J. Nourrigat

Systèmes sous-elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 5, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

SYSTEMES SOUS-ELLIPTIQUES

par J. NOURRIGAT

Exposé n°V

14 Octobre 1986

En adaptant une technique de microlocalisation de Fefferman-Phong (voir [4]), nous démontrons une conjecture, formulée en 1979 dans une note [6] avec B. Helffer, sur les liens entre systèmes d'opérateurs pseudodifférentiels et représentations de groupes nilpotents. Comme exemple d'application, nous donnons une nouvelle preuve du théorème classique de Egorov [2] et Hörmander [10] sur les opérateurs sous-elliptiques. La méthode n'est peut être pas beaucoup plus simple que celle de [10], mais se prête à plus de généralisations : seuls les systèmes sous-elliptiques sont étudiés ici, mais la méthode s'étendrait probablement aux opérateurs à caractéristiques multiples, ce qui contiendrait de nombreux résultats des années 1970, (voir la bibliographie de [7]).

La méthode de Fefferman-Phong n'est que brièvement esquissée dans [4], et je suis très reconnaissant à D.H. Phong de m'avoir exposé de manière plus détaillée la preuve des résultats annoncés dans [4]. Les idées de cette preuve sont utilisées (avec certaines simplifications) dans la démonstration du théorème principal annoncé ici (théorème 2), que l'on trouvera dans le manuscrit [19].

1. ARTIFICE DE KORN GENERALISE.

On considère un système $X_1(x,\xi,\lambda),\dots X_{2p}(x,\xi,\lambda)$ de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$, à valeurs réelles, dépendant d'un paramètre $\lambda \geqslant 1$. On suppose que, pour tout multi-indice (α,β), il existe $C_{\alpha\beta} > 0$, indépendant de λ, tel que :

$$(1) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta X_j(x,\xi,\lambda)| \leqslant c_{\alpha\beta}\lambda^{1-|\beta|} \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \qquad \forall \lambda \geqslant 1$$

On verra le lien avec l'hypoellipticité aux § 3 et 4. Soit $X_j(\lambda)$ l'opérateur pseudo-différentiel associé aux symboles $X_j(x,\xi,\lambda)$. Le choix entre le calcul usuel et celui de Weyl n'a pas d'importance. Les propriétés des opérateurs $X_j(\lambda)$ quand λ est grand sont liées à celles de "systèmes limites" que nous allons définir.

Comme l'avait pressenti C. Rockland [20], et comme le suggèraient les travaux de Rothschild-Stein [22] (voir aussi Melin [16]), ces systèmes limites s'interprètent en termes de représentations de groupes nilpotents (cf.§ 2.5).

Cependant, pour le lecteur non spécialisé dans ce domaine, nous commencerons par définir ces systèmes explicitement, ce qui sera d'ailleurs utile pour les applications à l'hypoellipticité. Pour tout $\lambda \geqslant 1$, soit :

$$g_\lambda(x,\xi) = |x|^2 + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2} \quad \forall(x,\xi) \in R^{2n} \quad . \tag{2}$$

Définition 1. Pour tout entier $r \geqslant 1$, on note $\mathcal{L}_r$ l'ensemble des systèmes $\pi = (\pi(X_1),\ldots\pi(X_{2p}))$ d'opérateurs différentiels dans R^n ayant les propriétés suivantes :

1) Chacun des opérateurs $\pi(X_j)$ est de la forme suivante :

$$\pi(X) = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + A_n(x_1,\ldots,x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_n} + iB(x) \tag{3}$$

où les A_j et B sont des polynômes réels, ne dépendant que des variables indiquées.

2) Les commutateurs de longueur $\geqslant r+1$ des opérateurs $\pi(X_j)$ sont nuls.

3) Pour tout compact K de R^{2n} , il existe une suite d'applications symplectiques θ_ν définies au voisinage de K , à valeurs dans R^{2n} , et des suites (t_ν) et (λ_ν) de réels positifs, telles que :

3 a) La suite λ_ν tend vers $+\infty$, et la suite $t_\nu^r\lambda_\nu$ est bornée.

3 b) Le diamètre de l'image $\theta_\nu(K)$ pour la norme $(g_{\lambda_\nu})^{1/2}$ tend vers 0 .

