Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. S. Frank

Perturbations singulières coercives : réduction à des perturbations régulières et applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 18, p. 1-26

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A17_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

PERTURBATIONS SINGULIERES COERCIVES : REDUCTION A DES PERTURBATIONS REGULIERES ET APPLICATIONS.

par L.S. FRANK

Exposé n°XVIII

28 Avril 1987

INTRODUCTION.

La théorie elliptique des perturbations singulières est étroitement liée avec les travaux concernant ce sujet de M.I. Vishik et L.A. Lyusternik, J.L. Lions, D. Huet, P. Fife, A.A. Démidov, G.I. Eskin et d'autres.

Le concept algébrique de coercivité pour les perturbations singulières a été introduit en 1976 dans [1] et son équivalence avec estimations a priori bilatérales uniformes par rapport au petit paramètre dans des espaces du type de Sobolev-Slobodetski d'ordre vectoriel a été établie en 1977 dans [2]. L'idée de la construction d'un opérateur réduisant une perturbation singulière coercive à une perturbation régulière a été avancée en 1977 dans une publication des R.C. di Milano [3]. La méthode de factorisation et de réduction pour cette classe de perturbations singulières a été présentée systématiquement dans une série de publications avec W.D. Wendt et dans sa thèse soutenue en 1983 : [4] (cas différentiel) et [5] (cas d'opérateurs pseudodifférentiels à symboles rationnels) (cf. [6] où les démonstrations détaillées ont été données aussi pour les symboles variables).

Le problème des valeurs propres et le phénomène de bifurcation ont été examinés dans deux notes parues dans les C.R.A.S. [7], [8] (un article détaillé va paraître bientôt dans les Annali di Mat. Pura Appl. [9]).

Dans la première partie de l'exposé une perturbation singulière spécifique, apparaissant dans la théorie des barres élastiques est utilisée pour présenter de façon transparente la méthode de factorisation et de réduction ainsi que son application aux problèmes suivants : comportement asymptotique des solutions, celui des valeurs propres, l'étude du phénomène de bifurcation.

Certains aspects concernant des perturbations singulières des opérateurs strictement hyperboliques sont présentés dans la deuxième partie.

I. PERTURBATION SINGULIERE COERCIVE EN THEORIE DES BARRES ELASTIQUES.

On introduit l'opérateur-colonne A^{ε} associé au problème aux limites singulièrement perturbé apparaissant dans la théorie linéaire des barres élastiques :

$$A^{\varepsilon} = (\pi_U a^{\varepsilon}, \pi_{\partial U} t_1^{\varepsilon}, \pi_{\partial U} t_2^{\varepsilon})^T$$

où $a^{\varepsilon} = \varepsilon^2 D^2 (q(x))^2 D^2 + D^2$, $t_1^{\varepsilon} = 1$, $t_2^{\varepsilon} = - D^2$ $D = - id/dx$, π_U et $\pi_{\partial U}$ étant les

opérateurs de restriction sur $U = (0,1)$ et $\partial U = \{0,1\}$, respectivement, et $q \in C^\infty(\overline{U})$, $q(x) \geq 0$, $\forall x \in \overline{U}$.
On va noter par A^o ,

$$A^o = (\pi_U a^o , \pi_{\partial U} t_1^o)^T$$

avec $a^o = D^2$, $t_1^o = 1$, l'opérateur-colonne réduit correspondant.

On associe à a^ε son ordre vectoriel $\nu = (0,2,2)$, les ordres vectoriels des t_1^ε et t_2^ε étant, respectivement, $\mu_1 = (0,0,0)$ et $\mu_2 = (0,2,0)$.

1. Ellipticité, coercivité, estimations a priori bilatérales.

Dans le cas spécifique considéré la condition de l'ellipticité pour des perturbations singulières s'annonce comme suit :

$$a_o := (q(x))^2 \varepsilon^2 \xi^4 + \xi^2 \sim (1+\varepsilon^2\xi^2)\xi^2 \quad ,$$

ou encore, de façon équivalente,

$$(1.1) \qquad q(x) > 0 \ , \quad \forall x \in \overline{U} \ ,$$

la condition de la coercivité sur les opérateurs-frontière t_j^ε se réduisant à l'inégalité :

$$c(x') := \xi^2 \ (\mathrm{mod}((-1)^{x'} iq(x')\xi+1)) \neq 0 \ , \quad \forall x' \in \partial U \ ,$$

et étant vérifiée automatiquement, (vu que $c(x') = (-1)^{x'} i(q(x'))^{-3}$).
On introduit les normes du type Sobolev-Slobodetski $\|.\|_{(s),\varepsilon}$ d'ordre vectoriel $s = (s_1,s_2,s_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(1.2) \qquad \|u\|_{(s),\varepsilon} := \varepsilon^{-s_1} \| \langle D \rangle^{s_2} \langle \varepsilon D \rangle^{s_3} u\|_{L^2(u)} \quad ,$$

où $\langle D \rangle^2 = 1+D^2$, et on dénote par $H_\varepsilon = H_{(s),\varepsilon}(U)$ la famille d'espaces correspondants, qui sera celle des solutions. On définit les normes $[.]_{\sigma,\varepsilon}$ d'ordre $\sigma \in \mathbb{R}$ pour les fonctions $\varphi : \partial U \to \mathbb{C}$ comme suit :

$$(1.3) \qquad [\varphi]_{\sigma,\varepsilon} := \varepsilon^{-\sigma} \Big(\sum_{x' \in \partial U} |\varphi(x')|^2 \Big)^{1/2}$$

et on dénote par $\mathbb{C}_{\sigma,\varepsilon}(\partial U)$ la famille d'espaces correspondants.

On définit la famille d'espaces des données $(f,\varphi_1,\varphi_2)^T$ comme suit

(1.4) $$\mathcal{D}_\varepsilon := H_{(s-\nu),\varepsilon}(U) \times \mathbb{C}_{s_1,\varepsilon}(\partial U) \times \mathbb{C}_{s_1+s_2-5/2,\varepsilon}(\partial U),$$

les normes dans $\mathcal{D}_\varepsilon$ étant

(1.5) $$\|(f,\varphi_1,\varphi_2)^T\|_{\mathcal{D}_\varepsilon} = \|f\|_{(s-\nu),\varepsilon} + [\varphi_1]_{s_1,\varepsilon} + [\varphi_2]_{s_1+s_2-5/2,\varepsilon} .$$

Dorénavant, il sera supposé que $s = (s_1,s_2,s_3)$ vérifie les inégalités :

(1.6) $$1/2 < s_2 < s/2 \quad , \; s_2 + s_3 > 5/2 .$$

<u>Théorème</u> 1.1. <u>Sous l'hypothèse</u> (1.6) <u>et</u> A^ε <u>étant coercive</u>, <u>l'équivalence suivante est valable uniformément par rapport à</u> ε:

(1.7) $$\|u\|_{H_\varepsilon} \sim \|A^\varepsilon u\|_{\mathcal{D}_\varepsilon} + \|u\|_{L^2(U)} .$$

<u>Remarque</u> 1.2. En faite, vu l'injectivité de $A^\varepsilon : H_\varepsilon \to \mathcal{D}_\varepsilon$, l'équivalence (1.7) est valable sans le terme $\|u\|_{L^2(U)}$ dans le second membre. ■

On va noter $H_o := H_{s_2}(U)$ (espace classique de Sobolev-Slobodetski d'ordre s_2) et $\mathcal{D}_o := H_{s_2-\nu_2}(U) \times \mathbb{C}_o(\partial U)$.

2. <u>Factorisation et réduction à une perturbation régulière</u>.

On a les applications linéaires continues (uniformément par rapport à ε) :

$$H_\varepsilon \xrightarrow{A^\varepsilon} \mathcal{D}_\varepsilon$$

et, de même, l'application linéaire continue pour l'opérateur réduit :

$$H_o \xrightarrow{A^o} \mathcal{D}_o .$$

La question qui se pose de façon naturelle est la suivante :

<u>Peut-on indiquer des opérateurs</u> R_r^ε , R_ℓ^ε , S_r^ε , S_ℓ^ε <u>tels que les diagrammes</u>

$$(2.1)\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{H}_\varepsilon \arrow[r, "A^\varepsilon"] \arrow[d, shift left, "R_r^\varepsilon"] & \mathcal{D}_\varepsilon \arrow[d, shift right, "S_\ell^\varepsilon"'] \\ \mathcal{H}_o \arrow[r, "A^o"] \arrow[u, shift left, "S_r^\varepsilon"] & \mathcal{D}_o \arrow[u, shift right, "R_\ell^\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

<u>soient commutatifs</u> ?

L'une des conséquences de la commutativité de (2.1) serait l'inversibilité (uniforme en ε) de A^ε , à savoir l'isomorphisme : $A^\varepsilon \in \mathrm{ISO}(\mathcal{H}_\varepsilon;\mathcal{D}_\varepsilon)$ uniformément par rapport à ε , vu que l'on a : $A^o \in \mathrm{ISO}(\mathcal{H}_o;\mathcal{D}_o)$. Une autre conséquence importante de la commutativité de (2.1) serait :

$$(2.2)\qquad A^\varepsilon = R_\ell^\varepsilon \circ A^o \qquad \text{(factorisation)}$$

et

$$(2.3)\qquad S_\ell^\varepsilon \circ A^\varepsilon = A^o \qquad \text{(réduction)}.$$

<u>Remarque</u> 2.1. On va utiliser la définition usuelle des opérateurs pseudodifférentiels (basée sur la x-représentation), de sorte que, comme on le verra plus tard, les opérateurs R_r^ε , S_r^ε seront standard (c'est-à-dire, indépendants de A^ε), leur seule fonction consistant à envoyer $\mathcal{H}_\varepsilon$ dans $\mathcal{H}_o$ et vice versa. Par contre, si on travaille avec les opérateurs pseudodifférentiels en y-représentation, alors R_ℓ^ε , S_ℓ^ε deviennent standard. ∎

La réponse à la question de commutativité de (2.1) posée ci-dessus est affirmative, bien entendu non seulement pour la perturbation singulière considérée, mais pour toute perturbation singulière coercive, la classe de ces perturbations étant définie par des conditions purement algébriques.

