J. Y. CHEMIN

Ondes lentes et interaction contrôlée pour les équations strictement hyperboliques non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. n° 4, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941 82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

ONDES LENTES ET INTERACTION CONTROLEE POUR LES EQUATIONS STRICTEMENT HYPERBOLIQUES NON LINEAIRES

par J.Y. CHEMIN

Exposé n°IV

18 Novembre 1986

INTRODUCTION.

On cherche à décrire la régularité microlocale d'une solution réelle $u \in H^s_{loc}(\Omega)$, s étant suffisamment grand, et Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de l'équation

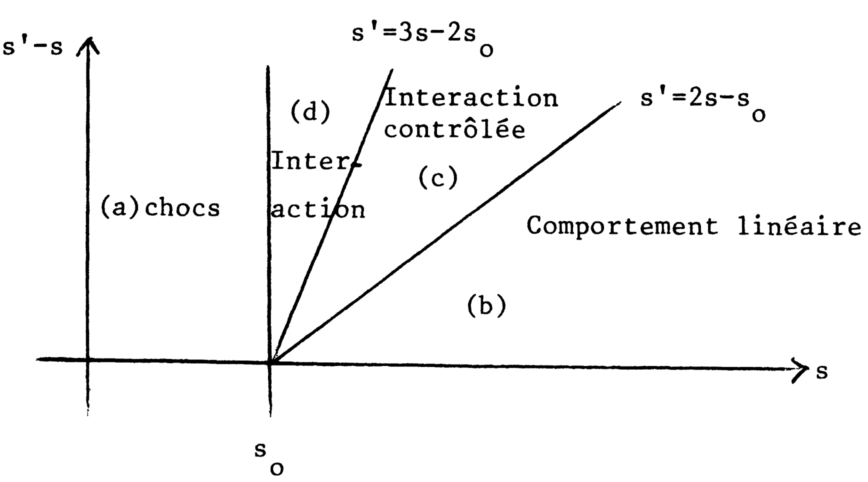
$$\text{(E)} \qquad F(x,u,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leqslant m} = 0 \text{ sur } \Omega ,$$

où F est une fonction C^∞ de ses arguments. On supposera dans tout ce travail que $p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \partial F/\partial u_\alpha(x,u,\partial^\beta u)_{|\beta|\leqslant m} \cdot \xi^\alpha$ est un polynôme strictement hyperbolique par rapport à ξ_1, et que l'on a une situation d'évolution, c'est à dire que toute bicaractéristique de p_m issue d'un point de $\Omega_+ = \Omega \cap (x_1 > 0)$ coupe $\Omega_- = \Omega \cap (x_1 < 0)$.

J.M. Bony a démontré dans [6], grâce à la construction du calcul paradifférentiel, que les singularités microlocales H^σ, pour $\sigma \leqslant 2s-s_o$, avaient un comportement linéaire vis à vis de la géométrie des bicaractéristiques de p_m.

De nombreux résultats s'affranchissant de cette limitation ont été obtenus, d'une part sous des hypothèses de régularité conormale par rapport à une ou plusieurs hypersurfaces dans le passé, notamment par S. Alinhac (voir [1][2][3]), J-M Bony (voir [7] et [8]), et R. Melrose et N. Ritter (voir [13]), d'autre part en dimension 2 par P. Godin (voir [12]), J. Rauch et M. Reed (voir [15]), ainsi que dans [9].

Le but de ce travail est de contrôler l'interaction des singularités jusqu'à $3s-s_1$, c'est à dire de démontrer une majoration du front d'onde H^σ, $\sigma \leqslant 3s-s_1$ d'une solution de (E) à partir de la connaissance du front d'onde d'ordre σ dans le passé. On peut illustrer ceci par le schéma suivant :



Les premiers résultats en ce sens ont été obtenus par M. Beals dans [4] et [5] où il démontrait la propagation de la régularité H^σ pour $\sigma \leqslant 3s-2s_o$ dans le cas des équations semi linéaires d'ordre 2 ; il exhibait dans [4] un exemple montrant que, dans ce cadre, les résultats obtenus étaient essentiellement optimaux.

Nous commencerons par énoncer précisément le théorème de régularité décrivant le contrôle de l'interaction ; ensuite, nous en donnerons quelques corollaires et illustrations, notamment en introduisant la notion d'onde lente ; puis viendra la construction d'un calcul symbolique bilinéaire de type paradifférentiel permettant de préciser le théorème de paralinéarisation de Bony et Meyer ; et enfin, nous appliquerons cela grâce à un lemme rendant compte de la géométrie de la variété caractéristique pour conclure.

1. ENONCE DES RESULTATS.

L'énoncé du théorème de régularité nécessite la définition préalable des ensembles prenant en compte la propagation et l'interaction des singularités.

Dans toute la suite u désignera une solution $H^s_{loc}(\Omega)$, réelle, de (E) avec $s > \frac{n}{2} + m + 1-d$, d valant 2 si l'équation (E) est semi-linéaire, 1 si elle est quasi linéaire, 0 sinon.

<u>Définition 1.1</u>. F_σ est la réunion des bicaractéristiques d'avenir issues de points de $WF_\sigma(u) \cap \mathrm{Car}\, p_m \cap (x_1 < 0)$; où $WF_\sigma(u)$ désigne le front d'onde H^σ de u et $\mathrm{Car}\, p_m$ la variété caractéristique de p_m.

Il résulte du théorème de propagation de Bony démontré dans [6] que, pour tout $\sigma \leqslant 2s - \frac{n}{2} - m + d-1$, $F_\sigma = WF_\sigma(u) \cap \mathrm{Car}\, p_m$.

Il est bien connu que des singularités de directions non opposées interagissent par enveloppe convexe. De plus, M. Beals a démontré dans [4] que, dans certains cas, l'interaction de deux singularités H^s de direction opposée ($s > s_o$), ne produisait pas de singularités H^{3s-s_1} hors du plan tangent à $\mathrm{Car}\, p_m$ en cette direction. Cela conduit à définir $\tilde{G}_\sigma$ où $\tilde{G}_\sigma|_x$ est la réunion des $F_{\sigma_1}|_x + F_{\sigma_2}|_x$ lorsque $\sigma_1+\sigma_2 = \sigma + \frac{n}{2}$, et des plans tangents en

à $\mathrm{Car}\, p_m|_x$ lorsque ξ parcourt $F_{\frac{\sigma}{2}+\frac{n}{4}}|_x$. De façon plus concise ;

$$\tilde{G}_\sigma = \bigcup_{\sigma_1+\sigma_2=\frac{n}{2}+\sigma} (F_{\sigma_1} + F_{\sigma_2}) \cup T_{F_{\frac{\sigma}{2}+\frac{n}{4}}} \mathrm{Car}\, p_m .$$

Mais, cet ensemble est légèrement trop petit.