3 c) On a, en notant $\pi(X_j)$ (x,ξ) le symbole complet de $\pi(X_j)$

$$\frac{1}{i}\,\pi(X_j)(x,\xi) = \lim_{\nu\to\infty} t_\nu X_j(\theta_\nu(x,\xi),\lambda_\nu) \qquad \forall(x,\xi) \in K \quad \forall j \leqslant 2p \ . \tag{4}$$

L'ensemble $\mathcal{L}_r$ intervient dans l'étude des opérateurs exprimés de manière polynomiale par rapport aux $X_j(\lambda)$. Pour éviter des récurrences fastidieuses, nous nous sommes limités aux polynômes d'ordre 1. Considérons, par exemple, les opérateurs suivants :

$$L_j(\lambda) = X_j(\lambda) + iX_{p+j}(\lambda) \qquad 1 \leqslant j \leqslant p \ . \tag{5}$$

Si π est un système dans $\mathcal{L}_r$, on pose, de même :

$$\pi(L_j) = \pi(X_j) + i\pi(X_{p+j})$$

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 2. Pour tout $r \geq 1$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
i) Il existe $C_o > 0$ tel qu'on ait, pour tous $\pi \in \mathcal{L}_r$ et $f \in \mathcal{S}(R^n)$:

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{2p} \|\pi(X_j) f\|^2 \leq C_o \sum_{j=1}^{p} \|\pi(L_j) f\|^2$$

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda_o(\varepsilon) > 0$ tel qu'on ait :

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{2p} \|X_j(\lambda) f\|^2 \leq (C_o+\varepsilon) \sum_{j=1}^{p} \|L_j(\lambda) f\|^2 + \varepsilon\lambda^{2/r} \|f\|^2$$

si $\lambda \geq \lambda_o(\varepsilon)$ et $f \in \mathcal{S}(R^n)$.

L'implication ii) $\Rightarrow$ i) est démontrée dans [17]. Quand $r = 1$, l'implication i $\Rightarrow$ ii) n'est autre que l' "artifice de Korn". Quand $r = 2$, l'implication i) $\Rightarrow$ ii) résulte des techniques de Hörmander [9] et a été démontrée sous la forme ci-dessus dans [7](chapitre 10). De nombreux travaux des années 1970 correspondaient à des cas particuliers de l'implication i) $\Rightarrow$ ii) ou de son analogue pour les expressions polynomiales d'ordre m . L'implication i) $\Rightarrow$ ii) est démontrée dans le cas général dans [19].

On peut supprimer le dernier terme dans le membre de droite de (7) s'il existe $C_1 > 0$ et $\lambda_1 > 0$ tels qu'on ait :

$$(8) \qquad \lambda^{2/r} \|f\|^2 \leq C_1 \sum_{j=1}^{2p} \|X_j(\lambda) f\|^2 \qquad \forall f \in \mathcal{S}(R^n) \qquad \forall \lambda \geq \lambda_1$$

Rappelons la condition qui est nécessaire [17] et suffisante (cf.[1] et [3]) pour qu'il en soit ainsi. On note (adf)g le crochet de Poisson de deux fonctions et, si $I = (i_1, \ldots i_m)$ est une suite d'entiers compris entre 1 et 2p, on pose :

$$(9) \qquad X_I(x,\xi,\lambda) = (\mathrm{ad}X_{i_1}) \ldots (\mathrm{ad}X_{i_{m-1}}) X_{i_m}(x,\xi,\lambda) \quad \text{et } |I| = m .$$

Théorème 3. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
a) Il existe $C_1 > 0$ et $\lambda_1 > 0$ tel que (8) soit vérifié.
b) Il existe $C_2 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ tels qu'on ait :

$$(10) \qquad \sum_{|I| \leq r} |X_I(x,\xi,\lambda)| \geq c_2 \lambda \qquad \forall (x,\xi) \in R^{2n} \quad \forall \lambda \geq \lambda_2 .$$

L'implication b) $\Rightarrow$ a) est d'ailleurs un corollaire du théorème 2. On trouvera dans [8] une application du théorème 3 à une variante du principe d'incertitude.

2. REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES.

Pour expliciter la condition i) du théorème 2 lorsque c'est possible (cf §4) nous allons montrer que l'inégalité (6) équivaut à l'injectivité des systèmes qui se déduisent des $\pi(L_j)$ $(\pi \in \mathcal{L}_r)$ par des transformations de Fourier partielles. Pour la définition de ces systèmes (§ 2.1), nous suivons Kirillov [13] . Toutes les propositions suivantes (§ 2.2 à 2.4), ont été démontrées avec B. Helffer dans [7], sauf la proposition 7, qui est démontrée dans [18].

2.1. <u>Définitions</u>. On note $\mathcal{G}_r$ l'algèbre de Lie nilpotente libre à 2p générateurs $X_1,\dots X_{2p}$, de rang de nilpotence r . On note $X_I (|I| \leq r)$ les crochets itérés des générateurs, et on pose $L_j = X_j + iX_{p+j} (1 \leq j \leq p)$. Pour toute forme linéaire $\ell \in \mathcal{G}_r^*$, on note π_ℓ la représentation unitaire irréductible du groupe exp $\mathcal{G}_r$ associée, selon la théorie de Kirillov [13], à la forme linéaire ℓ , et on note aussi π_ℓ la représentation de $\mathcal{G}_r$ correspondante, et $\mathcal{S}_{\pi_\ell}$ l'espace des vecteurs C^∞ .