Il va de soi que, généralement la définition des opérateurs R_ℓ^ε (factorisant) et S_ℓ^ε (réduisant) n'est pas explicite, car, outre des constructions purement algébriques, elle exige l'intervention des séries de Von Neuman, (à savoir d'une opération de l'analyse fonctionelle.)

Toutefois, en sacrifiant la commutativité exacte de (2.1) et en la remplaçant par la commutativité approchée modulo des opérateurs de normes petites lorsque $\varepsilon \to 0$, on peut définir des opérateurs R_ℓ^ε et S_ℓ^ε en question explicitement, à savoir en passant uniquement par des constructions de parametrix correspondantes, quel que soit la perturbation singulière coercive A^ε .

Dans le cas considéré on trouve immédiatement la factorisation exacte de A^ε avec R^ε l'opérateur-matrice 3×2 définit comme suit :

$$(2.4) \qquad \mathcal{R}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \pi_U(\varepsilon^2 D^2 (q(x))^2+1), & \pi_U\, 0 \\ \pi_{\partial U}\; 0 & , \; 1 \\ -\pi_{\partial U}\; 1 & , \; 0 \end{pmatrix}$$

(ce qui a déterminé le choix de l'exemple considéré).
Ici, outre des opérateurs déjà rencontrés en tant que éléments de A^{ε} et A^{o} , apparaît aussi l'opérateur du type de Poisson $\pi_U k^{\varepsilon}$ (en l'occurrence avec $k^{\varepsilon} \equiv 0$), car il applique les fonctions sur ∂U en des fonctions sur U .
Comme conséquence de l'ellipticité et de la coercivité de A^{ε}, l'opérateur $\mathcal{R}^{\varepsilon}_{\ell}$ est invertible, son inverse $S^{\varepsilon}_{\ell} = (\mathcal{R}^{\varepsilon}_{\ell})^{-1}$ étant un opérateur matriciel 2×3 du type de Boutet de Monvel, singulièrement perturbé.

Bien entendu, même dans le cas simple considéré (avec $q(x) > 0$ quelconque) on ne peut pas donner une formule explicite pour S^{ε}_{ℓ} . Par contre, on peut définir explicitement un opérateur S^{ε}_{ℓ} tel que les diagrammes (2.1) ci-dessus soient commutatifs modulo opérateurs de normes petites lorsque $\varepsilon \to 0$.

Soit $s^{\varepsilon} = Op(1+(q(x))^2(\varepsilon\xi)^2)^{-1}$, à savoir

$$(2.5) \quad \pi_U(s^{\varepsilon} f)(x) := (2\varepsilon q(x))^{-1} \int_U f(y) \exp(-|x-y|/(\varepsilon q(x)))dy, \; x \in U ,$$

et soit l'opérateur de Poisson $\pi_U E^{\varepsilon}$,

$$(2.6) \qquad \pi_U(E^{\varepsilon}\varphi)(x) = \sum_{x'\in\partial U} \varphi(x')\exp(-|x-x'|/(\varepsilon q(x'))), \; x \in U .$$

On introduit l'opérateur réduisant à gauche $S^{\varepsilon} = S^{\varepsilon}_{\ell}$ comme suit

$$(2.7) \qquad S^{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \pi_U(1-E^{\varepsilon}\pi_{\partial U})s^{\varepsilon} & , \; \pi_U\, 0, & \pi_U(-E^{\varepsilon}) \\ \pi_{\partial U}\; 0 & , \; 1 & , \; 0 \end{pmatrix}$$

où $\pi_U 0$, $\pi_U(-E^{\varepsilon})$ sont des opérateurs de Poisson, $\pi_{\partial U} 0$ est un opérateur de trace, 1 et 0 sont l'identité et zéro, respectivement, dans $L(\mathbb{C}_{s_1,\varepsilon}(\partial U);\mathbb{C}_{s_1,\varepsilon}(\partial U))$ et $L(\mathbb{C}_{s_1+s_2-s/2,\varepsilon}(\partial U) \; ; \; \mathbb{C}_{s_1,\varepsilon}(\partial U))$.

Ici apparaît également un opérateur singulièrement perturbé g^{ε} ,

$$g^{\varepsilon} := E^{\varepsilon} \circ \pi_{\partial U}\, s^{\varepsilon} ,$$

dit opérateur de Green singulier (singulièrement perturbé), la classe de ces opérateurs sans le petit paramètre ayant été introduite explicitement par Boutet de Monvel.

Soit

(2.8) $$\gamma = \min\{1, 5/2 - s_2\} .$$

Vu (2.6), on a : $\gamma > 0$.

On va introduire encore une famille d'espaces $\mathcal{W}_\varepsilon$ comme suit :

(2.9) $$\mathcal{W}_\varepsilon := H_{(s-(0,2,0)),\varepsilon}(U) \times \mathbb{C}_{s_1}(\partial U) .$$

Théorème 2.2. Sous l'hypothèse (1.6) et avec S^ε défini par (2.5)-(2.7), on a pour la perturbation singulière coercive A^ε la relation suivante :

(2.10) $$S^\varepsilon \circ A^\varepsilon = A^0 + (\varepsilon^\gamma \ln(1+\varepsilon^{-1}))Q_1^\varepsilon ,$$

où la famille d'applications linéaires Q_1^ε ,

(2.11) $$Q_1^\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{W}_\varepsilon$$

est continue (uniformément par rapport à ε).

Idée de la démonstration du Th.2.2.

1. Si $U = \mathbb{R}_+$ et $q(x) \equiv q_0$, $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors on a la relation exacte : $S^\varepsilon \circ A^\varepsilon = A^0$

2. Si $q(x) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $q(x) = q_\infty + q'(x)$, $q' \in S(\overline{\mathbb{R}}_+)$, alors $S^\varepsilon \circ A^\varepsilon - A^0 = O(\varepsilon^\gamma \ln\ (1+\varepsilon)^1)$ et il en est de même lorsque $\mathbb{R}_+$ est remplacé par U .

En effet, pour démontrer cela, on utilise la formule de commutation pour les opérateurs pseudodifférentiels, en l'occurrence, pour $f \in C_0^\infty(U)$, on a :

$$(s^\varepsilon \circ a^\varepsilon)f := (\mathrm{Op}(1+(q(x)\varepsilon\xi)^2)^{-1} \circ \mathrm{Op}\ (1+(q(x)\varepsilon\xi)^2)\xi^2)f =$$

$$= \mathrm{Op}\ \xi^2 f + i\varepsilon\ \mathrm{Op}((\sigma_{s^\varepsilon})'_\xi\ (\sigma_{a^\varepsilon})'_x)f + \dots =$$

$$= a \circ f + \varepsilon Q^\varepsilon f ,$$

où $\mathrm{ord}\ Q^\varepsilon = (0,2,-1)$, et $Q^\varepsilon : H_s \to H_{s-2}$ $\forall s$ uniformément en ε .■

En outre, on a : $(s^\varepsilon \circ a^\varepsilon - a^0)f = O(\varepsilon^2 D^4 f)$, $(a^\varepsilon - a^0)f = O(\varepsilon^2 D^4 f)$, $\varepsilon \to 0$, $\forall f \in C_0^\infty(U)$.

Remarque 2.3. L'énoncé du Théorème 2.2 peut être formulé de façon équivalente comme suit :

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_\varepsilon \arrow[rr, "A^\varepsilon"] \arrow[dr, "A^o"'] & & \mathcal{D}_\varepsilon \arrow[dl, "S^\varepsilon"] \\ & \mathcal{W}_\varepsilon & \end{tikzcd}$$

est commutatif modulo une erreur d'ordre $O(\varepsilon^\gamma \ \ln\,(1+\varepsilon^{-1}))$.

En outre, $A^o : \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{W}_\varepsilon$ est un isomorphisme (uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0,\varepsilon_o]$), pourvu que ε_o soit suffisamment petit (en l'occurence, dans le cas considéré, $\varepsilon_o < \infty$ peut être quelconque, les constantes dans l'isomorphisme ci-dessus pouvant dépendre de ε_o).

Remarque 2.4. En faite, le nombre γ dans l'énoncé du Théorème 2.2 peut être choisi de meilleure façon, à savoir, $\gamma = \min\{k, 5/2-s_2\}$ où k est l'ordre d'approximation de A^ε par A^o sur les fonctions $u \in C^\infty(\overline{U})$. En l'occurence, $\gamma = \min\{2, 5/2-s_2\}$ dans le cas considéré, si les données sont C^∞, à savoir, on a :

$$\|(Q^\varepsilon)^2 (A^\varepsilon)^{-1}(f,\varphi_1,\varphi_2)^T\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C_{f,\varphi_1,\varphi_2} \ \varepsilon^\gamma (\mathrm{en}(1+\varepsilon))^2 \quad ,$$

$\forall f \in C^\infty(\overline{U})$, $\varphi_j \in \mathbb{C}_o(\partial U)$.

Comme on verra plus tard, on a aussi :

$$\|(Q^\varepsilon)^2 (A^\varepsilon)^{-1}(f,\varphi_1,\varphi_2)^T\|_{L^2(U)} \leqslant C_{f,\varphi_1,\varphi_2} \quad \varepsilon^4$$

dans le cas considéré si les données sont C^∞.

Remarque 2.5. Si $1/2 < s_2 < 5/2$, $s_2 \neq 3/2$, alors le facteur $\ln(1+\varepsilon^{-1})$ dans le second membre de (2.10) peut être supprimé, de sorte que dans ce cas on a :

$$S^\varepsilon \circ A^\varepsilon = A^o + \varepsilon^\gamma \, Q_1^\varepsilon \quad . \tag{2.12}$$

où $\gamma = \min\{1, 5/2-s_2\}$ et $Q_1^\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to \mathcal{W}_\varepsilon$ est continue uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0,\varepsilon_o]$ (cf.[5,6]).

3. APPLICATIONS.

a) Formules asymptotiques dans le cas des données C^∞.

On va supposer que f, φ_1, φ_2 ne dépendent pas de ε et, de plus, que $f \in C^\infty(\overline{U})$.