Définition 1.2. (i) $G_\sigma^{(1)}$ est l'ensemble des $(x,\xi) \in T^*\Omega$ tels qu'il existe ξ_1 et ξ_2 de directions non opposées tels que $\xi \in \mathbb{R}_+ \xi_1 + \mathbb{R}_+\xi_2$ et que, pour tout (σ_1,σ_2) tel que $\sigma_1+\sigma_2 = \frac{n}{2} + \sigma$, $\xi_1 \in F_{\sigma_1|x}$ ou $\xi_2 \in F_{\sigma_2|x}$.

(ii) $G_\sigma^{(2)}$ est l'ensemble des $(x,\xi) \in T^*\Omega$ tels qu'il existe η dans $F_{\frac{\sigma}{2}+\frac{n}{4}}\big|_x$ tel que $\xi \in T_\eta \operatorname{Car} p_m|_x$.

(iii) $G_\sigma = G_\sigma^{(1)} \cup G_\sigma^{(2)}$

Remarquons que $\tilde{G}_\sigma \subset G_\sigma \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \tilde{G}_{\sigma+\varepsilon}$.

Les singularités ainsi créées par interaction vont à leur tour se propager, d'où la définition suivante.

Définition 1.3. H_σ désigne la réunion des bicaractéristiques d'avenir issues des points de $G_\sigma \cap \operatorname{Car} p_m$.

Théorème 1. Soit u une solution réelle $H^s_{loc}(\Omega)$, $s > \frac{n}{2} + m + 1 - d$ de l'équation (E), on a, pour tout $\sigma \leqslant 3s-n-2m-2-2d$:

$$WF_\sigma(u) \cap \operatorname{Car} p_m \subset F_\sigma \cup H_{\sigma+m+1-d} \quad .$$

$$WF_{\sigma+1}(u) \cap (\operatorname{Car} p_m)^c \subset G_{\sigma+m+1-d} \quad .$$

2. COROLLAIRES ET ILLUSTRATIONS ; NOTION D'ONDE LENTE.

2.1. Cas des équations d'ordre 2.

Corollaire 2.1. Soit u une solution $H^s_{loc}(\Omega)$ de l'équation (E) supposée d'ordre 2, $s > \frac{n}{2} + 3 - d$; soient (x,ξ) un point caractéristique de p_m et Γ la bicaractéristique issue de (x,ξ), on a, pour tout $\sigma \leqslant 3s-n-6+2d$: si $u \in H^\sigma(x,\xi)$, alors $u \in H^\sigma(\Gamma)$.

Ceci résulte du théorème 1. par le fait que $\operatorname{Car} p_{2|x}$ est convexe et donc que si $\tau \leqslant 3s-n-3+d$, $G_\tau \cap \operatorname{Car} p_m = \emptyset$. Remarquons de plus que ce corollaire contient les résultats et la conjecture de [5].

2.2. Ondes lentes.

Définition 2.2. (i) on dit qu'une hypersurface caractéristique est lente si, pour tout $(x,\xi) \in N^*\Sigma$, $T_\xi(\mathrm{Car}\ p_{m|x}) \cap \mathrm{Car}\ p_{m|x} = \mathbb{R}^*\xi$.

(ii) On appelle onde lente d'ordre σ une distribution v telle que $\mathrm{Car}\ p_m \cap WF_\sigma(v) \subset N^*\Sigma$ et $(\mathrm{Car}\ p_m)^c \cap WF_{\sigma+1}(v) \subset T_{N^*\Sigma}\ \mathrm{Car}\ p_m$ où $T_{N^*\Sigma}\mathrm{Car}\ p_m = \{(x,\xi) \in T^*\Omega / \exists \eta \in N^*\Sigma_{|x} \mid \xi \in T_\eta \mathrm{Car}\ p_{m|_x}\}$, Σ étant une hypersurface lente.

La terminologie "onde lente" se justifie par le fait suivant : soit $\Box_i = \partial_t^2 = c_i^2 \Delta$ avec $c_1 > c_2$; si Σ est une hypersurface caractéristique pour $\Box_2$, alors elle est lente au sens de (i) pour l'opérateur $\Box_1 \Box_2$. Remarquons que, dans le cas d'un opérateur d'ordre 2, toute hypersurface caractéristique est lente.

<u>Corollaire</u> 2.2.1. (Evolution d'une onde lente). Soient u une solution réelle $H^s_{loc}(\Omega)$ de (E) avec $s > \frac{n}{2} + m+1-d$ et Σ une hypersurface lente pour p_m : si u est une onde lente d'ordre σ par rapport à Σ dans le passé, elle l'est aussi dans l'avenir.

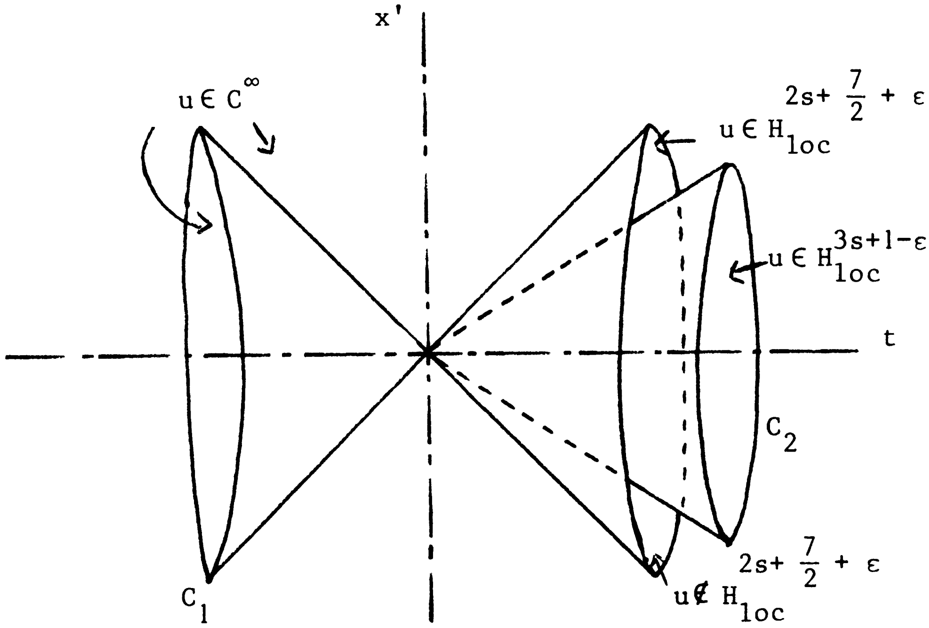
<u>Corollaire</u> 2.2.1. (Interaction d'ondes lentes). Soit u comme ci-dessus et soit $\Sigma = (\Sigma_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ une famille de N hypersurfaces lentes ne se coupant pas dans le passé. On suppose que u est une onde lente d'ordre σ par rapport aux Σ_i dans le passé ; si $\sigma \leqslant 3s-2m-n+2d-2$, alors