Pour le lecteur non spécialisé dans ce domaine, rappelons que les opérateurs $\pi_\ell(X_j)$ sont d'une forme analogue à (3), l'entier n étant remplacé par un entier $k(\ell)$ dépendant de ℓ , tel que l'application

$$(11) \qquad \mathcal{G}_r \ni X \longrightarrow \frac{1}{i}\, d_{x\xi}\, \pi_\ell(X)\ (0,0) \in R^{2k(\ell)}$$

soit surjective. On a noté $\pi_\ell(X)(x,\xi)$ le symbole complet de $\pi_\ell(X)$. Le lien entre la forme linéaire ℓ et les opérateurs $\pi_\ell(X)$ est donné par :

$$(12) \qquad \pi_\ell(X)(0,0) = i\ell(X) \qquad \forall X \in \mathcal{G}_r \quad .$$

Quant à l'espace $\mathcal{S}_{\pi_\ell}$ il n'est autre que $\mathcal{S}(R^{k(\ell)})$. Si $k(\ell) = 0$, l'opérateur $\pi_\ell(X)$ est la multiplication (dans $\mathbb{C}$) par $i\ell(X)$.

Les propositions suivantes correspondent aux étapes classiques des inégalités L^2 pour les opérateurs homogènes à coefficients constants : transformation de Fourier, continuité sur la sphère unité, compacité de celle-ci. Contrairement au théorème 2, toutes ces propositions sont écrites pour des expressions polynomiales de degré m .

2.2. <u>Transformation de Fourier</u>. Un système $\pi = (\pi(X_1),\dots\pi(X_{2p}))$ possédant les propriétés 1 et 2 de la définition 1 sera assimilé à une représentation de $\mathcal{G}_r$. On notera $\pi(X_I)$ $(|I| \leq r)$ les commutateurs itérés des $\pi(X_j)$ et, pour tout $(x,\xi) \in R^{2n}$, on définit une forme linéaire $\ell_{(x,\xi)}$ dans $\mathcal{G}_r^*$ par

(13) $$\ell_{(x,\xi)}(X_I) = \frac{1}{i}\,\pi(X_I)\ (x,\xi) \qquad |I|\leqslant r$$

Proposition 4 : Soit $\pi = (\pi(X_1),\ldots\pi(X_{2p}))$ un système qui possède les propriétés 1 et 2 de la définition 1. Alors l'inégalité (6) est vérifiée si, et seulement si, pour toute forme linéaire $\ell \in \mathcal{G}_r^*$ de la forme $\ell = \ell_{(x,\xi)}$, avec $(x,\xi)\in R^{2n}$, on a

(14) $$\sum_{j=1}^{2p} \|\pi_\ell(X_j)f\|^2 \leqslant C_o \sum_{j=1}^{p} \|\pi_\ell(L_j)f\|^2 \qquad \forall f\in S(R^{k(\ell)})\ .$$

Proposition 5 : Soit $\pi = (\pi(X_1),..\pi(X_{2p}))$ un système comme dans la proposition 4. Soit $\ell = \ell_{(0,0)}$ la forme linéaire définie en (13), à l'origine de R^{2n}.
Soit π_ℓ la représentation irréductible correspondante, réalisée dans $R^{k(\ell)}$.
Alors $k(\ell)\leqslant n$ et, si l'on pose $x' = (x_1,\ldots x_k)$, $k = k(\ell)$, et $x'' = (x_{k+1},\ldots x_n)$, il existe une application symplectique $\chi = R^{2n}\to R^{2n}$ telle que

(15) $$(\pi(X_j)\circ\chi)\ (x',x'',\xi',0) = \pi_\ell(X_j)\ (x',\xi')$$

pour tous $(x',\xi')\in R^{2k}$, $x''\in R^{n-k}$ et $j\leqslant 2p$. (Le membre de gauche est indépendant de x'').

Ces deux propositions résultent de la preuve des lemmes 2.2.3 et 4.2 du chapitre 2 de [7] .