Comme conséquence du Théorème 2.2, on a :

$$(A^{\varepsilon})^{-1} = \sum_{k\geqslant o} (Q^{\varepsilon})^{k}(A^{o})^{-1}S^{\varepsilon} \quad ,$$

où

$$Q^{\varepsilon} = I - (A^{o})^{-1} S^{\varepsilon}A^{\varepsilon} \quad ,$$

la série $\sum_{k\geqslant o} (Q^{\varepsilon})^{k}$ étant convergente (uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0,\varepsilon_o]$ avec ε_o suffisamment petit) dans l'algèbre $L(H_{(s),\varepsilon}(U); H_{(s),\varepsilon}(U))$ des opérateurs linéaires dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$.

On introduit l'opérateur réduisant asymptotiquement $\widetilde{S}^{\varepsilon}$ comme suit

$$(3.1) \qquad \widetilde{S}^{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \pi_U(1-E^{\varepsilon}\pi_{\partial U}), & \pi_U 0 , & \pi_U(-E^{\varepsilon}) \\ \pi_{\partial U} \; 0 & , \; 1 & , \; 0 \end{pmatrix}$$

<u>Lemme</u>. Pour tout $s = (0,s_2,s_3)$ satisfaisant (1.6) et quelques soient $f \in C^{\infty}(\overline{U})$, φ_1, φ_2, il existe une constante C qui ne dépend que de f, φ_1, φ_2, q et s et tel que l'on ait :

$$(3.2) \qquad \| (A^{o})^{-1}(S^{\varepsilon}-\widetilde{S}^{\varepsilon})(f,\varphi_1,\varphi_2)^{T}\|_{(s),\varepsilon} \leqslant C(\varepsilon^{2}+\varepsilon^{7/2-s_2}) \; .$$

<u>Preuve</u>. On trouve aisément :

$$(S^{\varepsilon}-\widetilde{S}^{\varepsilon}) \; (f,\varphi_1,\varphi_2)^{T} = (w_{\varepsilon},0)^{T}$$

où

$$(3.3) \qquad w_{\varepsilon} = \pi_U(1-E^{\varepsilon}\pi_{\partial U}) \; (s^{\varepsilon}-1)f \; .$$

On rappelle que $s^{\varepsilon} = Op(1+(q(x)\varepsilon\xi)^{2})^{-1}$,

de sorte que l'on trouve :

(3.4) $$((s^{\varepsilon}-1)f)(x) = \varepsilon^2 s^{\varepsilon}(q(x))^2 \partial^2(\ell_o f) .$$

où $\partial = d/dx$ et ℓ_o est le prolongement de f par zéro sur $\mathbb{R}$: $(\ell_o f)(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus U$. Ainsi, on a :

(3.5) $$(s^{\varepsilon}-1)f = \varepsilon^2 s^{\varepsilon}((q(x))^2 f(x) \sum_{x'\in\partial U} \delta'(x-x')) +$$

$$+ 2\varepsilon^2 s^{\varepsilon}((q(x))^2 f'(x) \sum_{x'\in\partial U} \delta(x-x')) + \varepsilon^2 s^{\varepsilon}((q(x))^2 f''(x)) .$$

Par conséquent, le terme principal v_ε dans le développement asymptotique de w_ε est celui dans le second membre de (3.5), qui contient $\delta'(x-x')$:

(3.6) $$v_\varepsilon := \varepsilon^2 \sum_{x'\in\partial U} \pi_U(1-E^{\varepsilon}(x,x')\pi_{\partial U}) s^{\varepsilon}(f(x')(q(x'))^2\delta'(x-x')) = v_{\varepsilon,o} + v_{\varepsilon,1} .$$

Dans l'expression de $v_\varepsilon = v_{\varepsilon,o} + v_{\varepsilon,1}$ les deux termes sont localisés aux voisinages de ∂U. Ainsi, on peut écrire (avec $\pi_+ = \pi_{\mathbb{R}_+}$, $\pi_o = \pi_{\partial\mathbb{R}_+}$, $F^{-1}_{\xi\to x}$ la transformée de Fourier inverse et Π_o la transformée de Fourier de π_o) :

$$v_{\varepsilon,o} = \varepsilon^2 \pi_+(1-E^{\varepsilon}(x,o)\pi_o) s^{\varepsilon}((q(0))^2 f(0)\delta'(x)) =$$

$$= f(0)(q(0))^2\varepsilon^2\pi_+ F^{-1}_{\xi\to x}((1-\varepsilon q(o)(1+iq(o)\varepsilon\xi)^{-1}\Pi_o)(1+(q(x)\varepsilon\xi)^2)^{-1} i\xi) =$$

$$= (2q(x))^{-1} f(o)(q(o))^2 \varepsilon\pi_+ F^{-1}_{\xi\to x}((1-\varepsilon q(o)(1+iq(o)\varepsilon\xi)^{-1}\Pi_o)((1-iq(x)\varepsilon\xi)^{-1}-(1+iq(x)\varepsilon\xi)^{-1})$$

$$= \varepsilon\pi_+(2(q(x))^2)^{-1}(q(o))^2 f(o) F^{-1}_{\xi\to x}(q(o)(1+iq(o)\varepsilon\xi)^{-1} - q(x)(1+iq(x)\varepsilon\xi)^{-1}) =$$

$$= \pi_+\varepsilon(2q(x))^{-1}(q(o))^3 f(o)(q(o)-q(x)) F^{-1}_{\xi\to x}((1+iq(o)\varepsilon\xi)^{-1}(1+iq(x)\varepsilon\xi)^{-1}) =$$

$$= \pi_+\varepsilon a(x)\,\phi(x,x/\varepsilon),$$

où

$$a(x) = (2xq(x))^{-1}(q(o))^3 f(o)(q(o)-q(x)) \in C^\infty(\overline{U}) ,$$

et

$$\phi(x,\rho) = \rho F^{-1}_{\xi\to\rho}((1+iq(o)\xi)^{-1}(1+iq(x)\xi)^{-1}) ,$$

$\phi \in C^\infty(\overline{U}\times\mathbb{R}_+)$ étant à décroissance exponentielle lorsque $\rho\to\infty$ (uniformément par rapport à $x\in\overline{U}$).

Ici on a utilisé les formules :

$$\Pi_o(1-iq(x)\varepsilon\xi)^{-1} = 0 \ , \ \varepsilon q(x)\Pi_o(1+iq(x)\varepsilon\xi)^{-1} = 1 \ ,$$

$$\pi_+ F^{-1}_{\xi\to x}(1-iq(x)\varepsilon\xi)^{-1} = 0 \ .$$

On vérifie aisément que

$$\| \varepsilon a(x)\ \phi\ (x,x/\varepsilon)\|_{(s),\varepsilon} \leqslant C\ \varepsilon^{3/2-s_2} \ ,$$

ce qui prouve que la même estimation est valable pour w_ε :

$$\|w_\varepsilon\|_{(s),\varepsilon} \leqslant C\ \varepsilon^{3/2-s_2} \ .$$

On va noter :

$$u_\varepsilon \ : = \ (A^o)^{-1}(S^\varepsilon-\widetilde{S}^\varepsilon)(f,\varphi_1,\varphi_2)^T = (A^o)^{-1}(w_\varepsilon,0)^T$$

de sorte que u_ε est la solution du problème aux limites :

(3.7) $$A^o u_\varepsilon = (w_\varepsilon,0)^T \ .$$

Comme conséquence de (3.3)-(3.5), w_ε peut être représenté sous la forme :

$$w_\varepsilon = v_\varepsilon + \varepsilon^2(q(x))^2 f''(x) + $$
$$+ \ v_\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^4 s^\varepsilon((q(x))^2\partial^2(q(x))^2\ell_o f''(x) \ ,$$

où v_ε est défini par (3.6) et $v_\varepsilon^{(1)}$ est du type "couche limite", de la forme :

$$v_\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^2\pi_u(1-E^\varepsilon\pi_{\partial u})s^\varepsilon(\psi(x')\otimes\delta(x-x'))$$

avec $\|v_\varepsilon^{(1)}\|_{(s),\varepsilon} \leqslant C\ \varepsilon^{3/2-s_2}$, car le terme principal v_ε dans le développement asymptotique de w_ε satisfait à cette inégalité. De plus, on trouve aisément :

$$v_\varepsilon + v_\varepsilon^{(1)} = (2(q(x))^2)^{-1}(q(o))^2 f(o)(\exp(-x((\varepsilon q(o)))-\exp(-x(\varepsilon q(x))) +$$

$$+ \sum_{k>o} \varepsilon^k(a_k(x)\exp(-x((\varepsilon q(o)))+b_k(x)\exp(-x((\varepsilon q(x))) \ .$$

Vu le caractère "couche limite" de v_ε et $v_\varepsilon^{(1)}$, la solution $u_\varepsilon^{(1)}$ du problème :

$$A^{o}u_{\varepsilon}^{(1)} = (v_{\varepsilon}+v_{\varepsilon}^{(1)},0)^{T}$$

s'obtient asymptotiquement en n'utilisant que le calcul symbolique (algébrique) usuel. Ainsi, on trouve le premier terme dans le développement asymptotique de $u_{\varepsilon}^{(1)}$ en multipliant le terme principal de $v_{\varepsilon} + v_{\varepsilon}^{1}$ contenant $\exp(-x/(\varepsilon q(y)))$ par $(\varepsilon q(y))^{2}$ où $y = 0$ et $y = x$. Ainsi, on trouve : $\| u_{\varepsilon}^{(1)}\|_{(s),\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{7/2-s_2}$.

D'autre part, il est évident que pour

$$u_{\varepsilon}^{(2)} : = (A^{o})^{-1}(\varepsilon^{2}(q(x))^{2}f''(x),0)^{T}$$

on a :

$$\| u_{\varepsilon}^{(2)}\|_{(s),\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{2} .$$

Il est évident que

$$u_{\varepsilon}^{(3)} : = (A^{o})^{-1} (\varepsilon^{4}s^{\varepsilon}((q(x))^{2}\partial^{2}(q(x))^{2}\ell_{o}f''(x)),0)^{T}= \varepsilon^{2}\, \tilde{u}_{\varepsilon}^{(1)},$$

avec $\tilde{u}_{\varepsilon}^{(1)}$ ayant le même comportement asymptotique que $u_{\varepsilon}^{(1)}$ ci-dessus.