$$WF_\sigma(u) \cap \mathrm{Car}\ p_m \subset \bigcup_{i=1}^{N} N^*\Sigma_i \cup H_{\sigma+m+1-d}$$

$$WF_{\sigma+1}(u) \cap (\mathrm{Car}\ p_m)^c \subset \left(\bigcup_{i=1}^{N} T_{N^*\Sigma_i}\ \mathrm{Car}\ p_m\right) \cap (\mathrm{Car}\ p_m)^c \ .$$

Nous allons maintenant donner une illustration de ces corollaires dans un cas particulier.

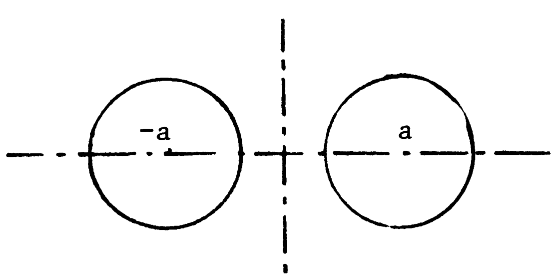
2.3. <u>Equation des ondes à deux vitesses</u>. On va considérer une solution réelle u , $H^s_{loc}(\Omega)$ de l'équation (E_T) $\Box_1\Box_2 u = f(x,u,\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leqslant 3}$, où f est une fonction C^∞ de ses arguments. Le corollaire 2.2. assure que si C_i désigne le cône d'onde associé à $\Box_i$ issu de 0 , on a, pour tout $\sigma \leqslant 3s-n-6$; Si u est une onde lente d'ordre σ par rapport à C_2 dans le passé, alors elle l'est aussi dans l'avenir. Par contre, on démontre dans [10] qu'il existe une solution u $H^s_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $s > \frac{5}{2}$, de $\square_1\square_2 u = \beta u^2$ avec $\beta \in C^\infty_o(\mathbb{R}^+_t)$ telle que, dans le passé $WF(u) \subset N^*C_1$, et telle que l'on ait la configuration suivante dans l'avenir :



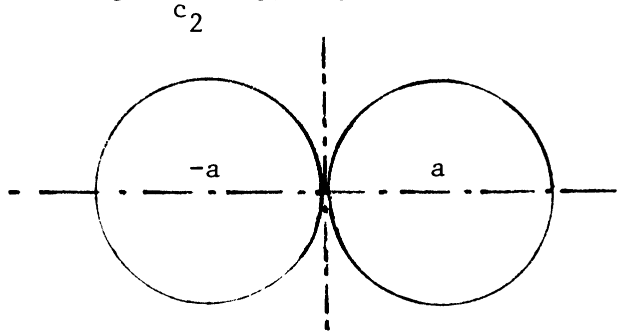
Cela signifie que les phénomènes que prétend limiter le théorème 1 se produisent avec une intensité proche du contrôle donné par le théorème.

Le corollaire 2.2.2. est illustré par l'exemple suivant. Soit u une solution réelle $H^s_{loc}(\mathbb{R}^3)$ solution de (E_T) sur l'ouvert $]0 , \frac{a}{c_2}[\times \mathbb{R}^2$; on représente alors le phénomène par le film suivant qui dessine les singularités à t = cste.

$t < \frac{a}{c_2}$ rien ne se passe

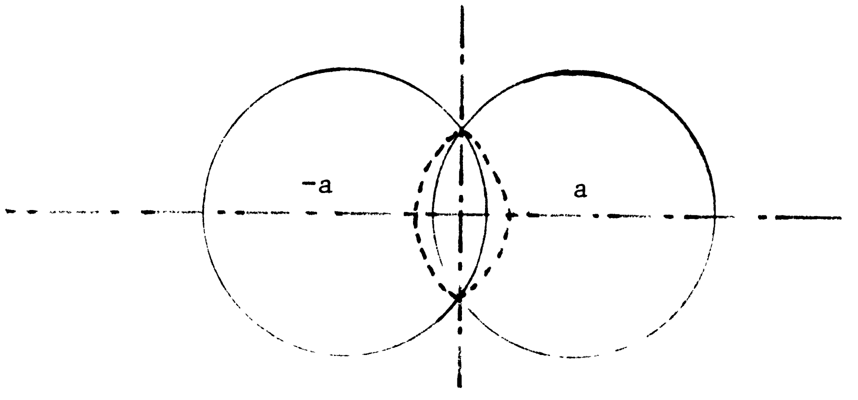


$t = \frac{a}{c_2}$ c'est le début de l'interactio

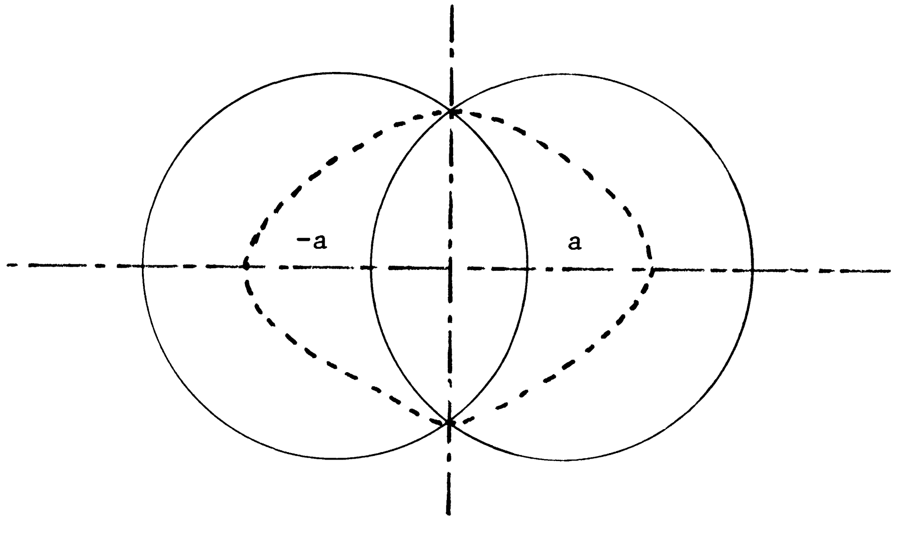


$$\frac{a}{c_2} < t < \frac{a}{c_2} \frac{c_1}{(c_1^2 - c_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Les singularités créées par interaction se propagent rapidement

