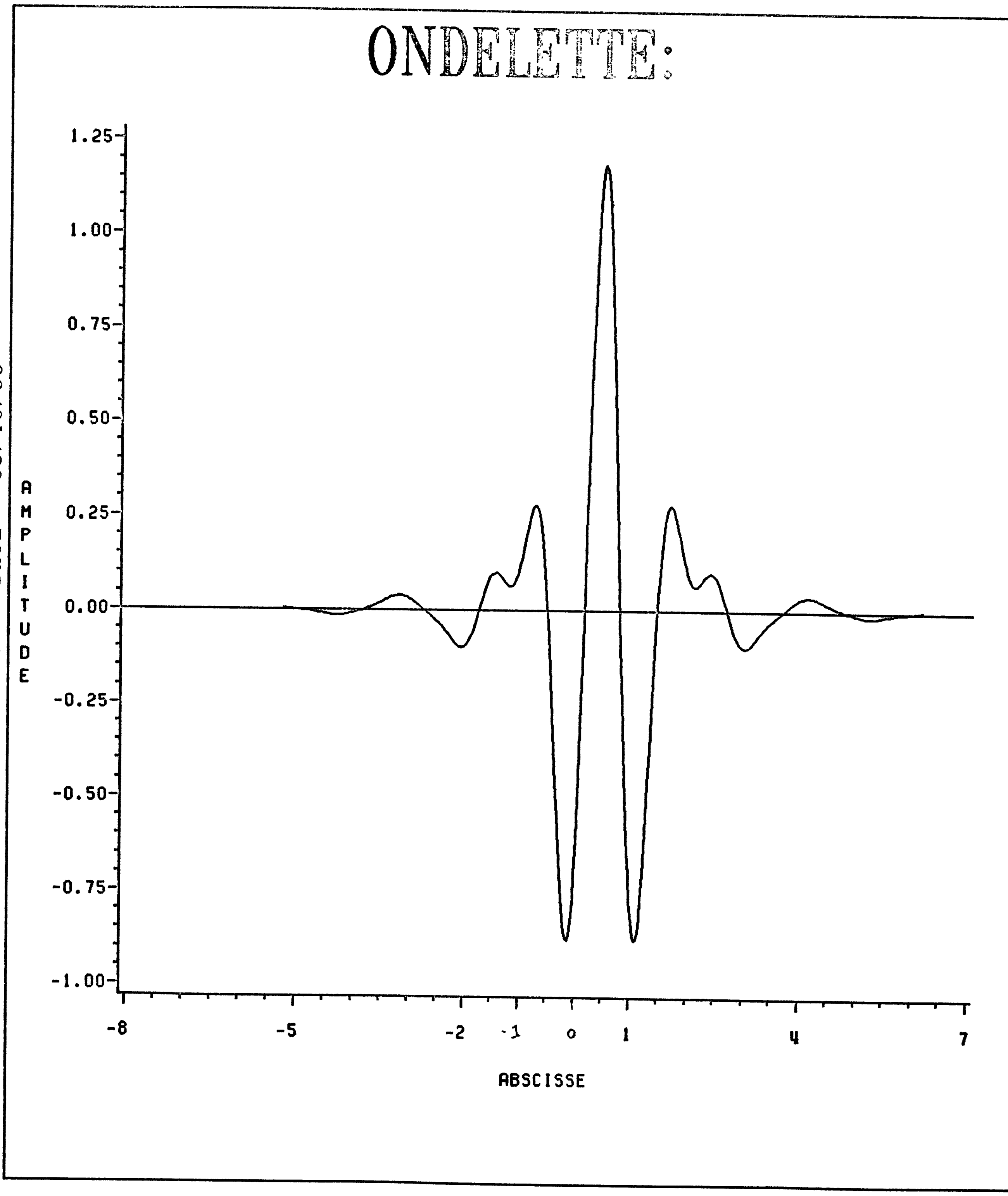
$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \sin^2\xi/4 \left(\frac{\sin\xi/4}{\xi/4}\right)^2 \omega(\xi) \text{ où}$$