Ainsi, u_{ε}^{3} vérifie l'estimation :

$$\| u_{\varepsilon}^{(3)}\|_{(s),\varepsilon} \leqslant C\, \varepsilon^{11/2-s_2} ,$$

ce qui prouve finalement (3.2) pour $u_{\varepsilon} = u_{\varepsilon}^{(1)} + u_{\varepsilon}^{(2)} + u_{\varepsilon}^{(3)}$. ∎

On a l'identité :

$$(A^{\varepsilon})^{-1} = (A^{o})^{-1} + Q^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}S^{\varepsilon} + (Q^{\varepsilon})^{2}(A^{\varepsilon})^{-1} .$$

En vertu du Lemme, on peut remplacer S^{ε} et Q^{ε} par $\tilde{S}^{\varepsilon}$ et $\tilde{Q}^{\varepsilon}$, respectivement, où $\tilde{Q}^{\varepsilon} = I - (A^{o})^{-1}\, \tilde{S}^{\varepsilon}A^{\varepsilon}$.

Comme conséquence du Lemme, on a (sur les données C^{∞}) dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$:

$$(A^{o})^{-1}S^{\varepsilon} = (A^{o})^{-1}\tilde{S}^{\varepsilon} + O(\varepsilon^{2} + \varepsilon^{7/2-S_2}).$$

Vu que la norme de Q^{ε} : $H_{(s),\varepsilon}(U) \to H_{(s),\varepsilon}(U)$ est $O(\varepsilon^{\gamma}\ \ln(1+\varepsilon^{-1}))$, on peut également écrire (dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$) :

$$Q^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}\, S^{\varepsilon} = Q^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}\, \tilde{S}^{\varepsilon} + O(\varepsilon^{2+\gamma}+\varepsilon^{11/2-s_2}).$$

Ainsi, on trouve (dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$) :

$$(A^{\varepsilon})^{-1} = (A^{o})^{-1}\tilde{S}^{\varepsilon} + Q^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}\tilde{S}^{\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon))^{2}) .$$

On rappelle que $\gamma = \min\{1, 5/2-s_2\} > 0$, car $s = (0,s_2,s_3)$ vérifie (1.6).
On va noter par S^{o} l'opérateur réduit de S^{ε} ,

$$S^{o} := \begin{pmatrix} \pi_U 1, & \pi_U 0, & \pi_U 0 \\ \pi_{\partial U} 0, & 1, & 0 \end{pmatrix} ,$$

et par S_1^{ε} l'opérateur :

$$S_1^{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \pi_U E^{\varepsilon}\pi_{\partial U} 1, & \pi_U 0, & \pi_U E^{\varepsilon} \\ \pi_{\partial U} 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} ,$$

de sorte que l'on a :

$$\tilde{S}^{\varepsilon} = S^{o} - S_1^{\varepsilon} .$$

Ainsi, on peut écrire (dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$) :

$$(A^{\varepsilon})^{-1} = (A^{o})^{-1}S^{o} - (A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon} + Q^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}S^{o} - Q^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon} + O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^{2}).$$

Comme conséquence immédiate du Lemme, on trouve (sur les données C^{∞} et en mesurant l'erreur dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$) :

$$Q^{\varepsilon} - \tilde{Q}^{\varepsilon} = (A^{o})^{-1}(\tilde{S}^{\varepsilon}-S^{\varepsilon})A^{\varepsilon} = O(\varepsilon^{2}+\varepsilon^{7/2-s_2}),$$

où, bien entendu, on a désigné par $\tilde{Q}^{\varepsilon}$ l'opérateur qui s'obtient en remplaçant dans l'expression de Q^{ε} l'opérateur S^{ε} par $\tilde{S}^{\varepsilon}$.
Ainsi, en remplaçant Q^{ε} par $\tilde{Q}^{\varepsilon}$, on trouve (sur les données C^{∞} et en mesurant l'erreur dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$) :

$$(A^{\varepsilon})^{-1} = (A^{o})^{-1}S^{o} - (A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon} + \tilde{Q}^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}S^{o} + O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^{2}) .$$

Ici on a utilisé l'estimation :

$$\| Q^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon}(f,\varphi_1,\varphi_2)^{T}\|_{(s),\varepsilon} \leq C\,\varepsilon^{\gamma}\ln(1+\varepsilon^{-1})\|(A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon}(f,\varphi_1,\varphi_2)^{T}\|_{(s),\varepsilon} =$$

$$= C\,\varepsilon^{\gamma}\ln(1+\varepsilon^{-1})\|(A^{o})^{-1}(\pi_U E^{\varepsilon}(\pi_{\partial U}f+\varphi_2),0)^{T}\|_{(s),\varepsilon} \leq C\varepsilon^{\gamma+5/2-s_2}\ln(1+\varepsilon^{-1})$$

$$\leq C\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^{2}$$

Puis, on trouve :

$$\tilde{Q}^{\varepsilon} = (A^{o})^{-1}(A^{o}-\tilde{S}^{\varepsilon}A^{\varepsilon}) = (A^{o})^{-1}(A^{o}-S^{o}A^{\varepsilon}) +$$

$$+ (A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon}A^{\varepsilon} = (A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon}A^{\varepsilon} + O(\varepsilon^2),$$

car sur les données C^{∞} on a :

$$(A^{o})^{-1}(A^{o} - S^{o}A^{\varepsilon}) = O(\varepsilon^2) .$$

Finalement, on peut écrire la formule asymptotique suivante (sur les données C^{∞}) :

$$(A^{\varepsilon})^{-1} = (A^{o})^{-1}S^{o} - (A^{o})^{-1} S_1^{\varepsilon} + (A^{o})^{-1} S_1^{\varepsilon}A^{\varepsilon}(A^{o})^{-1}S^{o} + O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^2) =$$
$$= (A^{o})^{-1}S^{o} + (A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon}(A^{\varepsilon} (A^{o})^{-1}S^{o} - I) + O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^2) ,$$

où l'erreur est mesurée dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$.

Par conséquent, on retrouve immédiatement la formule de Vishik-Lyusternik sans être obligé de passer par la procédure itérative algorithmiquement assez compliquée qui a été proposée par eux antérieurement dans le cas des opérateurs fortement elliptiques.

En effet, on trouve pour la solution u_{ε} du problème aux limites $A^{\varepsilon}u_{\varepsilon} = (f,\varphi_1,\varphi_2)^T$ la formule asymptotique suivante :

$$u_{\varepsilon} := (A^{\varepsilon})^{-1}(f,\varphi_1,\varphi_2)^T = u^{o} + (A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon}(A^{\varepsilon}u^{o}-(f,\varphi_1,\varphi_2)^T) + O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^2) =$$
$$= u^{o} - (A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon}(\varepsilon^2D^2(q(x))^2D^2u^{o},0,\pi_{\partial U} D^2u^{o}+\varphi_2)^T + O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^2) = u^{o} -$$

$$- (A^{o})^{-1}S_1^{\varepsilon}(0,0,\pi_{\partial U}D^2u^{o}+\varphi_2)^T + O(\varepsilon^{2\gamma}\ln(1+\varepsilon^{-1}))^2) = u^{o} - (A^{o})^{-1}(E^{\varepsilon}(\pi_{\partial U}D^2u^{o}+\varphi_2),0)^T +$$

$$+ O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^2) = u^{o} +\varepsilon^2 \sum_{x'\in\partial U} (q(x'))^2(\varphi_2(x')-(u^{o})''(x'))\exp(-|x-x'|/(\varepsilon q(x'))$$

$$+ O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^2)=u^{o}+\varepsilon^2E^{\varepsilon}(q(x'))^2(\varphi_2(x')+\pi_{\partial U}D^2u^{o}) + O(\varepsilon^{2\gamma}(\ln(1+\varepsilon^{-1}))^2) ,$$

l'erreur étant mesurée dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$ avec $s = (0,s_2,s_3)$ satisfaisant (1.6).

Ici $u^{o} := (A^{o})^{-1}S^{o}(f,\varphi_1,\varphi_2)^T$ est la solution du problème réduit.

En outre, on a utilisé la formule asymptotique :

$$(A^{o})^{-1}(\pi_U \exp(-x/(\varepsilon q),0)^T = - (q\varepsilon)^2\pi_U\exp(-x/(\varepsilon q)) + O(\varepsilon^{7/2-s_2})$$

l'erreur étant mesurée dans $H_{(s),\varepsilon}(U)$.

b) Problème des valeurs propres.

On considère le problème des valeurs propres pour la perturbation singulière A^ε ci-dessus :

(3.8) $$(\lambda^\varepsilon \tilde{I} - A^\varepsilon)u^\varepsilon = (0,0,0)^T$$

où $\tilde{I}v = (v,0,0)^T$.

On rappelle que

(3.9) $$A^\varepsilon = (\pi_U(\varepsilon^2 D^2(q(x))^2 D^2 + D^2), \pi_{\partial U}\, 1, \pi_{\partial U}(-D^2))^T ,$$

le problème des valeurs propres réduit étant

(3.10) $$(\lambda^o I - A^o)u^o = (0,0)^T$$

avec $Iv = (v,0)^T$ et $A^o = (\pi_U D^2, \pi_{\partial U} t_1^o)^T$, $t_1^o = 1$.

Pour tout λ n'appartenant pas au spectre de A^o et pour $\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$ avec ε_o suffisamment petit, l'opérateur $(\lambda\tilde{I}-A^\varepsilon)^{-1}$ existe et, de plus, on a avec le même S^ε que ci-dessus :

(3.11) $$(\lambda\tilde{I}-A^\varepsilon)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0} (Q_\lambda^\varepsilon)^k (\lambda I-A^o)^{-1} S^\varepsilon ,$$

où

(3.12) $$Q_\lambda^\varepsilon = 1 - (\lambda I-A^o)^{-1} S^\varepsilon(\lambda\tilde{I}-A^\varepsilon) .$$

Afin de trouver des formules asymptotiques pour les valeurs propres λ^ε de A^ε , on va utiliser l'identité suivante :

$$\lambda^\varepsilon = \frac{\mathrm{Res}\,\lambda < (\lambda\tilde{I}-A^\varepsilon)^{-1}(f,\varphi_1,\varphi_2)^T, v >}{\mathrm{Res} < (\lambda\tilde{I}-A^\varepsilon)^{-1}(f,\varphi_1,\varphi_2)^T, v >}$$

où Res signifie le résidu en $\lambda = \lambda^\varepsilon$ de la fonction méromorphe correspondante en son pôle λ^ε .