2.3. Continuité sur la sphère unité. Pour toute forme linéaire $\ell\in\mathcal{G}_r^*\setminus\{0\}$, soit $C(\ell)$ la meilleure constante dans l'inégalité (14) (ou $+\infty$ si (14) n'est pas vérifiée). Notons que $C(\ell)$ ne dépend pas continument de ℓ, que $C(\ell) = C(\ell')$ si les représentations π_ℓ et $\pi_{\ell'}$ sont unitairement équivalentes, et que $C(\ell') = C(\ell'')$ s'il existe $t>0$ tel que $\ell'(X_j) = t\ell''(X_j)$ $(1\leqslant j\leqslant 2p)$. Nous écrirons $\ell\sim\ell''$ s'il existe $\ell'\in\mathcal{G}_r^*$ et $t>0$ tels qu'il en soit ainsi. On peut considérer $C(\ell)$ comme une fonction sur l'ensemble du quotient de $\mathcal{G}_r^*\setminus\{0\}$ par cette relation d'équivalence, qui remplace la sphère unité du cas commutatif. La proposition 7 exprime une sorte de semi-continuité pour la topologie quotient.

Définition 6. Soit ℓ_ν $(\nu\in N)$ une suite dans $\mathcal{G}_r^*\setminus\{0\}$. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des formes linéaires $\ell\in\mathcal{G}_r^*$ telles qu'il existe une suite (n_q) d'entiers, tendant vers $+\infty$, et une suite $(\tilde{\ell}_q)$ dans $\mathcal{G}_r^*$ telles que :

(16) $$\tilde{\ell}_q \sim \ell_{n_q} \quad\text{et}\quad \tilde{\ell}_q\to\ell\ .$$

Proposition 7. Si (ℓ_ν) $(\nu \in N)$ est une suite dans $G_r^* \setminus \{0\}$ et $\mathcal{L}$ son ensemble limite, on a :

(17) $$\limsup_{\nu \to \infty} C(\ell_\nu) = \sup_{\ell \in \mathcal{L}} C(\ell) .$$

La proposition 7 a été conjecturée et prouvée dans un cas particulier dans [7] puis dans le cas général dans [18] .

2.4. Compacité.

Proposition 8. Soit Γ une partie fermée de G_r^* . On suppose que

(18) $$\ell \in \Gamma \quad \text{et} \quad \ell' \sim \ell \Rightarrow \ell' \in \Gamma$$

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour tout $\ell \in \Gamma \setminus \{0\}$, le système d'opérateurs $\pi_\ell(L_1), \ldots \pi_\ell(L_p)$ est injectif dans $S\pi_\ell$.

2) Il existe $C_0 > 0$ tel que (14) soit vérifié pour tout $\ell \in \Gamma$ et pour tout $f \in S(R^{k(\ell)})$.

La déduction de la proposition 8 à partir de la proposition 7 est faite dans les § 3, 4 et 5 du chapitre 8 de [7]. La proposition 8 contient le résultat de [5].

2.5. Application à l'ensemble $\mathcal{L}_r$ du § 1. Soient $X_1, \ldots X_{2p}(x,\xi,\lambda)$ un système comme au § 1 , et $\mathcal{L}_r$ l'ensemble de la définition 1. Nous allons définir l'ensemble des formes linéaires associées selon (13) aux éléments π de $\mathcal{L}_r$.

Définition 9. Pour tout $r \geqslant 1$, on note Γ_r l'ensemble des formes linéaires $\ell \in G_r^*$ telles qu'il existe une suite (x_ν, ξ_ν) dans R^{2n} et des suites (t_ν) et (λ_ν) dans R^+ telles que :

1) La suite λ_ν tend vers $+\infty$, et la suite $t_\nu^r \lambda_\nu$ est bornée.

2) On a, si $|I| \leqslant r$

(19) $$\ell(X_I) = \lim_{\nu \to \infty} t^{|I|} X_I(x_\nu, \xi_\nu, \lambda_\nu) .$$

Cet ensemble est défini dans [6] . On trouvera dans Rockland [21] une définition plus intrinsèque, et qui ouvre peut-être la voie à d'autres généralisations.

<u>Proposition</u> 10.

1) Pour tout système $\pi \in \mathcal{L}_r$ et pour tout $(x,\xi) \in R^{2n}$, la forme linéaire $\ell_{(x,\xi)}$ définie en (13) est dans Γ_r .

2) Pour tout $\ell \in \Gamma_r$, il existe un système $\pi \in \mathcal{L}_r$ tel que

$$\pi(X_I)\ (0,0) = i\ell(X_I) \qquad |I| \leqslant r$$

3) L'ensemble Γ_r est fermé dans $\mathcal{G}_r^*$ et possède la propriété (18).

Le point 1 est évident, le point 2 est démontré dans [17] et le point 3 se prouve avec les techniques du chapitre 4 de [7] . En combinant les propositions 4, 8 et 10, on obtient aussitôt :

<u>Théorème</u> 11. Pour tout $r \geqslant 1$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Il existe $C_o > 0$ tel que (6) soit vérifié pour tous $\pi \in \mathcal{L}_r$ et $f \in \mathcal{S}(R^n)$.