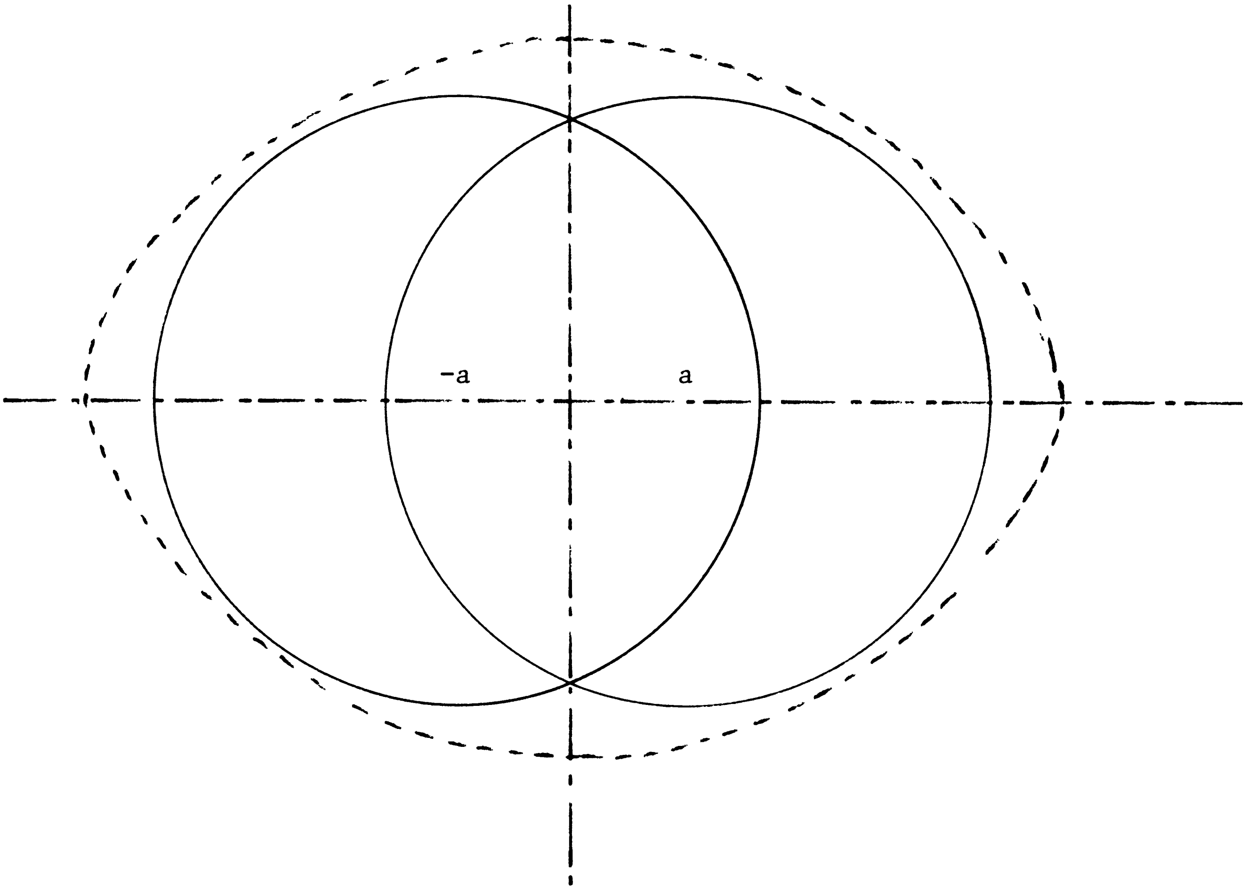


$t = \frac{a}{c_2} > \frac{c_1}{(c_1^2 - c_2^2)^{\frac{1}{2}}}$, c'est la fin de l'interaction.



Pour $t > \frac{a \quad c_1}{c_2(c_1^2 - c_2^2)^{\frac{1}{2}}}$;

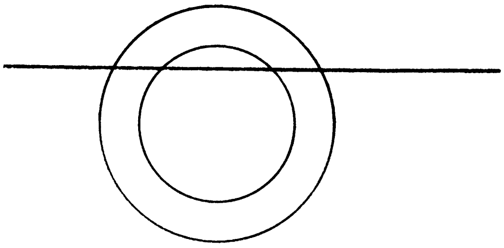
chaque type de singularité se propage à sa vitesse, il n'y a plus d'interaction.



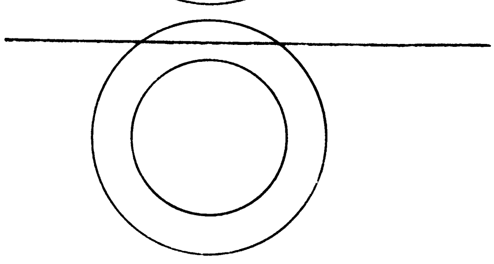
Tous ses corollaires reposent sur le calcul des ensembles H_τ définis ci-dessus ; cela est laissé au lecteur. Signalons cependant que l'interaction cesse pour la raison suivante :

Dans l'espace des fréquences, on a les situations suivantes.

si $t < \frac{a}{c_2} \frac{c_1}{(c_1^2-c_2^2)^{\frac{1}{2}}}$,il y a interaction



si $t > \frac{a}{c_2} \frac{c_1}{(c_1^2-c_2^2)^{\frac{1}{2}}}$,il n'y a plus interaction



3. CALCUL PARADIFFERENTIEL BILINEAIRE ET PARALINEARISATION PRECISEE.

Le but de cette partie est de contourner la limitation à H^{2s-s_o} du calcul paradifférentiel, limitation qui provient, d'une part du théorème de paralinéarisation de Bony-Meyer, d'autre part du fait que les opérateurs paradifférentiels sont définis modulo un opérateur envoyant H^s dans H^{2s-s_o}. La démarche est la suivante : après avoir défini un calcul bilinéaire et une classe d'opérateurs bilinéaires jouissant d'agréables propriétés de composition, on précise la définition du paraproduit, puis on démontre un théorème de paralinéarisation précisée.