Bien entendu, un choix spécial de $(f,\varphi_1,\varphi_2)^T$ et de v s'impose pour aboutir à une formule asymptotique pour λ^ε , lesquels seront choisis comme suit :

(3.14) $$(f,\varphi_1,\varphi_2)^T = (u^o,0,0)^T , \; v = u_o , < u^o,u_o > = 1$$

avec u^o la fonction propre de A^o correspondant à la valeur propre λ^o telle que $\lambda^\varepsilon \to \lambda^o$ $(\varepsilon\to 0)$ et u_o la fonction propre de l'opérateur adjoint à A^o

(réalisé en tant qu'opérateur $a^o : \overset{\circ}{H}_1(u) \cap H_2(U) \to L^2(U)$) correspondant à la valeur propre $\bar{\lambda}^o$ .Bien entendu, dans le cas considéré on a :

$$\lambda^o = \bar{\lambda}^o \quad , \quad u^o = u_o \quad , \quad \| u^o \|_{L^2(U)} = 1 \ .$$

On utilise de nouveau l'identité :

$$(\lambda\tilde{I} - A^\varepsilon)^{-1} = (\lambda I - A^o)^{-1} S^\varepsilon + Q^\varepsilon_\lambda (\lambda I - A^o)^{-1} S^\varepsilon + (Q^\varepsilon_\lambda)^2 (\lambda\tilde{I} - A^\varepsilon)^{-1}$$

et, tout comme dans le cas de formules asymptotiques pour la solution du problème aux limites $A^\varepsilon u_\varepsilon = (f,\varphi_1,\varphi_2)^T$, on remplace S^ε par $\tilde{S}^\varepsilon$ ci-dessus.

En faite, vu que $\pi_{\partial U} u^o = 0$, on a :

$$\tilde{S}^\varepsilon (u^o,0,0)^T = S^o (u^o,0,0)^T = (u^o,0)^T \ .$$

Ainsi, on trouve :

$$\begin{aligned}
<(\lambda\tilde{I} - A^\varepsilon)^{-1} (u^o,0,0)^T, u_o> &= <(\lambda I - A^o)^{-1} \tilde{S}^\varepsilon u^o, u_o> + < Q^\varepsilon_\lambda (\lambda I - A^o)^{-1} \tilde{S}^\varepsilon u^o, u_o> + \ldots = \\
&= (\lambda - \lambda^o)^{-1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ (\lambda-\lambda^o)^{-1} < (\lambda I - A^o)^{-1} (\lambda I - A^o - \tilde{S}^\varepsilon (\lambda\tilde{I} - A^\varepsilon)) u^o, u_o > + \ldots = \\
&= (\lambda-\lambda^o)^{-1} + (\lambda-\lambda^o)^{-1} < (\lambda I - A^o)^{-1} (\tilde{S}^\varepsilon A^\varepsilon - A^o) u^o, u_o > + \ldots = \\
&= (\lambda-\lambda^o)^{-1} + (\lambda-\lambda^o)^{-1} < (\tilde{S}^\varepsilon A^\varepsilon - A^o) u^o, ((\lambda I - A^o)^{-1})^* u_o > + \ldots = \\
&= (\lambda-\lambda^o)^{-1} + (\lambda-\lambda^o)^{-2} < (\tilde{S}^\varepsilon A^\varepsilon - A^o) u^o \ , \ (u_o, \pi_{\partial U}(- \frac{\partial u_o}{\partial N}))^T > + \ldots \ ,
\end{aligned}$$

où les points ... signifient les termes d'ordre plus élevé en puissance de ε et N est la normale unité intérieure en ∂U , c'est-à-dire, $\partial u^o / \partial N = (-1)^{x'} du^o/dx$, $x' \in \partial U$ dans le cas considéré.

Ici on a utilisé les formules :

$$(I - \tilde{S}^\varepsilon \tilde{I}) u^o = 0 \ ,$$

et

$$\begin{aligned}
< (\lambda I - A^o)^{-1} (f,\varphi)^T, u_o > &= <(f,\varphi)^T, ((\lambda I - A^o)^{-1})^* u_o > = \\
&= (\lambda-\lambda^o)^{-1} < (f,\varphi)^T \ , \ (u_o, \pi_{\partial U}(-\partial u_o/\partial N))^T >
\end{aligned}$$

cette dernière se démontrent facilement en écrivant $u_o = (\overline{\lambda - \lambda^o})^{-1} (\bar{\lambda} - (a^o)^*) u_o$ et en intégrant par partie.

Puis, on trouve aisément :

$$\tilde{S}^{\varepsilon} A^{\varepsilon} - A^{o} = \begin{pmatrix} \pi_U(1-E^{\varepsilon}\pi_{\partial U}), \pi_U 0, \pi_U(-E^{\varepsilon}) \\ \pi_{\partial U} 0, \quad 1, \quad 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_U \quad a^{\varepsilon} \\ \pi_{\partial U} \quad 1 \\ \pi_{\partial U}(-D^2) \end{pmatrix} - (\pi_U \; a^{o}, \pi_{\partial U} \; 1)^T =$$

$$= (\pi_U((a^{\varepsilon}-a^{o}) - E^{\varepsilon}\pi_{\partial U} a^{\varepsilon} + E^{\varepsilon}\pi_{\partial U} D^2 \; , \; \pi_{\partial U} \; 0)^T \; .$$

Ainsi, vu que dans le cas considéré ($u^o = \sqrt{2}\, \sin \pi k x$) on a : $\pi_{\partial U} \; u^o = 0$, $\pi_{\partial U} \; D^2 u^o = 0$, on trouve :

$$(\tilde{S}^{\varepsilon} A^{\varepsilon} - A^{o}) u^{o} = (\pi_U (1-E^{\varepsilon}\pi_{\partial U}) \; (a^{\varepsilon}-a^{o}), \; \pi_{\partial U} \; 0)^T \; .$$

Par conséquent, on a :

$$< (\tilde{S}^{\varepsilon} A^{\varepsilon} - A^{o}) u^{o} \; , \; (u_o, \pi_{\partial U}(-\partial u^{o}/\partial N))^T > = < \pi_U (a^{\varepsilon}-a^{o}) u^{o}, u_o > - < E^{\varepsilon}\pi_{\partial U}(a^{\varepsilon}-a^{o}) u^{o}, u_o > =$$

$$= < \pi_U (a^{\varepsilon}-a^{o}) u^{o}, u_o > + O(\varepsilon^4) = \varepsilon^2 < \pi_U \; D^2 (q(x))^2 \; D^2 \; u^{o}, u_o > + O(\varepsilon^4) =$$

$$= \varepsilon^2 (\lambda^{o})^2 < (q(x))^2 u^{o}, u^{o} > + O(\varepsilon^4) \; ,$$

car, on vérifie aisément que

$$< E^{\varepsilon}\pi_{\partial U}(a^{\varepsilon}-a^{o}) u^{o}, u_o > = \varepsilon^2 < E^{\varepsilon}\pi_{\partial U}(D^2 (q(x))^2 D^2 u^{o}), \; u_o > =$$

$$= \lambda^{o} \; \varepsilon^2 < E^{\varepsilon}\pi_{\partial U}(D^2 (q(x))^2 u^{o}), u_o > = O(\varepsilon^4),$$

vu que $\pi_{\partial U} u_o = 0$.

Maintenant on procède à l'estimation du reste :

$$r_{\lambda}^{\varepsilon} \; : = < (Q_{\lambda}^{\varepsilon})^2 (\lambda \tilde{I} - A^{\varepsilon})^{-1} \; (u^{o}, 0, 0)^T, \; u_o > \quad .$$

En vertu du Lemme, il suffit d'estimer $\tilde{r}_{\lambda}^{\varepsilon}$ qui s'obtient de $r_{\lambda}^{\varepsilon}$ en remplaçant $Q_{\lambda}^{\varepsilon}$ par $\tilde{Q}_{\lambda}^{\varepsilon}$ et $(\lambda\tilde{I}-A^{\varepsilon})^{-1} \; (u^{o},0,0)^T$ par son approximation asymptotique $(\lambda I - A^{o})^{-1} (u^{o}, 0)^T = (\lambda - \lambda^{o})^{-1} u^{o}$.

Ainsi, on trouve :

$$\tilde{Q}_{\lambda}^{\varepsilon} u^{o} = u^{o} - (\lambda I - A^{o})^{-1} \tilde{S}^{\varepsilon} (\lambda \tilde{I} - A^{\varepsilon}) u^{o} = (\lambda I - A^{o})^{-1} S_1^{\varepsilon} ((\lambda - a^{\varepsilon}) u^{o}, 0, 0)^T - (\lambda I - A^{o})^{-1} ((a^{\varepsilon} - a^{o}) u^{o}, 0)^T$$

$$= \varepsilon^2 \left[(\lambda I - A^{o})^{-1} (E^{\varepsilon}\pi_{\partial U} D^2 q^2 D^2 u^{o}, 0)^T + (\lambda I - A^{o})^{-1} (D^2 q^2 D^2 u^{o}, 0)^T \right] = \varepsilon^4 \; v_s^{\varepsilon} + \varepsilon^2 \; v_r \; ,$$

où on a noté :

$v_s^\varepsilon = \varepsilon^{-2}(\lambda I-A^o)^{-1}\ S_1^\varepsilon(E^\varepsilon\pi_{\partial U}D^2q^2D^2u^o,0)^T$, $v_r = (\lambda I-A^o)^{-1}(D^2q^2D^2u^o,0)^T$,

S_1^ε étant le même que ci-dessus, à savoir, $S_1^\varepsilon = \begin{pmatrix} \pi_U E^\varepsilon \pi_{\partial U} 1, & \pi_U\ 0, & \pi_U E^\varepsilon \\ \pi_{\partial U}\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.

Bien entendu, on a $\|v_r^\varepsilon\|_{L^2(U)} = C$ et $\|v_s\|_{L^2(U)} = O(\varepsilon^{1/2})$, $\varepsilon \to 0$, vu le caractère "couche limite" de v_s^ε .