2) Pour tout $\ell \in \Gamma_r \setminus \{0\}$, le système d'opérateurs $(\pi_\ell(L_1),\dots\pi_\ell(L_p))$ est injectif dans $\mathcal{S}(R^{k(\ell)})$.

3. APPLICATIONS A L'HYPOELLIPTICITE.

On considère maintenant un système $A_1,\dots A_{2p}$ d'opérateurs pseudodifférentiels classiques d'ordre m dans un ouvert Ω de R^n , dont les symboles principaux (homogènes de degré m), notés $X_j(x,\xi)$ $(1 \leqslant j \leqslant 2p)$, sont supposés réels. On pose

$$L_j = A_j + iA_{p+j} \qquad\qquad 1 \leqslant j \leqslant p\ .$$

Soit (x_o,ξ_o) un point de $\Omega \times R^n \setminus \{0\}$. On suppose qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que

$$\sum_{|I| \leqslant r} |X_I(x_o,\xi_o)| \neq 0\ . \tag{20}$$

Par la technique habituelle des couronnes dyadiques, l'étude du système des L_j se ramène à la situation décrite au § 1, ce qui nous conduit à la définition suivante.

<u>Définition</u> 1.2. On note $\Gamma_r(x_o,\xi_o)$ l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathcal{G}_r^*$ telles qu'il existe une suite (x_ν,ξ_ν) dans $\Omega \times R^n$ et une suite (t_ν) dans R^+ telles que, quand $\nu \to \infty$

$$(21) \qquad x_\nu \to x_o \quad |\xi_\nu| \to \infty \quad \frac{\xi_\nu}{|\xi_\nu|} \to \frac{\xi_o}{|\xi_o|}$$

$$(22) \qquad \ell(X_I) = \lim_{\nu\to\infty} t_\nu^{|I|} X_I(x_\nu,\xi_\nu) \qquad |I| \leqslant r \ .$$

Notons que, si (20), (21) et (22) sont vérifiés, la suite $t_\nu |\xi_\nu|^{m-1+\frac{1}{r}}$ est bornée. On déduit des théorèmes 1 et 11 et de la proposition 7 le résultat suivant (cette déduction est faite dans le § 5 du chapitre 10 de [7]).

Théorème 13. Si l'hypothèse (20) est vérifiée, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un voisinage V de x_o , un opérateur pseudodifférentiel $\chi(x,D)$ d'ordre 0 , elliptique en (x_o,ξ_o) et une constante $C > 0$ tels que :

$$(23) \qquad \sum_{j=1}^{2p} \|\chi(x,D)A_j f\|^2 \leqslant C \left(\sum_{j=1}^{p} \|L_j f\|^2 + \|f\|^2_{m-1} \right) \qquad \forall f \in C_o^\infty(V)$$

(La norme du dernier terme est celle de l'espace de Sobolev $H^{m-1}(R^n)$).

ii) Pour tout $\ell \in \Gamma_r(x_o,\xi_o)\setminus\{0\}$, le système $\pi_\ell(L_1),\ldots\pi_\ell(L_p)$ est injectif dans $S\pi_\ell$.

Rappelons que la condition i) entraîne la sous-ellipticité microlocale du système $L_1,\ldots L_p$ au point (x_o,ξ_o) lorsque (20) est vérifiée.

4. OPERATEURS SOUS-ELLIPTIQUES.

Avec les notations du § 3, on étudie un seul opérateur d'ordre m , $L = A_1+iA_2$ (donc $p = 1$). Rappelons le théorème classique de Egorov [2] et Hormander [10] :

Théorème 14. Avec les notations ci-dessus, on suppose qu'il existe un entier r tel que (20) soit vérifié, ainsi que la condition $(\overline{\Psi})$ suivante :

$(\overline{\Psi})$ Il existe un voisinage conique W de (x_o,ξ_o), et il n'existe aucune fonction $q(x,\xi)$ positivement homogène dans W , à valeurs complexes non nulles, telle que la fonction $\mathrm{Im}(q(X_1+iX_2))$ ait un changement de signe dans W , du signe + au signe − , quand on se déplace dans le sens positif le long d'une bicaractéristique nulle de $\mathrm{Re}(q(X_1+iX_2))$.

Alors, l'opérateur $L = A_1+iA_2$ possède la propriété i) du théorème 13, donc est microlocalement sous-elliptique en (x_o,ξ_o) .