3.1. <u>Calcul symbolique paradifférentiel bilinéaire</u>. Ici ρ désigne un réel strictement positif non entier. Pour des raisons techniques, on est obligé de restreindre la classe des opérateurs paradifférentiels de Bony.

<u>Définition</u> 3.1.1. (i) $\underline{\Sigma}^m_\rho$ est l'ensemble des fonctions $a(x,\xi)$, somme, pour j variant de 0 à $[\rho]$, de fonctions $a_j(x,\xi)$ homogènes de degré $m-j$ en ξ pour $|\xi| \geqslant 1$, et telles que :

$$\|\partial^\alpha_\xi a_j(.,\xi)\|_{H^{\rho-j+\frac{n}{2}}} \leqslant C_{j,\alpha}(1+|\xi|)^{m-j-|\alpha|}$$

(ii) $\Sigma^{m,m'}_\rho$ est l'ensemble des fonctions $a(x,\xi,\eta)$, somme pour j variant de 0 à $[\rho]$, de fonctions $a_j(x,\xi,\eta)$, C^∞ en (ξ,η) pour $|\xi+\eta|\geqslant 1$, telles que :

(a) $$\|\partial^\alpha_{\xi,\eta} a_j(.,\xi,\eta)\|_{H^{\rho-j+\frac{n}{2}}} \leqslant C_{j,\alpha}(1+|\xi|)^m(1+|\xi+\eta|)^{m'-j-|\alpha|}$$

(b) $\operatorname{Supp}_{\xi,\eta} a_j(x,\xi,\eta)\subset\{(\xi,\eta)/C|\xi|\leqslant|\eta|\leqslant C_1|\xi|\}$ sur $\mathbb{R}^{2n}\setminus\{(\xi,\eta)/|\xi+\eta|\geqslant 1\}$.

Soit $\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ telle que, pour tout $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2n}\setminus((\xi+\eta)\geqslant 1)$ $|\partial^\alpha_{\xi,\eta}\chi(\xi,\eta)|\leqslant \langle\xi,\eta\rangle^{-|\alpha|}$ et $\operatorname{Supp}\chi\cap\mathbb{R}^{2n}\setminus((\xi+\eta)\geqslant 1)\subset C|\xi|\leqslant|\eta|\leqslant C_1|\xi|$, $\chi\in\Sigma^{0,0}_\rho$ et si $a\in\underline{\Sigma}^m_\rho$ alors $\chi(\xi,\eta)a(x,\xi+\eta)\in\Sigma^{m,m'}_\rho$.

Soit T une application C^∞ de $\mathbb{R}^{2n}\setminus\{(0,0)\}$ telle que

(i) $|\partial^\alpha_{\xi,\eta} T(\xi,\eta)|\leqslant C_\alpha(1+|\xi,\eta|)^{-|\alpha|}$

(ii) $\operatorname{Supp} T\subset\{(\xi,\eta)/|\xi|\leqslant\varepsilon_1|\eta|\}$ avec $\varepsilon_1<1$

(iii) $\operatorname{Supp}(1-T)\subset\{|\xi,\eta|/|\xi|\geqslant C_2|\eta|\}$.

On associe à une telle fonction T un paraproduit sur $\mathbb{R}^n$, noté encore T par la formule suivante, pour u et v dans $\mathcal{S}$,

$$(3.1)\qquad T_u v(x) = \iint e^{ix(\xi+\eta)}T(\xi,\eta)\hat{u}(\xi)\hat{v}(\eta)d\xi d\eta \quad .$$

Pour les propriétés opératoires de T dans les H^s, voir [6] .

Définition 3.1.2. Soient T un paraproduit sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Sigma_\rho^{m,m'}$, on définit, pour u et v dans $\mathcal{S}$, $T_a(u,v)$ par :

$$T_a(u,v) = f^{-1}((2\pi)^{-2n}\iint T(\zeta-\xi-\eta,\xi+\eta)\ (f_x a)(\zeta-\xi-\eta,\xi,\eta)\hat{u}(\xi)\hat{v}(\eta)d\xi d\eta\ )$$

Les propriétés opératoires de ces opérateurs, ainsi que leur invariance vis à vis du paraproduit choisi pour les définir sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. Soient T et T' deux paraproduits sur $\mathbb{R}^n$, et $a \in \Sigma_\rho^{m,m'}$, alors, pour tout (s,t) tel que $s+t \geqslant m$. on a

(i) T_a envoie $H^s\times H^t$ dans $H^{s+t-m-m'-\frac{n}{2}}$

(ii) $T_a-T'_a$ envoie $H^s\times H^t$ dans $H^{s+t-\frac{n}{2}-m-m'+\rho}$.

La démonstration de ce théorème s'effectue à l'aide des techniques de découpage dyadiques de Littlewood-Paley et de cassure des symboles exposées dans [11] ; voir [10] pour les détails.

Il convient maintenant de définir une opération dièze entre symboles bilinéaires et symboles usuels et de démontrer les formules symboliques correspondantes.

Définition 3.1.3. Soient $a \in \Sigma_\rho^{m,m'}$, $b\in \underline{\Sigma}_\rho^{m_1}$ et $c \in \underline{\Sigma}_\rho^{m_2}$;

(i) $$b\# a = \sum_{|\alpha|+i+j\leqslant[\rho]} \partial_\xi^\alpha b_i(x,\xi)\big|_{\xi+\eta} D_x^\alpha a_j(x,\xi,\eta)$$

(ii) $$a\#(b,c) = \sum_{|\alpha|+|\beta|+i+j+\ell\leqslant[\rho]} \partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta a_i(x,\xi,\eta)D_x^\alpha b_j(x,\xi)D_x^\beta c_\ell(x,\eta)$$

Ces définitions sont justifiées par le théorème suivant

Théorème 3.1.2. Soients a $\in \Sigma_\rho^{m,m'}$, $b\in \underline{\Sigma}_\rho^{m_1}$ et $c \in \underline{\Sigma}_\rho^{m_2}$

(i) pour tout (s,t) tel que $s+t\geqslant m$ $T_b\circ T_a - T_{b\# a}$ envoie $H^s\times H^t$ dans

$H^{s+t-\frac{n}{2}-m-m'-m_1+\rho}$.