Ainsi, en réitérant, on trouve :

$$(Q_\lambda^\varepsilon)^2u^o = Q_\lambda^\varepsilon(\varepsilon^4v_s^\varepsilon + \varepsilon^2v_r) = \varepsilon^2\Big[(\lambda I-A^o)^{-1}(E^\varepsilon\pi_{\partial U}(D^2q^2D^2(\varepsilon^4v_s^\varepsilon + \varepsilon^2v_r)),0)^T +$$
$$+ (\lambda I-A^o)^{-1}(D^2q^2D^2(\varepsilon^4v_s^\varepsilon+\varepsilon^2v_r),0)^T\Big] = \varepsilon^4\ w_s^\varepsilon + \varepsilon^4 w_r \quad , \quad \text{où}$$

$$w_r := (\lambda I-A^o)^{-1}(D^2q^2D^2v_r,0)^T \quad ,$$

et, de plus, $\|w_s^\varepsilon\|_{L^2(U)} = O(\varepsilon^{1/2})$, $\varepsilon \to 0$.

Par conséquent, on trouve :

$$\tilde{r}_\lambda^\varepsilon = O(\varepsilon^4), \quad \varepsilon \to 0 ,$$

de sorte que $r_\lambda^\varepsilon = O(\varepsilon^4)$ aussi, vu que $\tilde{r}_\lambda^\varepsilon$ est le terme principal dans le comportement asymptotique de r_λ^ε .

Ainsi, il vient : $< (\lambda\tilde{I}-A^\varepsilon)^{-1}u^o,u_o > = (\lambda-\lambda^o)^{-1} + \varepsilon^2(\lambda^o)^2(\lambda-\lambda^o)^{-2}$
$< (q(x))^2u^o,u_o > + O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \to 0$.

Par conséquent, en utilisant l'identité ci-dessus pour λ^ε (exprimé par des résidus correspondants), on trouve la formule asymptotique suivante :

$$\lambda^\varepsilon = \lambda^o + \varepsilon^2(\lambda^o)^2\int_U(q(x))^2|u^o(x)|^2dx + O(\varepsilon^4), \ \varepsilon \to 0 .$$

Si $q(x) \equiv q_o$, alors on a, bien entendu la formule exacte : $\lambda^\varepsilon = \lambda^o + \varepsilon^2(q_o\lambda^o)^2$.

c) Bifurcation.

La méthode de factorisation et de réduction peut être utilisée pour étudier le comportement asymptotique des solutions des perturbations singulières coercives quasi-linéaires au voisinage des points de bifurcation.

Cela va être illustré en appliquant cette méthode à une perturbation singulière coercive du problème non-linéaire en théorie des barres élastiques.

Les notations sont les mêmes que ci-dessus.

Soit une perturbation singulière coercive :

(3.15) $$A^{\varepsilon} := (\pi_U a^{\varepsilon}, \pi_{\partial U}\, 1, \pi_{\partial U}\, t)^T ,$$

où $U = (0,1)$, $a^{\varepsilon} = \varepsilon^2 D^4 + D^2$, $t = - D^2$, $iD = d/dx$.

Puis soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in C^{\infty}(\overline{U})$, $a(x) > 0$, $\forall x \in \overline{U}$ donnés.

On va noter

(3.16) $$N(u,\lambda) := - \lambda a(x)\ (1+(Du(x))^2)^{1/2}$$

et soit

(3.17) $$\mathcal{N}(u,\lambda) := (\pi_U\, N(u,\lambda), \pi_{\partial U}\, 0, \pi_{\partial U}\, 0)^T ,$$

$u \in C^1(\overline{U})$ étant à valeurs réelles et $|u'(x)| \leqslant 1$.

On considère la perturbation singulière quasi-linéaire suivante :

(3.18) $$A^{\varepsilon}(u,\lambda) := \mathcal{A}^{\varepsilon}\, u + \mathcal{N}(u,\lambda)$$

et le problème aux limites correspondant :

(3.19) $$A^{\varepsilon}(u,\lambda) = (f,\varphi_1,\varphi_2)^T .$$

Soit

$$O_{r,\varepsilon} := \{u \in H_{(\nu),\varepsilon}(U) \,|\, \|u\|_{(\nu),\varepsilon} < r\} , \quad \nu = (0,2,2) .$$

Comme la dimension $n = 1$, le plongement

$$H_{(\nu),\varepsilon}(U) \subset C^{1,\alpha}(\overline{U}), \quad 0 \leqslant \alpha < 1/2 ,$$

est continu (uniformément par rapport à ε).

Ainsi, la perturbation singulière A^{ε} est une famille d'applications non-linéaires continues (uniformément par rapport à ε) de $\mathcal{H}_{\varepsilon} := H_{(\nu),\varepsilon}(U) \times \mathbb{R}$ dans $\mathcal{D}_{\varepsilon} := H_{(0,0,\rho),\varepsilon}(U) \times \mathbb{C}_0(\partial U) \times \mathbb{C}_{-1/2}(\partial U)$.

De plus, la différentielle de Fréchet $\partial_u A^{\varepsilon}$ en chaque point $(0,\lambda) \in O_{r,\varepsilon} \times \mathbb{R}$, est une perturbation singulière coercive de $\mathcal{H}_{\varepsilon}$ dans $\mathcal{D}_{\varepsilon}$.

Le problème réduit

$$A^o(u^o,\lambda) = (0,\varphi_1)^T ,$$
$$A^o(u^o,\lambda) := A^o u^o + (\pi_U \lambda N(u^o,\lambda), \pi_{\partial U} 0)^T ,$$

apparait en théorie non-linéaire des barres élastiques, $u^o(x,\lambda)$ étant la flexion d'une barre de longueur unité (en point $x \in U$) sous l'effet d'une force extérieure constante λ et $a(x)$ dans (3.16) étant la rigidité de la barre. Pour ne pas encombrer l'exposé, on va supposer que $a(x) \equiv 1$.

On a (comme conséquence du Théorème 2.2) :

$$\partial_u A^\varepsilon(0,\lambda) \in ISO(H_\varepsilon;\mathcal{D}_\varepsilon), \quad \forall \lambda < \lambda^\varepsilon$$

uniformément par rapport à $\varepsilon \in [0,\varepsilon_o]$, où λ^ε est la première valeur propre de A^ε.

Ainsi, on a également :

$$\partial_u A^\varepsilon(0,\lambda) \in ISO(H_\varepsilon;\mathcal{D}_\varepsilon), \ \forall \lambda < \lambda^o,$$

avec λ^o la première valeur propre de A^o, vu que $\lambda^o < \lambda^\varepsilon$, $\forall \varepsilon \in [0,\varepsilon_o]$ avec ε_o suffisamment petit (comme conséquence de la formule asymptotique ci-dessus pour λ^ε où il faut poser $q(x) \equiv 1$). (En faite, on a dans le cas considéré, c'est-à-dire, avec $q(x) \equiv 1$, la formule : $\lambda^\varepsilon = \lambda^o + \varepsilon^2(\lambda^o)^2$). Par conséquent, au voisinage de chaque point $(0,\lambda) \in 0_{r,\varepsilon} \times (-\infty,\lambda^o)$, l'application A^ε est un difféomorphisme uniformément par rapport à ε de ce voisinage sur un voisinage $0'_{r,\varepsilon}$ du zéro dans $\mathcal{D}_\varepsilon$. De plus, $(-\infty,\lambda^o) \ni \lambda \to u^\varepsilon(.,\lambda) \in H_{(\nu),\varepsilon}(U)$ est une courbe C^1 (même, analytique) en λ. En effet, cela est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites. En passant par la méthode de réduction, on peut étudier aisément le comportement de $u^\varepsilon(.,\lambda)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ pour chaque $\lambda \in (-\infty,\lambda^o)$ donné et pour $\lambda = \lambda(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$.

En effet, pour $\lambda < \lambda^o$ donné, soit $v(\varepsilon,x,\lambda) = u(\varepsilon,x,\lambda) - u^o(x,\lambda)$, avec u et u^o les solutions des problèmes perturbé (3.19) et réduit $A^o(u^o,\lambda) = (f,\varphi_1)^T$. On trouve pour v le problème aux limites suivant :

$$(3.20) \quad A^\varepsilon v + (A^\varepsilon - \mathcal{R}^o A^o)u^o + (\mathcal{N}(u^o+v,\lambda) - \mathcal{N}(u^o,\lambda)) =$$
$$= (f,\varphi_1,\varphi_2)^T - \mathcal{R}^o A^o(u^o,\lambda) = (0,0,\varphi_2)^T,$$

où

$$\mathcal{R}^o = \begin{pmatrix} \pi_U 1, & \pi_U 0 \\ \pi_{\partial U} 0, & 1 \\ \pi_{\partial U} 0, & 0 \end{pmatrix}$$

est l'opérateur réduit de $\mathcal{R}^\varepsilon$ (avec $q(x) \equiv 1$) défini par (2.4) ; en outre $\mathcal{R}^o(f,\varphi_1)^T = (f,\varphi_1,0)^T$.

On applique la méthode de Newton pour approcher v.

On remplace $\mathcal{N}(u^o + v,\lambda) - \mathcal{N}(u^o,\lambda)$ par $(\partial_u\mathcal{N}(u^o,\lambda))v$ en montrant que le reste $O(v^2)$ dans le développement de Taylor (dans $C^o(\overline{U})$) est aussi $O(\|v\|^2_{(\nu),\varepsilon})$ uniformément en ε .

En faite, on peut réécrire (3.20) sous la forme équivalente :

$$v = (\partial_u A^\varepsilon(u^o,\lambda))^{-1}((\mathcal{N}(u^o+v,\lambda) - \mathcal{N}(u^o,\lambda) - \partial_u\mathcal{N}(u^o,\lambda)v) + (R^oA^o-A^\varepsilon)u^o + (0,0,\varphi_2)^T),$$

l'opérateur $\mathcal{O}_{r,\varepsilon} \ni v \to P^\varepsilon(v) := \partial_u A^\varepsilon(u^o,\lambda)^{-1}(\mathcal{N}(u^o+v,\lambda) - \mathcal{N}(u^o,\lambda) -$

$$- \partial_u\mathcal{N}(u^o,\lambda)v) \in \mathcal{O}_{r,\varepsilon}$$

étant une application contractante dans $\mathcal{O}_{r,\varepsilon} \subset H_{(\nu),\varepsilon}(U)$ pourvu que r soit suffisamment petit. Plus précisément, on choisit $r = r(\varepsilon) = r_o\varepsilon^{1/2}$ avec r_o suffisamment petit et on montre que l'application $P^\varepsilon : \mathcal{O}_{r(\varepsilon),\varepsilon} \to \mathcal{O}_{r(\varepsilon),\varepsilon}$ ci-dessus est une application contractante.