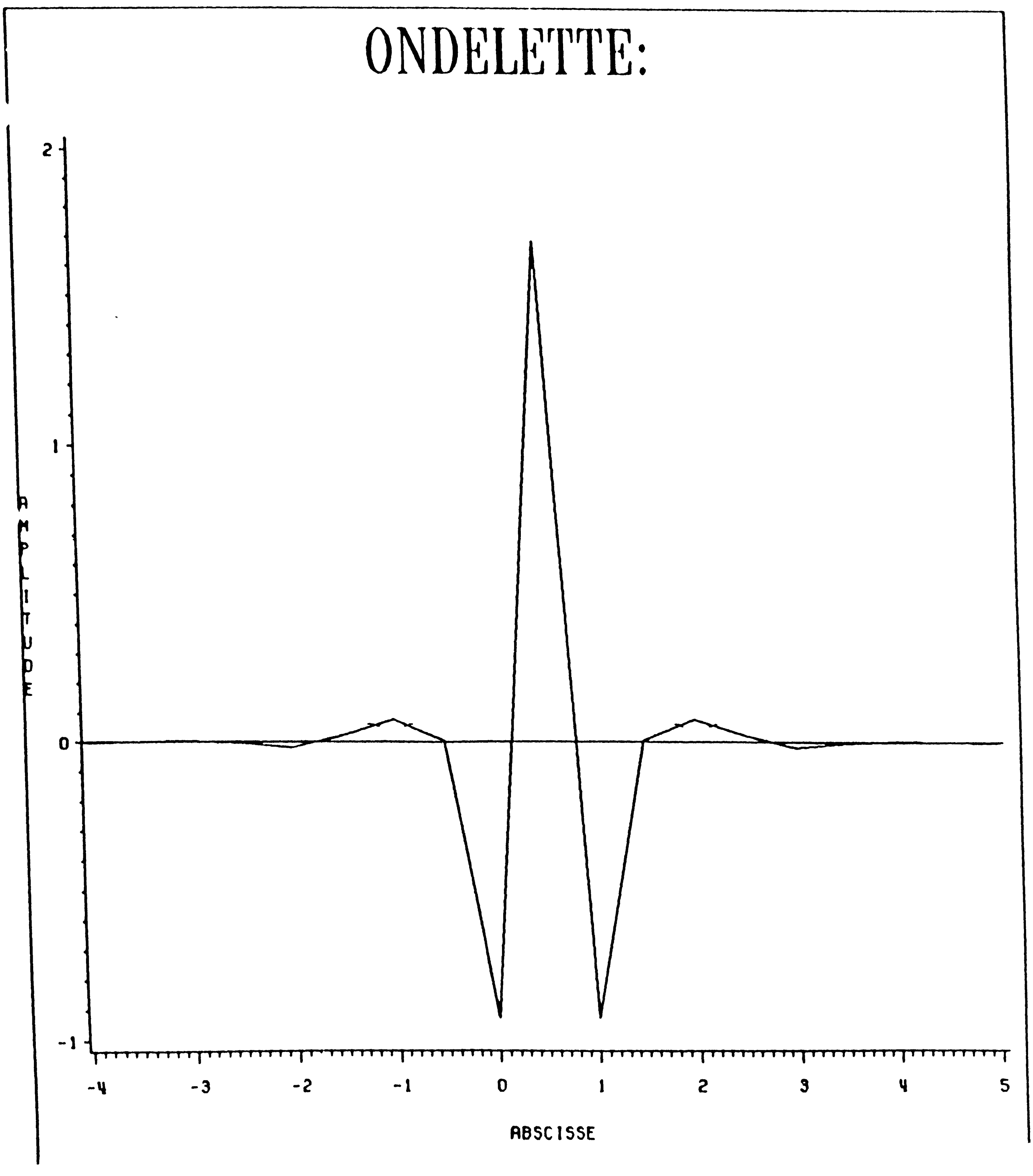
$$\omega(\xi) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\xi/4\right)^{-1} \left(\frac{7-\cos\xi}{2+\cos\xi}\right)^{1/2} .$$

Le graphe de $\psi(x)$ est fourni sur la page suivante. On a $|\psi(x)| \leqslant C(2+\sqrt{3})^{-|x|}$ et cette décroissance exponentielle est numériquement effective.

Le cas des splines quadratiques est tout à fait différent au départ. On désigne par $V_o \subset L^2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $C^1(\mathbb{R})$ dont la restriction à chaque intervalle $[k,k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, est un polynôme du second degré. Alors l'opérateur de restriction (usuelle) des fonctions $f \in V_o$ à $\mathbb{Z}$ n'est pas surjectif. On montre cependant l'existence d'une fonction $g$ vérifiant (1.4). En désignant par $\chi$ la fonction indicatrice de $[0,1]$, la fonction $g$ n'est autre que $\chi * \chi * \chi$ . Les calculs des fonctions $\varphi$ et $\psi$ sont alors faciles et laissés au lecteur.