(ii) pour tout (s,t) tel que $s+t \geqslant m+m_1+m_2$ $T_a \circ (T_b \otimes T_c) - T_{a\#(b,c)}$ envoie $H^s \times H^t$ dans $H^{s+t-\frac{n}{2}-m-m_1-m_2-m'+\rho}$.

La démonstration de ce théorème utilise les techniques de découpage dyadique et de cassure des symboles ; elle est longue et assez technique ; nous renvoyons à [10] pour les détails.

Les définitions 3.1.1. et 3.1.3 se localisent de manière claire. On peut alors définir les opérateurs bilinéaires sur un ouvert.

Définition 3.1.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit que $A \in \mathrm{Op}\,\Sigma_\rho^{m,m'}(\Omega)$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées, pour tout (s,t) tel que $s+t \geqslant m$:

(i) A envoie $H^s_{loc}(\Omega) \times H^t_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

(ii) A vérifie une condition de type support propre.

(iii) il existe $a \in \Sigma_\rho^{m,m'}(\Omega)$ tel que, pour tout compact K de Ω, toute $\chi \in C_o^\infty(\Omega)$ valant 1 près de K, et tout paraproduit T sur $\mathbb{R}^n$, on ait :

$$A - \chi T_{\chi a} \text{ envoie } H^s_k \times H^t_k \text{ dans } H^{s+t-\frac{n}{2}-m-m'+\rho}$$

iv) Lorsque (iii) est réalisée, on dit que a est un symbole de A .

Notons que, pour tout $a \in \Sigma_\rho^{m,m'}(\Omega)$, il existe un $A \in \mathrm{Op}\,\Sigma_\rho^{m,m'}(\Omega)$ tel que a soit un symbole de A ; de plus les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2. se localisent facilement. Tout cela se démontre en suivant une démarche analogue à celle de Bony dans [6], pour les détails, nous renvoyons à [10] .

3.2. Localisation précisée du paraproduit. On veut éviter l'écueil de l'invariance des opérateurs paradifférentiels.

Définition 3.2. (i) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on appelle $\mathcal{P}_\rho^m(\Omega)$ l'ensemble des éléments de $\underline{\Sigma}_\rho^m(\Omega)$ polynomiaux en ξ .

(ii) Soient T un paraproduit sur $\mathbb{R}^n$, $(\varphi_j, w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une partition de l'unité C^∞ de Ω, $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $C_o^\infty(w_j)$ telle que χ_j vaille 1 près de $\mathrm{Supp}\varphi_j$ et $a \in \mathcal{P}_\rho^m(\Omega)$.

On pose $\mathrm{Opp}_T(a) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_j\, T_{\chi_j a}\, \varphi_j\, u$.

avec $T_{\chi_j a} v = \sum_{|\alpha|\leq m} T_{\chi_j a_\alpha} D^\alpha v$ si $a = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

L'intérêt de la définition apparaît dans la proposition suivante :

Proposition 3.2. (i) Pour tout compact K de Ω et toute χ de $C_o^\infty(\Omega)$ valant 1 au voisinage de K , $\mathrm{OPP}_T(a) - \chi T_{\chi a}$ envoie les distributions à support compact dans K dans C_o^∞ et ce pour tout $a \in P_\rho^m(\Omega)$; en particulier $\mathrm{OPP}_T(a) \in \mathrm{Op}\, \underline{\Sigma}_\rho^m(\Omega)$ et il est indépendant de la partition de l'unité choisi modulo un opérateur infiniment régularisant.
(ii) $\mathrm{OPP}_T(a)$ est aussi microlocal que l'on veut ie :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que, si $\mathrm{Supp}\, T \subset \{(\xi,\eta)/|\xi| \leq \varepsilon_o |\eta|\}$ alors
$WF(\mathrm{OPP}_T(a).u). \subset \{(x,\xi) \in T^*\Omega\ /d(\frac{\xi}{|\xi|}, WF(u) \cap S^{n-1}) \leq \varepsilon\}$.

La démonstration de cette proposition est basée sur le fait que, si T est un paraproduit sur $\mathbb{R}^n$ et u et v deux distributions à support compact, $\mathrm{Supp\, Sing}\, T_u v \subset \mathrm{Supp}\, u \cap \mathrm{Sing}\, v$, ce qui se démontre à l'aide d'intégration par parties dans (3.1).

3.3. Théorème de paralinéarisation précisée. L'énoncé suivant précise le théorème de paralinéarisation de Bony-Meyer en explicitant une partie du reste.

Théorème 3.3.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in H^s_{loc}(\Omega)$ avec $s > \frac{n}{2}$, réelle, soit f une fonction C^∞ au voisinage des valeurs de u ; pour tout paraproduit T sur $\mathbb{R}^n$, il existe $R \in \mathrm{Op}\, \Sigma^{0,0}_{s-\frac{n}{2}}(\Omega)$ tel que $f(u) - \mathrm{OPP}_T(f'(u)).u - R(u,u) \in H^{3s-n}_{loc}(\Omega)$.

Démonstration. Après s'être ramené à un énoncé global, l'idée est de poursuivre un cran plus loin la méthode utilisée par Y. Meyer dans [14] . On peut supposer $f(0) = 0$. On a alors, en considérant une fonction $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que si $\psi = 1 - \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}.)$, $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, la relation suivante : $f(u) = \sum_{q\geq o} v_q$ avec
$v_q = f(\psi(2^{-q+1}D)u + \varphi(2^{-q}D)u) - f(\psi(2^{-q+1}D)u)$.
Dans [14] , Y. Meyer écrit alors une formule de Taylor à l'ordre 2 ; ici on écrira :

$$v_q = \varphi(2^{-q}D)u\, f'(\psi(2^{-q+1}D)u) + (\varphi(2^{-q}D)u)^2 f''(\psi(2^{-q+1}D)u) + R_q \ .$$

Grâce aux caractérisations de H^s par la théorie de Littlewood-Paley, il est aisé de démontrer de $\sum_q R_q \in H^{3s-n}$, le terme $\sum_q (\varphi(2^{-q}D)u)^2 f''(\psi(2^{-q+1}D)u)$ pourra, modulo H^{3s-n}, se mettre sous la forme d'un opérateur paradifférentiel bilinéaire ; le premier terme est plus délicat ; il nécessite en effet l'étude de $f'(\psi(2^{-q+1}D)u) - \psi(2^{-q+N_o}D)(f'(u))$, c'est à dire de la commutation entre une troncature spectrale, $\psi(2^{-q}D)$, et un opérateur non linéaire, la composition avec f'. Pour la démonstration complète, nous renvoyons à [10] , où l'on démontre un théorème plus général permettant d'exprimer explicitement le reste $R(u) = f(u) - T_{f'(u)}.u$ au moyen d'opérateurs linéaires en $f^{(k)}(u)$, est multi-linéaires en u , et ce, modulo un reste aussi régulier que l'on veut.