<u>Démonstration</u>. On peut supposer que $|\xi_o| = 1$ et que

$$W = \{(x,\xi) \in R^n \times R^n \setminus \{0\} \ , \ |(x-x_o, \frac{\xi}{|\xi|} - \xi_o)| \leqslant a\}$$

où $a \in]0,1]$. On choisit deux fonctions φ et ψ C^∞ sur R^{2n} , telles que

$$\varphi(x,\xi) = 1 \text{ si } |(x,\xi)| \leqslant \frac{a}{4} \qquad \varphi(x,\xi) = 0 \text{ si } |(x,\xi)| \geqslant \frac{a}{2}$$

$$\psi(x,\xi) = 1 \text{ si } |(x,\xi)| \geqslant \frac{a}{5} \qquad \psi(x,\xi) = 0 \text{ si } |(x,\xi)| \leqslant \frac{a}{8}$$

et $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. On pose, pour tout $\lambda \geqslant 1$

$$X_j(x,\xi,\lambda) = X_j(x,\xi)\varphi(x-x_o, \frac{\xi}{\lambda} - \xi_o)\lambda^{1-m} \qquad j = 1,2$$
$$X_z(x,\xi,\lambda) = \lambda\psi(x-x_o, \frac{\xi}{\lambda} - \xi_o)$$

Ce système vérifie (1) et (10), quitte à réduire a . Soit $\mathcal{L}_r$ son ensemble limite. La première étape de la preuve consiste à vérifier le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 1. Pour tout système $\pi = (\pi(X_1),\pi(X_2),\pi(X_3))$ dans $\mathcal{L}_r$, on est dans l'un des deux cas suivants :
a) ou bien les opérateurs $\pi(X_j)$ sont des multiplications par des constantes
b) ou bien le couple $\pi(X_1),\pi(X_2)$ vérifie dans R^{2n} l'analogue global de la condition $(\bar{\psi})$:
$(\bar{\psi}_{glob})$ Il n'existe aucun nombre complexe $q \neq 0$ tel que le symbole complet $\mathrm{Im}(q(\pi(X_1)+i\pi(X_2))$ ait un changement de signe, du signe + au signe − , quand on se déplace dans le sens positif le long d'une bicaractéristique nulle de $\mathrm{Re}(q(\pi(X_1+iX_2))$.

La vérification est facile et n'utilise que la définition 1. Soit G_r l'algèbre de Lie nilpotente libre à 3 générateurs, de rang de nilpotence r , et soit Γ_r l'ensemble de la définition 9 . On pose $\pi_\ell(L) = \pi_\ell(X_1) + i\,\pi_\ell(X_2)$.

<u>Lemme</u> 2. Pour tout $\ell \in \Gamma_r \setminus \{0\}$, le système $(\pi_\ell(L),\pi_\ell(X_3))$ est injectif dans $S(R^{k(\ell)})$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\ell \in \Gamma_r \setminus \{0\}$. D'après la proposition 10, il existe un système $\pi = (\pi(X_1),\pi(X_2),\pi(X_3))$ dans $\mathcal{L}_r$ tel que :

$$\pi(X_I)\ (0,0) = i\ell(X_I) \qquad |I| \leqslant r$$

Si les opérateurs $\pi(X_j)$ sont des constantes, d'après la proposition 5 , l'opérateur $\pi_\ell(X_j)$ est la multiplication par $i\ell(X_j)$ $(j=1,2,3)$, ce qui assure l'injectivité car $\ell \neq 0$. Sinon, les symboles $\pi(X_1)$ et $\pi(X_2)$ vérifient la condition $(\overline{\psi}_{glob})$ dans R^{2n} . D'après la proposition 5 , les symboles $\pi_\ell(X_1)$ et $\pi_\ell(X_2)$ vérifient aussi $(\overline{\psi}_{glob})$ dans $R^{2k(\ell)}$. Si $k(\ell)\leqslant 1$, l'injectivité de l'opérateur $\pi_\ell(L)$ s'en déduit facilement. Sinon, quitte à remplacer L par iL et à faire une transformation unitaire, on peut supposer que :

$$\pi_\ell(X_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

On peut toujours écrire, avec $k = k(\ell)$:

$$\pi_\ell(X_2) = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + A_k(x_1,\dots x_{k-1}) \frac{\partial}{\partial x_k} + i\, B(x)$$