Avant de quitter les fonctions splines, nous allons rappeler le célèbre théorème de Holladay reliant l'échantillonage par les splines cubiques et l'approximation quadratique par des splines linéaires. Désignons par $V_j$ (resp. $\mathcal{V}_j$) l'analyse graduée constituée par les splines linéaires (resp. cubiques). Soit $f(x)$ une fonction continue de la variable réelle $x$ appartenant à l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$. On définit $f_j \in \mathcal{V}_j$ par $f_j(k2^{-j}) = f(k2^{-j})$, $k \in \mathbb{Z}$. Cette fonction $f_j$ est unique et le théorème de Holladay exprime que $f_j''$ est la projection orthogonale de $f''$ sur $V_j$ . Le théorème de Holladay est une des justifications de l'emploi de la norme $L^2$ pour définir une échelle graduée.


ONDELETTE:
AMPLITUDE
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
-0.75
-1.00
-8
-5
-2
-1
0
1
4
7
ABSCISSE


ONDELETTE:
2
1
0
-1
AMPLITUDE
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
ABSCISSE

## 5. ANALYSES GRADUEES EN PLUSIEURS DIMENSIONS.

Pour alléger les notations, nous nous contenterons d'examiner le cas de la dimension deux. Nous commençons par l'algorithme canonique de construction d'une analyse graduée bi-dimensionnelle.

Soit $V_j$ , $j \in \mathbb{Z}$ , une analyse graduée en dimension un. Désignons par $V_j \hat{\otimes} V_j$ la fermeture dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ du produit tensoriel algébrique $V_j \otimes V_j$ . Supposons que le réseau $\Gamma$ associé à $V_o$ soit $\mathbb{Z}$. Alors les fonctions $\varphi(x_1-k_1)\varphi(x_2-k_2) = \varphi(x-k)$ , $k = (k_1,k_2)$, forment une base orthonormée de $V_o \hat{\otimes} V_o$ . On en déduit aussitôt que la suite $\mathcal{V}_j = V_j \hat{\otimes} V_j$ , $j \in \mathbb{Z}$ , est une analyse graduée de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Désignons par $\mathcal{W}_j$ le complément orthogonal de $\mathcal{V}_j$ dans $\mathcal{V}_{j+1}$ . On a $\mathcal{W}_j = (V_j \hat{\otimes} W_j) \oplus (W_j \hat{\otimes} V_j) \oplus (W_j \hat{\otimes} W_j)$. Il n'est alors pas nécessaire d'utiliser le théorème 2 pour obtenir une base orthonormée de $\mathcal{W}_o$ . En effet, si $\psi(x_1-k_1)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, est la base orthonormée de $W_o$ fournie par le théorème 2 , il en résulte que les fonctions

$$(5.1) \quad \varphi(x_1-k_1)\psi(x_2-k_2), \psi(x_1-k_1)\varphi(x_2-k_2), \psi(x_1-k_1)\psi(x_2-k_2), \; k_1 \in \mathbb{Z} , \; k_2 \in \mathbb{Z} ,$$

constituent une base orthonormée de $\mathcal{W}_o$ . Alors la base orthonormée correspondante de $\mathcal{W}_j$ s'obtient par un simple changement d'échelle. Enfin, en réunissant toutes ces bases, on obtient une base d'ondelettes pour $L^2(\mathbb{R}^2)$ , ceci à condition que la fonction $\psi$ et la fonction $\varphi$ utilisées aient la régularité et la décroissance nécessaire à l'infini.

La base d'ondelettes (5.1) cadre avec le théorème 2 puisque $2^d-1=3$ si $d = 2$.

Voici un second exemple qui n'est pas obtenu par l'algorithme (précédent) de produit tensoriel.

On désigne par $\Gamma$ le réseau $\mathbb{Z}e_o + \mathbb{Z}e_1$ où $e_o = (1,0)$ et $e_1 = (1/2,\sqrt{3}/2)$. On appelle $T_o$ le triangle dont les sommets sont 0, $e_1$ et $e_2$ . On désigne par $T'_o$ le triangle symétrique par rapport à (0,0). Finalement $\gamma + T_o$ et $\gamma + T'_o$ , $\gamma \in \Gamma$ , constituent un pavage du plan en triangles équilatéraux que l'on notera $T_\gamma$ et $T'_\gamma$ , $\gamma \in \Gamma$. Enfin $V_o$ désignera le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R}^2)$ constitué par les fonctions qui sont affines sur chaque triangle $T_\gamma$ , $\gamma \in \Gamma$, et sur chaque triangle $T'_\gamma$ , $\gamma \in \Gamma$ . On définit alors les $V_j$ par (1.2) et l'on démontre que ces espaces $V_j$ , $j \in \mathbb{Z}$ , constituent une analyse graduée. S. Jaffard a explicité la fonction $\varphi$ et les trois fonctions $\psi$ qui résultent de l'algorithme du troisième paragraphe.