On a de plus un énoncé analogue pour les équations.

Théorème 3.3.2. Soit u solution réelle $H^s_{loc}(\Omega)$ de (E) avec $s > \frac{n}{2} + m + 1 - d$; pour tout paraproduit T sur $\mathbb{R}^n$, il existe $R \in Op\, \Sigma^{2m-d,0}_{s-\frac{n}{2}-m-1+d}(\Omega)$ tel que, si $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial F/\partial u_\alpha (x,u,\partial^\beta u)_{|\beta| \leqslant m} (i\xi)^\alpha$, on ait :

$$OPP_T(p).u + R(u,u) \in H^{3s-n-3m-1+2d}_{loc}(\Omega)$$

Remarquons que ce théorème est indépendant de toute hypothèse d'hyperbolicité sur (E). Il signifie qu'une équation non linéaire peut être transformée en une équation paradifférentielle, non plus linéaire modulo un reste H^{2s-s_o} comme dans [6] , mais bilinéaire modulo un reste H^{3s-3s_o} .

4. ETUDE DE LA REGULARITE MICROLOCALE DU RESTE.

L'étude de la régularité microlocale du reste nécessite l'introduction d'algèbre destinée à contenir les solutions d'équations non linéaires et qui décrivent la régularité de la solution près de la variété caractéristique . Cette description permet, grâce au lemme de l'hyperplan tangent de majorer le front d'onde H^σ pour $\sigma \leqslant 3s-2s_o$ du reste. La propagation de cette régularité grâce à la notion de paraproduit précisé permettra de conclure la démonstration du théorème 1.2.

4.1. Algèbre associée à une équation non linéaire .

Définition 4.1. Soit $P \in Op\, \Sigma^m_\rho(\Omega)$.

$$H^s(P) = \{u \in H^s_{loc}(\Omega) / P^j u \in H^{s-(m-1)j}_{loc}(\Omega),\ \forall j \leqslant [\rho]\ ,$$

$$P^j u \in H^{s+\rho-mj}_{loc}(\Omega) \quad \text{si } j = [\rho] + 1\} .$$

Ces algèbres ont été introduites par M. Beals dans le cas où P est un opérateur différentiel à coefficients C^∞. Le calcul paradifférentiel permet de démontrer très facilement que $\mathrm{Op}\, \Sigma^{m'}_\rho(\Omega).H^s(P) \subset H^{s-m}(P)$, que, pour tout $s \geq \rho + \frac{n}{2}$ $H^s(P)$ est une algèbre, et que si Q et Q' sont deux opérateurs paradifférentiels tels que $P = Q.Q'$ alors $H^s(P) \subset H^s(Q)$. De même, on démontre facilement la proposition ci-dessous.

<u>Proposition</u> 4.1. Si u solution réelle $H^s_{loc}(\Omega)$ de (E), $s > \frac{n}{2} + m + 1 - d$, alors si $\sigma(P_m)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \partial F/\partial u_\alpha (x,u,\partial^\beta u)_{|\beta|\leq m}\, \xi^\alpha$, on a :

$$u \in H^s(P_m)$$

4.2. <u>Lemme de l'hyperplan tangent</u>. Ce lemme va permettre de traduire l'appartenance à $H^s(P_m)$ en terme de régularité microlocale du reste. Comme nous l'avons vu au premier paragraphe, ce qui pose problème est l'interaction de deux singularités microlocales de directions caractéristiques opposées. Microlocalement près de telles directions (x_o,ξ_o), on se ramène facilement au cas où P_m est d'ordre 1.

le lemme clé est le suivant

<u>Lemme de l'hyperplan tangent</u>. Soit $q_1 \in \mathrm{Op}\, \underline{\Sigma}^1_\rho(\Omega)$ tel que, pour tout $(x,\xi) \in T^*\Omega$, tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on ait $q_1(x,\alpha\xi) = \alpha\, q_1(x,\xi)$; soient $(x_o,\xi_o) \in T^*\Omega$ tel que $q_1(x_o,\xi_o) = 0$ et $d\xi\, q_1(x_o,\xi_o) \neq 0$; soient K et K' deux ouverts coniques de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\overline{K}' \subset K \quad \text{et} \quad \overline{K} \cap T_\xi \operatorname{Car} q_{1\, x_o} = \emptyset \;;$$

il existe alors
- un voisinage ouvert Ω_o de x_o
- un voisinage conique K_o de ξ_o
- un symbole pseudo différentiel λ d'ordre 1 ,

supporté dans $\Omega_o \times K$, et elliptique sur $\Omega_o \times K'$ tel que : pour tout $a_\pm \in S^0(\Omega_o)$ supporté dans $\Omega_o \times \pm K_o$, il existe $r \in \Sigma^{0,0}_\rho(\Omega_o)$ supporté dans $\Omega_o \times K_o \times - K_o$ et

$$\lambda(x,\xi+\eta)\, a_+(x,\xi)\, a_-(x,\eta) = r(x,\xi,\eta)\,\left(q_1(x,\xi) + q_1(x,\eta)\right)$$

Démonstration. Vu la localisation de K , il est facile de démontrer que si $(\xi,\eta)\in K^\delta \times - K^\delta$ et $\xi+\eta \in K$ alors :

$$|\xi+\eta| \leqslant C\delta(|\xi| + |\eta|) , \quad C_1|\eta| \leqslant |\xi| \leqslant C_2|\eta| ,$$

(K^δ désignant l'ensemble des ξ tels que $0 \leqslant |\xi| - (\xi|\xi_o) \leqslant \delta|\xi|$) et ce dès que δ est assez petit.

On peut de plus supposer que microlocalement près de (x_o,ξ_o) $q_1(x,\xi) = \xi_n + s(x,\xi)$ avec $d_\xi s(x_o,\xi_o) = 0$.