On va noter par $v_o(\varepsilon,x,\lambda)$ la solution du problème linéarisé associé à (3.20) :

(3.21) $\qquad (A^\varepsilon + \tilde{I}\partial_u N(u^o,\lambda))v_o = (0,0,\varphi_2)^T + (R^oA^o - A^\varepsilon)u^o$,

où, comme ci-dessus, $\tilde{I}v = (v,0,0)^T$.
$\partial_u A^\varepsilon(u^o,\lambda) = A^\varepsilon + \tilde{I}\partial_u N(u^o,\lambda)$ est une perturbation singulière coercive, de sorte que, utilisant la méthode de réduction, on trouve aisément une approximation asymptotique pour $(\partial_u A^\varepsilon(u^o,\lambda))^{-1}$ par le même procédé que ci-dessus, lorsqu'on cherchait une formule asymptotique pour la solution de la perturbation singulière coercive A^ε introduite au début.

En simplifiant ensuite les formules trouvées explicitement (c'est-à-dire en négligeant les termes d'ordre plus élevé en puissances de ε), on trouve pour $u(\varepsilon,x,\lambda)$ la formule asymptotique suivante :

$$u(\varepsilon,x,\lambda) = u^o(x,\lambda) + \varepsilon^2\{E^\varepsilon(\varphi_2 + \pi_{\partial U}D^2u^o) -$$

$$- (\partial_u A^o(u^o,\lambda))^{-1}(D^4u^o,\varphi_2 + \pi_{\partial U}D^2u^o)^T\} + O(\varepsilon^3)$$

où $O(\varepsilon^3)$ est mesuré dans $C^o(\overline{U})$.

La formule asymptotique dans $H_{(\nu),\varepsilon}(U)$ est, respectivement :

$$u(\varepsilon,x,\lambda) = u^o(x,\lambda) + \varepsilon^2 E^\varepsilon(\varphi_2 + \pi_{\partial u} D^2u^o) + O(\varepsilon^{3/2}) ,$$

où $O(\varepsilon^{3/2})$ est par rapport à la norme $\|.\|_{(\nu),\varepsilon}$, la norme $\|.\|_{(\nu),\varepsilon}$ du correcteur $\varepsilon^2 E^\varepsilon(\varphi_2 + \pi_{\partial u} D^2u^o)$ étant $O(\varepsilon^{1/2})$.

Si $\lambda = \lambda(\varepsilon) = \rho\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)$, alors, utilisant la formule de Taylor par rapport à λ , on trouve pour $u(\varepsilon,x,\lambda(\varepsilon))$ la formule asymptotique suivante :

$$u(\varepsilon,x,\lambda(\varepsilon)) = u_o^o(x) + \varepsilon^2 \{\rho u_1^o(x) + E^\varepsilon(\varphi_2 + \pi_{\partial U} D^2 u_o^o) -$$

$$- (A^o)^{-1}(D^4 u_o^o, \varphi_2 + \pi_{\partial U} D^2 u_o^o)^T\} + O(\varepsilon^3)$$

dans $C^o(\overline{U})$, avec $u_o^o = (A^o)^{-1} (f,\varphi_1)^T$, $u_1^o = (A^o)^{-1}(u_o^o(1+(Du_o^o)^2)^{1/2},0)^T$

où $A^o = (\pi_U D^2, \pi_{\partial U} 1)^T$ est l'opérateur réduit de A^ε .

Maintenant, on va considérer le phénomène de bifurcation pour A^ε .

On va noter

(3.22) $$A_\lambda^\varepsilon := A^\varepsilon - \lambda \tilde{I} = (\pi_U(a^\varepsilon-\lambda), \pi_{\partial U} 1, \pi_{\partial U}(-D^2))^T$$

et par A_λ^o l'opérateur réduit correspondant.

Soit $\lambda^o \in$ Spectre (A^o), à savoir, dim ker $A^o_{\lambda^o} = 1$, et soit $\lambda^\varepsilon \in$ Spectre (A^ε) tel que $\lambda^\varepsilon \to \lambda^o (\varepsilon \to 0)$. (Dans le cas considéré avec $q(x) \equiv 1$, $a(x) \equiv 1$, la formule asymptotique ci-dessus $\lambda^\varepsilon = \lambda^o + \varepsilon^2 \lambda^1 + O(\varepsilon^4)$ devient une formule exacte : $\lambda^\varepsilon = \lambda^o + \varepsilon^2 \lambda^1$ avec $\lambda^1 = (\lambda^o)^2)$.

On considère le problème :

(3.23) $$A^\varepsilon(u,\lambda) = (0,0,0)^T$$

où $\lambda > \lambda^\varepsilon$ (pour $\lambda < \lambda^\varepsilon$ et tout ε suffisamment petit (3.23) ne possède que la solution triviale $u \equiv 0$, comme conséquence du théorème des fonctions implicites).

Soit φ_ε la fonction propre de A^ε correspondant à la valeur propre λ^ε .

On applique la méthode de Liapounov-Schmidt pour trouver l'équation de bifurcation correspondante.

On a le

<u>Lemme</u>. En chaque point $(\varphi_\varepsilon, \lambda^\varepsilon)$ l'équation de bifurcation pour $A^\varepsilon(u,\lambda)$ (avec $a(x) \equiv 1$) est de la forme :

(3.24) $$(\lambda^o + \varepsilon^2(\lambda^o)^2) c_o \xi^2 - (\lambda - \lambda^\varepsilon) = 0$$

où

(3.25) $$c_o = < |\varphi_o|^2 , |D\varphi_o|^2 >$$

avec $\varphi_o \in \operatorname{Ker} A^o_{\lambda^o}$, $\|\varphi_o\|_{L^2(U)} = 1$.

<u>Idée de la démonstration</u>.

1° La méthode de Lapounov-Schmidt appliquée au voisinage des points de bifurcation consiste en réduction de l'équation au départ (au moyen des opérateurs de projection spécialement choisis) à un système d'équations comprenant un sous-système (non-linéaire) de k équations pour k paramètres inconnus (k est la multiplicité de la valeur propre de l'opérateur linéarisé correspondant) et une équation (non-linéaire) sur une variété de dimension infinie à laquelle le théorème des fonctions implicites peut être appliquée. Le sous-système de dimension fini est dit aussi équation de bifurcation. La bifurcation est simple, ou celle de Hopf, si la multiplicité $k = 1$, ce qui est la cas pour la valeur propre λ^{ε} de l'opérateur A^{ε}.

2°. Lorsque $\mu = \lambda - \lambda^{\varepsilon} \to 0$, la composante de la solution appartenant à la variété de dimension infinie où la différentielle de l'opérateur au départ est invertible, est d'ordre plus élevé en puissance de μ, que la partie, définie par l'équation de bifurcation.

3°. Ainsi, dans le cas considéré on cherche u, solution de (3.23) avec $\lambda > \lambda^{\varepsilon}$, sous la forme : $u = \xi\varphi_{\varepsilon}$ + termes d'ordre plus élevé. En substituant $u = \xi\varphi_{\varepsilon}$ dans (3.23), en utilisant le développement de Taylor pour $A^{\varepsilon}(\xi\varphi_{\varepsilon}, \lambda^{\varepsilon}+\mu)$ avec $\xi \to 0$, $\mu \to 0$, et prenant la projection du terme principal dans ce développement sur φ_{ε}, on trouve l'équation de bifurcation en imposant la condition que cette projection doive s'annuler. Cela conduit à l'équation (3.24). ■

Corollaire. En supposant que $\lambda - \lambda^{\varepsilon} = \mu\varepsilon^{2p}(1+o(1))$ avec certaines constantes $\mu > 0$, $p > 2$, l'équation $A^{\varepsilon}(u,\lambda) = (0,0,0)^{T}$ possède deux solutions non-triviales $u_{\pm}$ dont le comportement asymptotique est comme suit :

$$u_{\pm}(\varepsilon,x,\lambda(\varepsilon)) = \pm\, \varepsilon^{p}(2\mu/(\lambda^{o}c_{o}))^{1/2}(1-\varepsilon^{2}\lambda^{o}/2)\varphi_{o}(x) + o(\varepsilon^{2+p}), \quad \varepsilon \to 0, \tag{3.26}$$

où φ_{o} est la fonction propre de A^{o} associée à la valeur propre λ^{o}, et où $o(\varepsilon^{2+p})$ est dans la norme $\|\cdot\|_{C^{o}(\overline{U})}$.

D'autre part, si $\lambda - \lambda^{\varepsilon} = \mu\varepsilon^{2p}(1+o(1))$ avec $0 < p \leqslant 2$, $\mu > 0$, alors (3.26) devient :

$$u_{\pm}(\varepsilon,x,\lambda(\varepsilon)) = \pm\, \varepsilon^{p}(2\mu/(\lambda^{o}c_{o}))^{1/2}\varphi_{o}(x) + o(\varepsilon^{p}), \quad \varepsilon \to 0 \tag{3.27}$$

et on trouve pour $u_{\pm}$ le même comportement asymptotique que celui des $u^{o}_{\pm}(x,\lambda)$, solutions petites du problème réduit $A^{o}(u^{o}_{\pm},\lambda) = (0,0)^{T}$, lorsque $\lambda - \lambda^{o} \to +0$.

Conclusion. Le tableau de bifurcation pour les problèmes elliptiques quasi-linéaires avec un paramètre de bifurcation λ est stable par rapport aux perturbations singulières coercives de ces problèmes.

Remarque. Le tableau de bifurcation peut changer radicalement, si la perturbation singulière n'est pas elliptique, comme le montre l'exemple suivant :

$$A^{\varepsilon}(u,\lambda) = (\pi_U(-\varepsilon^2 D^4+D^2),\pi_U 1,\pi_{\partial U}(-D^2))^T u+N(u,\lambda).$$

En effet, dans ce cas il y a un nombre fini ($\sim\varepsilon^{-1}$) de points de bifurcation sur la demi-droite $\lambda \geqslant 0$ et un nombre infini de ces points sur la demi-droite $\lambda < 0$, $\forall\varepsilon > 0$ donné.