## 6. RETOUR AUX PARAPRODUITS.

Les considérations qui précédent me permettent de réaliser un ancien rêve. Ecrire d'une même coulée les opérateurs de transformation de martingale et les opérateurs de paramultiplication entre BMO et $L^2$ .

Désignons, en effet, par $V_j^{(m)}$ l'analyse graduée de $L^2(\mathbb{R})$ formée par les splines d'ordre m . Si m = 0 , les fonctions de $V_0^{(0)}$ sont les fonctions en escalier de $L^2(\mathbb{R})$ dont les sauts sont situés en $k \in \mathbb{Z}$. Si m = 1 , il s'agit de splines linéaires etc... On appelle $E_j^{(m)}$ l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur $V_j^{(m)}$ et l'on pose $D_j^{(m)} = E_{j+1}^{(m)} - E_j^{(m)}$.

On pose finalement, si a(x) et f(x) sont deux fonctions,

$$\pi_m(a,f) = \sum_{-\infty}^{\infty} (D_j^{(m)}a)\ (E_j^{(m)}f) \quad . \tag{6.1}$$

Le noyau-distribution de l'opérateur qui à f associe $\pi_m(a,f)$ est

$$K_m(a;x,y) = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} (D_j^{(m)}a)(x)2^j\varphi_m(2^jx-k)\varphi_m(2^jy-k). \tag{6.2}$$

On a, par ailleurs

$$D_j^{(m)}a(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_m(2^jx-k)\ \int 2^j\psi_m(2^jy-k)a(y)dy \quad . \tag{6.3}$$

De (6.3), il résulte que si $m \geqslant 1$ et si a(x) appartient à l'espace BMO($\mathbb{R}$) , on a $\|D_j^{(m)}a\|_\infty \leqslant C_m\|a\|_{BMO}$ . Pour le voir, il suffit d'observer que $2^j\psi_m(2^jy-k)$ est une molécule au sens de G. Weiss. Finalement, si $m \geqslant 1$, on a $|K_m(a;x,y)| \leqslant C_m\|a\|_{BMO}|x-y|^{-1}$ et

$$|\partial/\partial x\ K_m(a;x,y)| + |\partial/\partial y\ K_m(a;x,y)| \leqslant C_m\|a\|_{BMO}(x-y)^{-2} \ .$$

Cela permet d'appliquer le théorème de David et Journé pour étudier la continuité de l'opérateur qui à f associe $\pi_m(a,f)$. On appelle $T_a$ cet opérateur et la propriété de continuité faible se vérifie immédiatement.
On a $T_a(1) = a$ et $T_a^*(1) = 0$ . Cette dernière propriété résulte de l'orthogonalité entre $D_j(a)$ et $E_j(f)$. Le critère de David et Journé s'applique donc et, pour tout $m \geqslant 1$ , il existe une constante $C_m$ telle que

$$\|\pi_m(a,f)\|_2 \leqslant C_m\ \|a\|_{BMO}\ \|f\|_2 \quad . \tag{6.4}$$

Si m = 0 , l'opérateur $E_j^{(0)}$ est l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu engendrée par les intervalles dyadiques $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[, k \in \mathbb{Z}$.

L'opérateur $\pi_o(a,f)$ est donc effectivement un opérateur de transformation de martingale. C'est la martingale $\sum_{-\infty}^{\infty} D_j^{(0)} a$ qui est transformée par les multiplications par $E_j^{(0)}(f)$. La continuité de $\pi_o(a,f)$ est exprimée par une inégalité analogue à (6.4) mais où l'espace BMO($\mathbb{R}$) est remplacé par sa version dyadique (où seuls les intervalles dyadiques sont utilisés dans la définition de la norme BMO).

## 7. PERSPECTIVES.

Nous allons esquisser les travaux menés par S. Jaffard et P.G. Lemarié. Leur objet est d'adapter la construction des ondelettes à des situations géométriques générales où il n'y a plus d'action du groupe affine.

Le lemme essentiel nécessaire au calcul des coefficients de la matrice $G^{-1/2}$, servant à orthonormaliser une base inconditionnelle, est extrait d'un manuscrit inédit de P.G. Lemarié.