Vu que $s(x,-\xi) = - s(x,\xi)$ on a :

$$s(x,\xi) + s(x,\eta) = \sum_{j=1}^{n} \int_o^1 (\xi_j+\eta_j)\partial_{\xi_j} s(x,-\xi+t(\xi+\eta))dt .$$

Soit $b(x,\xi,\eta) = \frac{1}{\xi_n+\eta_n} (s(x,\xi)+s(x,\eta))$

Vu qu'il existe $M > 0$ tel que si $(\xi,\eta)\in K^\delta \times - K^\delta$ et $(\xi+\eta)\in K \left|\frac{\xi_j+\eta_j}{\xi_n+\eta_n}\right| \leqslant M$, que $d_\xi s(x_o,\xi_o) = 0$ et que, quitte à diminuer δ , $|\xi+\eta| \leqslant \varepsilon|\xi|$, on a $|b(x,\xi,\eta)| \leqslant \frac{1}{2}$ dès que $(\xi,\eta)\in K^\delta \times - K^\delta$ et $\xi+\eta \in K$ si δ assez petit et x assez proche de x_o .

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ homogène de degré 0 valant 1 près de K' , pour $|\xi| \geqslant 1$, supportée dans $\overline{K} \cap (|\xi| \geqslant \frac{1}{2})$. on a, pour tout $a_\pm \in S^0(\Omega_o)$ supportée dans $\Omega_o \times \pm K^\delta$,

$$\chi(\xi+\eta) (\xi_n+\eta_n) a_+(x,\xi)a_-(x,\eta) = r(x,\xi,\eta) (q_1(x,\xi) + q_1(x,\eta))$$

avec $$r(x,\xi,\eta) = \frac{\chi(\xi+\eta)a_+(x,\xi)a_-(x,\eta)}{1-b(x,\xi,\eta)}$$

Il est aisé de vérifier que $r \in Op\, \Sigma_\rho^{0,0}(\Omega_o)$ #

Proposition 4.2. Soit u solution réelle $H^s_{loc}(\Omega)$ de (E) avec $s > \frac{n}{2} +m+1-d$; alors, pour tout $R \in Op\, \Sigma^{\mu,\mu'}_{s-\frac{n}{2}-m-1+d}(\Omega)$, avec $\mu \leqslant 2s$, et tout $\sigma \leqslant 3s-n-m-1+d-\mu-\mu'$), $WF_\sigma(R(u,u)) \subset G_{\sigma+\mu+\mu'}$.

Corollaire 4.2. Soit u solution réelle $H^s_{loc}(\Omega)$ de (E) avec $s > \frac{n}{2} +m+1-d$, si $\sigma \leqslant 3s-2m-n+2d-2$, alors

$$WF_{\sigma-m+1}(OPP_T(p)u) \subset G_{\sigma+m+1-d}$$

Idée de la démonstration. On traduit le lemme de l'hyperplan tangent en termes d'opérateurs, puis on itère la relation obtenue tant que le permet la régularité du calcul, puis on applique la relation ainsi obtenue en faisant un découpage microlocal.

4.3. Démonstration du théorème 1. Soit $\sigma \in [2s - \frac{n}{2} - m-1+d, 3s-n-2m-2+2d]$ et soit $(x_o, \xi_o) \notin$ Car $p_m \cup G_{\sigma+m+1-d}$ (resp. C une partie continue quelconque d'une bicaractéristique Γ telle que $F_\sigma \cup H_{\sigma+m+1-d} = \emptyset$) ; il résulte du théorème d'ellipticité microlocale de Bony (resp. du théorème de propagation de Bony) qu'il existe un réel $\delta > 0$, et deux opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 , A et A' tels que :

. A soit elliptique près de (x_o, ξ_o) (resp. de C)

. $A'u \in H^{2s-\frac{n}{2}-m+d}$ (resp $H^{2s-\frac{n}{2}-m-1+d}$)

. pour tout $(x,\xi) \in SE(A)$, $d(\frac{\xi}{|\xi|}, SE(I-A')|_x \cap S^{n-1}) \geqslant 2\delta$.

Soit T un paraproduit tel que le (ii) de la proposition 3.2. s'applique avec $\varepsilon = \delta$; quitte à restreindre SE(A), on peut, d'après le corollaire 4.2.2, supposer que $AOPP_T(p).u \in H^{\sigma-m+1}$ et donc, d'après la proposition 3.2 (ii), $AOPP_T(p)\ A'u \in H^{\sigma-m+1}$; le théorème d'ellipticité microlocale de Bony (resp le théorème de propagation de Bony) assure alors que u est $H^{\sigma+1}$ microlocalement près de (x_o, ξ_o) (resp H^σ microlocalement près de C), d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. ALINHAC : Evolution d'une onde simple. Actes des journées E.D.P. de Saint Jean de Monts 1985.

[2] S. ALINHAC : Paracomposition et opérateurs paradifférentiels Comm. in PDE 11 (1) 1986.

[3] S. ALINHAC : Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires. Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique 1985-1986.

[4] M. BEALS : Self spreading and strengh of singularities for solutions of semi linear wave equations. Annals of Maths 118 (1983).

[5] M. BEALS : Propagation of smoothness for non linear second order strictly hyperbolic differential equations. Proc. of Symp. in Pure Math.43 1985.

[6] J.M. BONY : Calcul symbolique et propagation des singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 1981.

[7] J.M. BONY : Interaction des singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1981-1982 n°2 .

[8] J.M. BONY : Second microlocalization and propagation for semi linear hyperbolic equations. A paraître dans contribution to the workshop and symposium on hyperbolic equations and related topics. Katata and Kyoto, August 27 - Sept 5 1984.

[9] J.Y. CHEMIN : Localisation des singularités pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires en dimension 2 ou à l'ordre 1. C.R.A.S. Paris t.303, I n°9 1986.

[10] J.Y. CHEMIN : Analyse microlocale précisée de solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Thèse de 3ème cycle. Orsay Avril 1986, et articles à paraître.

[11] R. COIFMAN et Y. MEYER : Au-delà des opérateurs pseudodifférentiels. Astérisque 57 (1978).

[12] P. GODIN : Propagation of C^∞ regularity for fully non linear second order strictly hyperbolic equations in two variables. Trans. Amer. Math. Soc. 290 (1985).

[13] R. MELROSE et N. RITTER : Interaction of non linear progressing waves I . Annals of Math 121 (1985).

[14] Y. MEYER : Remarque sur un théorème de J.M. Bony Supp. Rend. Circ. Mat. Palermo n°1, 1981.

[15] J. RAUCH et M. REED : Non linear microlocal analysis of semi linear hyperbolic systems in one space dimension Duke Math. Journal 49 (1982).

***