II. PERTURBATIONS SINGULIERES DES OPERATEURS HYPERBOLIQUES.

On commence par un exemple simple, celui de perturbations singulières de l'opérateur $P(D_x) = D_{x_o} + D_{x_1}$. Soient deux perturbations singulières $P_{\pm}(\varepsilon,D_x) = D_{x_o} + D_{x_1}(1 \pm \varepsilon^2 D_{x_1}^2)$ de $P(D_x)$, lesquelles sont des opérateurs du type de Petrovski (le problème de Cauchy est bien posé pour $x_o \gtrless 0$) pour $\forall\,\varepsilon \geqslant 0$.

Le support singulier de la solution élémentaire du problème de Cauchy pour $P(D_x)$ (avec x_o en tant que variable temporelle) étant la caractéristique $\{x_o \geqslant 0,\ x_o = x_1\}$, on trouve aisément que le support singulier des solutions élémentaires correspondantes $E^{\pm}$ pour $P_{\pm}$ sont, respectivement, les ensembles $V^{\pm} = \{x_o \geqslant 0,\ \pm(x_1-x_o) \geqslant 0\}$. Apparemment, de ce point de vue il n'y a pas beaucoup de différence entre P_+ et P_- .

D'autre part, on trouve les bicaractéristiques de $P_{\pm}$:

$$x_{\varepsilon}^{\pm}(t) = t(1,1\pm 3\varepsilon^2\xi_1^2) + x_{\varepsilon}^{\pm}(0),\quad \xi_{\varepsilon}^{\pm}(t) = (\xi_o,\xi_1)\ .$$

Ainsi, les bicaractéristiques $(x_{\varepsilon}^{+}(t),\xi_{\varepsilon}^{+}(t))$ sont difféomorphes aux bicaractéristiques $x_o(t) = t(1,1) + x_o(0)$, $\xi_o(t) = (\xi_o,\xi_1)$ de P, ce difféomorphisme ne changeant pas la direction du mouvement le long des bicaractéristiques, tandis que pour $(x_{\varepsilon}^{-}(t),\ \xi_{\varepsilon}^{-}(t))$ cette direction devient opposée pour $|\xi_1| > (\sqrt{3}\varepsilon)^{-1}$. La différence entre les deux perturbations devient encore plus évidente, lorsqu'on considère le problème mixte pour P dans l'angle $\{x_o > 0, x_1 > 0\}$: $P(D_x)u^o = 0$, $u^o(0,x_1) = 0$, $u^o(x_o,0) = \mu(x_o) \in C_o^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, et le problème mixte correspondant pour $P_{\pm}$.

Soit d'abord le problème mixte pour P_+ dont la solution est notée par u_+ et sa transformée de Fourier en x_o est notée par $\hat{u}_+$, $\hat{u}_+$ étant une solution de l'équation singulièrement perturbée $(\varepsilon^2 D^3_{x_1} + D_{x_1} + \xi_o)\hat{u}_+ = 0$, $x_1 > 0$, laquelle vérifie la condition de l'ellipticité avec le petit paramètre, $\forall\ Im\xi_o \leqslant 0$ donné. De plus, l'équation caractéristique $\varepsilon^2\lambda^3 + \lambda + \xi_o = 0$ possède deux racines $\lambda_k(\varepsilon,\xi_o)$ telles que $Im\lambda_k > 0$, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall Im\xi_o < 0$ ($\lambda_1 \sim -\xi_o$, $\lambda_2 \sim i\varepsilon^{-1}$ pour $\varepsilon \to 0$ et $\forall\xi_o$ donné). Ainsi deux conditions aux limites doivent être imposées en $x_1 = 0$, l'une d'elle étant celle au départ : $\pi_o\hat{u}_+ = \hat{\mu}(\xi_o)$ et l'autre se trouvant à partir de l'équation pour u_+ et pour u : $\pi_o\varepsilon^2 D^3_{x_1}\hat{u} = 0$, la perturbation singulière $A^\varepsilon_+(\xi_o)$,

$$(1.1)\qquad A^\varepsilon_+(\xi_o) = (\pi_+(\varepsilon^2 D^3_{x_1} + D^2_{x_1} + \xi_o), \pi_o 1, \pi_o\ \varepsilon^2 D^3_{x_1})^T$$

étant coercive $\forall\xi_o$, $Im\xi_o \leqslant 0$ donné. De plus, les singularitées de $\hat{u}_+$ sont du type "couche limite" en $x_1 = 0$, $\forall\xi_o$, $Im\xi_o \leqslant 0$ donné. Par contre pour P_- le problème mixte dans l'angle $\{x_o > 0, x_1 > 0\}$ n'est pas bien posé (uniformément par rapport à ε), car l'équation caractéristique correspondante $-\varepsilon^2\lambda^3 + \lambda + \xi_o = 0$ pour $\forall\xi_o \in \mathbb{R}$, $27\varepsilon^2\xi_o^2 < 4$ possède trois racines réelles, lesquelles donnent naissance à des solutions oscillantes de l'équation $(-\varepsilon^2 D^3_{x_1} + D_{x_1} + \xi_o)\hat{u}_- = 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$, les singularitées de $\hat{u}_-$ étant portées par $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x_1 \geqslant 0\}$.

Ainsi, il est nécessaire de caractériser algébriquement les perturbations singulières des opérateurs hyperboliques.

Soit un système hyperbolique du premier ordre à symbole principal $\xi_o + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k(x)\xi_k$, $a_k(x)$ étant des matrices $p \times p$, et soit son perturbation singulière à symbole principal σ_o ,

$$(1.2)\qquad \sigma_o := \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k(x,\varepsilon\xi')\xi_k$$

où $\xi = (\xi_o,\xi')$, $a_k(x,\eta')$ sont des matrices $p \times p$, $a_o(x,\eta')$ étant positive définie, $\forall(x,\eta') \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} \times \mathbb{R}^n$, $a_o(x,o) = I$, $a_k(x,o) = a_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. De plus, on suppose que a_k sont des symboles d'ordre vectoriel $(0,0,\nu)$ et que les valeurs propres de $a_o(x,\eta')$ sont des symboles d'ordre $(0,0, \nu_j)$, $1 \leqslant j \leqslant p$ comme introduit ci-dessus.

La perturbation singulière (1.2) est dite elliptique - hyperbolique si les racines $\lambda_j(x,\varepsilon,\xi')$ de l'équation :

$$\det \sigma_o(x,\varepsilon,\lambda\ ,\xi') = 0$$

sont toutes réelles et distinctes, $\forall (x,\varepsilon,\xi') \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} \times \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^r \setminus \{0\})$ et, de plus, s'il existe une constante $C > 0$ et des constantes $\mu_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq p$ telles que

$$C^{-1} |\xi'| < \varepsilon\xi' >^{\mu_j} \leq |\lambda_j(x,\varepsilon,\xi')| \leq C\ |\xi'| < \varepsilon\xi' >^{\mu_j} \quad .$$

Outre l'exemple ci-dessus, aussi le système suivant (système linéarisé de Boussinesq)

$$D_{x_o}\eta + D_{x_1}(u_o\eta) + D_{x_1}((h_o+\eta_o(x))u) = 0$$

$$D_{x_o}\left(1 + \frac{h_o^2}{2}(\varepsilon D_{x_1})^2\right)u + D_{x_1}(u_o u) + D_{x_1}(g\eta) = 0$$

avec u_o, η_o, h_o, g donnés, fournit un exemple d'une telle perturbation. En effet, les racines en question λ_j , $j = 1,2$, sont : $\lambda_j = \mu_j(x,\varepsilon\xi_1)\xi_1$, où $0 < C^{-1} \leq \mu_1 \leq C$, $\mu_1(x,o) = u_o + \sqrt{g(h_o+\eta_o)}$, $0 < C^{-1} < \varepsilon\xi_1 >^{-2} \leq |\mu_2| \leq C < \varepsilon\xi_1 >^{-2}$

$\mu_2(x,o) = u_o - \sqrt{g(h_o+\eta_o)}$ à condition que $u_o^2 - g(h_o+\eta_o) \neq 0$.

Le système de Boussinesq en théorie des ondes non-linéaires est de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t\eta + \partial_x((h_o+\eta)u) = 0 \\ (1 - \frac{1}{3}h_o^2(\varepsilon\partial_x)^2)\partial_t u + \partial_x(u^2/2 + g\eta) = 0 \end{cases}$$

où ε, g, h_o sont donnés, u étant la vitesse de la propagation des ondes sur la surface libre (inconnue) η et ε étant un petit paramètre, les caractéristiques du système réduit $x_\pm(t)$ étant solutions de $\dot{x}_\pm(t) = u \pm \sqrt{g(h_o+\eta)}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L.S. FRANK, Problèmes aux limites coercifs avec un petit paramètre, C.R. Acad. Sc. Paris, t.282, Série A, 1976, p.1109-1111.

[2] L.S. FRANK, Coercive singular perturbations I : A priori estimates, Annali Mat. Pura Appl. (IV), 119, 1979, pp.41-113.

[3] L.S. FRANK, Perturbazioni singolari Ellittiche, Rendiconti del Politecnico di Milano, XLVII, 1977, pp.135-163.

[4] L.S. FRANK, W.D. WENDT, Coercive singular perturbations II : Reduction to regular perturbations and applications, Comm. P.D.E. 7, 1982, pp.469-535.

[5] L.S. FRANK, W.D. WENDT, Coercive singular perturbations III : Wiener-Hopf Operators, Journal d'analyse mathématique, Vol.43, 1983/84, pp 88-135.

[6] W.D. WENDT, Coercive singularly perturbed Wiener-Hopf Operators and applications, Ph. D. Thesis, Catholic University, Nijmegen, 1983.

[7] L.S. FRANK, Perturbations singulières IV : Problème des valeurs propres, C.R. Acad. Sc. Paris, Série I, t.301, n°3, 1985, pp.69-72.

[8] L.S. FRANK, Remarque sur le phénomène de bifurcation pour les perturbations singulières coercives quasi-linéaires, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, t.302, n°1, 1986, pp.17-20.

[9] L.S. FRANK, Coercive singular Perturbations : Eigenvalue problems and bifurcation phenomena (à paraître dans Annali Mat. Pura Appl.).

***

Mathematisch Instituut
Universiteit van Nijmegen
Nijmegen
Pays-Bas