La condition $\overline{\psi}_{glob}$ signifie que, pour tous $x_2,\dots x_n$ et ξ , la fonction

$$x_1 \to A_2(x_1)\xi_2 + \dots + A_k(x_1,\dots x_{k-1})\xi_k + B(x)$$

ne passe jamais du signe + au signe - quand x_1 croît. Cela implique évidemment que le polynôme A_2 est d'un signe constant. Il n'est pas identiquement nul puisque π_ℓ est irréductible. Dans la suite, nous supposerons que $A_2 \geqslant 0$. Le cas où $A_2 \leqslant 0$ se traite en changeant tous les signes. Pour tous $x_2,\dots x_n$ et ξ , la fonction rationnelle :

$$x_1 \to A_2(x_1)^{-1}[A_3(x)\xi_3 + \dots + A_k(x)\xi_k + B(x)]$$

est croissante dans son domaine de définition, qui est donc $\mathbb{R}$ tout entier. Il existe donc une fonction $H \in C^\infty(R^k)$ telle que :

$$B(x) = A_2(x_1)H(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} \geqslant 0 \tag{24}$$

De même, pour tout $j \geqslant 3$, on peut écrire

$$A_j(x) = A_2(x_1)P_j(x) \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial P_j}{\partial x_1} = 0 \tag{25}$$

(On fait tendre ξ_j vers $+\infty$, puis vers $-\infty$). Si $k\geqslant 3$, l'égalité (25) contredit le fait que π_ℓ soit irréductible (cf(11)), car on peut, par un difféomorphisme, transformer le champ de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial x_2} + P_3(x_2)\frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots + P_k(x_2 \ldots x_{k-1})\frac{\partial}{\partial x_k}$$

en $\frac{\partial}{\partial x_2}$, ce qui réduit la dimension à k = 2, ce que nous supposerons désormais.

Soit $f \in \mathcal{S}(R^2)$ une fonction telle que

$$\pi_\ell(L)f = (1+iA_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + iA_2(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_2} - A_2(x_1)\, H(x_1,x_2)\, f = 0 .$$

La bijection continue

$$(x_1,x_2) \to (-A_1x_2 + \int_0^{x_1} A_2(t)dt,\ x_2)$$

transforme la fonction Log$|f|$ en une fonction sous-harmonique, grâce à (24). Par conséquent, $|f|$ est constante au voisinage de tout point où elle atteint son maximum. Puisque $f \in \mathcal{S}(R^2)$, cela entraîne $f = 0$, et l'injectivité est démontrée.

Fin de la preuve du théorème 14. D'après le théorème 11, il existe $C_r > 0$ tel que :

$$\|\pi(X_1)f\|^2 + \|\pi(X_2)f\|^2 \leqslant C_r(\|\pi(L)f\|^2 + \|\pi(X_3)f\|^2)$$

pour tout $\pi \in \mathcal{L}_r$ et pour tout $f \in \mathcal{S}(R^n)$. Puisque (10) est vérifiée, le théorème 2 nous montre que, si λ est assez grand, on a :

$$\|X_1(\lambda)f\|^2 + \|X_2(\lambda)f\|^2 \leqslant (1+C_r)\ (\|L(\lambda)f\|^2 + \|X_3(\lambda)f\|^2)$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(R^n)$. La propriété i) du théorème 13 s'en déduit par la méthode classique des couronnes dyadiques. Le théorème 14 est donc un corollaire facile des théorèmes 2 et 11.

Variante. Le lecteur qui souhaite démontrer le théorème 14 sans étudier les méthodes du § 2 pourra prouver directement le résultat suivant : il existe $C_r > 0$ tel que, pour tout système $\pi(X_1)$, $\pi(X_2)$ d'opérateurs dans R^n, vérifiant les conditions 1 et 2 de la définition 1 et la condition $(\overline{\psi}_{glob})$, et pour tout $f \in \mathcal{S}(R^n)$, on ait :

$$\|\pi(X_1)f\|^2 + \|\pi(X_2)f\|^2 \leqslant C_r\ \|\pi(X_1+iX_2)f\|^2$$

En suivant la preuve du lemme 2, on se ramène à la dimension 2, où l'inégalité résulte probablement des techniques du § 27.5 de Hörmander [12]. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème 2 pour retrouver le théorème 14.

5. GENERALISATIONS ET PROBLEMES OUVERTS.

5.1. On reprochera peut être à la condition ii) du théorème 13 son caractère apparemment peu "explicite". Rappelons le résultat suivant (où l'on pose $Z_j(x,\xi) = X_j + iX_{p+j}$) :

<u>Théorème</u> 15 (Hörmander [11]). Si la condition (20) est vérifiée en (x_o,ξ_o) pour $r = 2$, et si $X_j(x_o,\xi_o) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant 2p)$, alors la condition ii) du théorème 13 équivaut à :

iii) Les symboles suivants :

$$\widetilde{Z}_j(y,\eta) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial Z_j}{\partial x_k}(x_o,\xi_o)y_k + \frac{\partial Z_j}{\partial \xi_k}(x_o,\xi_o)\eta_k\right)$$

prolongés à C^{2n} , ne s'annulent sur aucun plan lagrangien positif de C^{2n} .