On considère un ensemble $J$ dénombrable muni d'une distance $d : J \times J \to \mathbb{N}$ et une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in J\times J}$ qui vérifie les propriétés suivantes

(7.1) $$C_1 \mathbb{1} \leqslant A \leqslant C_2 \mathbb{1} \quad \text{où} \quad C_2 \geqslant C_1 > 0$$

(7.2) $$a(i,j) = 0 \quad \text{si } d(i,j) \geqslant m+1$$

Alors les coefficients $b(i,j)$ de la matrice $A^{-1}$ vérifient

(7.3) $$|b(i,j)| \leqslant \frac{1}{C_1}\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\right)^{d(i,j)/m}$$ et les coefficients $c(i,j)$ de $A^{-1/2}$ vérifient

(7.4) $$|C(i,j)| \leqslant \frac{C_2}{C_1^{3/2}}\left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right)^{d(i,j)/m} .$$

Ce lemme s'applique à la matrice de Gram $G = (g(i,j))_{(i,j)\in J\times J}$ d'une base inconditionnelle $e_j$, $j\in J$, d'un espace de Hilbert $H$.

Donnons un exemple d'application de ce lemme. On considère une analyse graduée $V_j$, $j\in\mathbb{Z}$, telle que la fonction $g(x)$ soit lipschitzienne et à support compact.

Alors la fonction $\varphi$ obtenue par l'algorithme du paragraphe 3 est à décroissance exponentielle.

Pour simplifier la discussion, nous nous limitons au cas de la dimension 1. Définissons $m_o(\xi)$ par $\hat{\varphi}(2\xi) = m_o(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ et supposons $\Gamma = \mathbb{Z}$. Alors $m_o(\xi)$ est $\Gamma$-périodique et est analytique-réelle. Il en résulte aussitôt (par la construction du paragraphe 3) que toutes les ondelettes que l'on obtient à partir des analyses graduées en fonctions splines ont une décroissance exponentielle.

Mais le lemme précédent et ses variantes permettent également de traiter des généralisations de la notion d'analyse graduée à des situations où il n'y a plus de dilatation ou d'action de groupe. Voici un exemple. On considère la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ et la suite des maillages donnée par le procédé récurrent suivant. On part des huit triangles curvilignes dont les côtés sont des arcs de grands cercles et les sommets sont les points $(\pm 1,0,0)$, $(0,\pm 1,0)$ et $(0,0,\pm 1)$. Ils forment le maillage $S_o$. Pour passer de $S_j$ à $S_{j+1}$ on divise chacun des triangles curvilignes composant $S_j$ en quatre sous-triangles en décidant que les sommets des sous-triangles sont soit les sommets initiaux, soit les milieux des côtés. Enfin on désigne par $V_j$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur la sphère dont la restriction à chaque triangle $T(j,k) \in S_j$ coïncide avec une fonction linéaire $a_k x + b_k y + c_k z$ (où $x$, $y$ et $z$ sont les coordonnées usuelles dans $\mathbb{R}^3$).

On pose alors comme ci-dessus $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et l'on montre l'existence d'une base orthonormée $\psi_{j,\gamma}$, $\gamma \in \Gamma_j$, de $W_j$, indexée par l'ensemble fini des côtés $\gamma$ des triangles composant $S_j$. Ces ondelettes sont par leur position et leur forme, adaptées aux triangles composant $S_j$ et les opérateurs diagonaux dans cette base sont des opérateurs de Calderón-Zygmund appartenant à l'algèbre de Lemarié de la sphère $S^2$.

BIBLIOGRAPHIE.


[1] G. BATTLE : A block spin construction of ondelettes, Part I : Lemarié functions (à paraître).

[2] I. DAUBECHIES, A. GROSSMANN and Y. MEYER : Painless non orthogonal expansions, J. Math. Phys. 27 (5) May 1986 1271-1283.

[3] G. DAVID and J.L. JOURNE : A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, Annals of Mathematics 120 (1984) 371-397.

[4] S. JAFFARD : Communication orale

[5] P.G. LEMARIE : Ondelettes à localisation exponentielle. A paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

[6] P.G. LEMARIE et Y. MEYER : Ondelettes et bases hilbertiennes. Revista Matematica Iberoamericana Vol 2, 1, 1986.

[7] S. MALLAT : An efficient image representation for multiscale analysis, Grasp laboratory, Dept. of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Philadelphia PA 19104-6389 USA.

*
* *
*