On peut donc se demander si, dans le cas général, on peut mettre la condition ii) sous une forme analogue, où les $\widetilde{Z}_j$ seraient remplacés par les $\pi(L_j)$ $(\pi \in \mathcal{L}_r)$ et les plans lagrangiens par des variétés lagrangiennes positives ? (cf. Trépreau [23] pour le cas analytique). Dans le cas du $\overline{\partial}_b$ sur une hypersurface de C^n , les résultats de Maire [14], [15] confirment cette idée, et "explicitent" complètement la condition.

5.2. Nous n'avons pas écrit le théorème 2 pour des expressions polynomiale de degré $\geqslant 2$ de $X_1(\lambda),\ldots X_{2p}(\lambda)$, sauf dans les cas particuliers traités dans [7] avec B. Helffer. L'analogue de la condition i) du théorème 13 est la notion d' "hypoellipticité maximale" définie dans le chapitre 1 de [7] . Si le théorème 2 était écrit dans ce cadre, on pourrait en déduire quelques applications explicites : avec les notations du § 3, si (20) est vérifiées on en déduirait par exemple que les opérateurs $P = \Sigma A_j^{2k}$ ou $Q = (\Sigma A_j^2)^k$, etc... sont hypoelliptiques maximaux. Si $k = 1$, ce résultat, annoncé par Fefferman [4], a été démontré par Rothschild-Stein [22] pour les champs de vecteurs.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. BOLLEY, J. CAMUS, J. NOURRIGAT : La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudodifférentiels. Comm. in P.D.E.7 (1982) p.197-221.

[2] Y.V. EGOROV : Subelliptic operators. Russian Math. Survey 30 (2) (1975) p.59-118 et 30 (3) (1975) p.55-105.

[3] C.L. FEFFERMAN , D.H. PHONG : The uncertainty principle and sharp Gording inequality. C.P.A.M. 34 (1981) p.285-331.

[4] C.L. FEFFERMAN : The uncertainty principle. Bull. Amer. Math. Soc. 9 (1983) p.129-206.

[5] B. HELFFER, J. NOURRIGAT : Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques, etc...Com. in P.D.E. 3 (8) (1978) p.693-743 et 4(9) (1979) p.899-958.

[6] B. HELFFER, J. NOURRIGAT : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs C.R.A.S. 289 (1979) p.775-778.

[7] B. HELFFER, J. NOURRIGAT : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs. Progress in Math.58. Birkhauser (1985)

[8] B. HELFFER, J. NOURRIGAT : Remarques sur le principe d'incertitude. Preprint (1986).

[9] L. HÖRMANDER : Pseudodifferential operators and non elliptic boundary value problems. Ann. of Math. 83 (1966) p. 129-206.

[10] L. HÖRMANDER : Subelliptic operators dans : Seminar on singularities of solutions of differential equations p.127-208. Ann. of Math. Studies 91. Princeton (1979).

[11] L. HÖRMANDER : Subelliptic test estimates. C.P.A.M. 33 (1980) p.339-363.

[12] L. HÖRMANDER : The analysis of linear partial differential operators (vol IV) Springer-Verlag, 1985.

[13] A. KIRILLOV : Unitary representations of nilpotent groups. Russian Math. Survey 17 (1962) p.53-104.

[14] H.M. MAIRE : Variation et convexité maximale des fonctions de plusieurs variables. C.R.A.S. 301 (1985) p.431-434.

[15] H.M. MAIRE : Neccessary and sufficient condition for maximal hypoellipticity of $\bar{\partial}_b$. Preprint 1986.

[16] A. MELIN : Lie filtrations and Pseudodifferential operators. Preprint 1982.

[17] J. NOURRIGAT : Réduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-84, exposé n°XI et article à paraître aux Ann. Inst. Fourier.

[18] J. NOURRIGAT : Inégalités L^2 et représentations de groupes nilpotents A paraître au J. Funct. Analysis.

[19] J. NOURRIGAT : Systèmes sous-elliptiques. Manuscrit.

[20] C. ROCKLAND : Hypoellipticity on the Heisenberg group, representation theoretic criteria Trans. of the A.M.S. vol.240, n°517 (1978) p.1-52.

[21] C. ROCKLAND : Intrinsic nilpotent approximation. Preprint 1985.

[22] L.P. ROTHSCHILD, E.M. STEIN : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups Acta Math. 137 (1977) p.248-315.

[23] J.M. TREPREAU : Systèmes différentiels à caractéristiques simples. Séminaire Bourbaki, juin 1982, n°595.

***