Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

P. L. Lions

Une approche élémentaire de quelques résultats de symétrisation

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 13, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A12_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

UNE APPROCHE ELEMENTAIRE DE QUELQUES RESULTATS DE SYMETRISATION.

par P.L. LIONS

Exposé n°XIII

20 Janvier 1987

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

Il est désormais classique que l'on peut obtenir des majorations précises des solutions d'équations elliptiques et paraboliques du second ordre à l'aide de la symétrisation de Schwarz -i.e. réarrangement sphérique décroissant -. En effet, pour des classes générales d'équations, la solution peut être "majorée" par la solution d'un problème à symétrie sphérique dit symétrisé. Les premiers résultats dans cette direction ont été obtenus par H. Weinberger [15], G. Talenti [12], C. Bandle [4] et ont été depuis généralisés dans de nombreuses directions par divers auteurs : citons par exemple A. Alvino et G. Trombetti [1]; P.L. Lions [10]; G. Chiti [6]; J.L. Vasquez [14]; C. Bandle [5]; J. Mossimo et J.M. Rakotosson [11]; A. Alvino, P.L. Lions et G. Trombetti [2]; G. Talenti [13]... Cependant, toutes les démonstrations reposent sur la même idée : obtenir une inégalité différentielle portant sur la fonction de distribution de la solution, inégalité qui devient une égalité dans le cas du problème symétrisé et dont on tire la comparaison. Et ce au prix de démonstrations assez complexes et techniques.

Nous voulons expliquer ici une approche totalement différente et complétement élémentaire qui a été obtenue en collaboration avec A. Alvino et G. Trombetti [3]. Ainsi que nous le verrons par la suite, cette démonstration n'utilise en fait que l'information fondamentale suivante : <u>la solution fondamentale de l'équation de la chaleur dans</u> $\mathbb{R}^n$ <u>est à symétrie sphérique</u>, <u>positive</u>, <u>décroissante</u> (i.e. est sa propre symétrisée de Schwarz). Signalons d'ailleurs que ce seul fait est également à la base de la démonstration élégante qu'a donnée E.H. Lieb [9] de la décroissance par symétrisation de l'intégrale de Dirichlet.

Outre la simplicité de l'approche, il est important de noter qu'elle permet également de résoudre quelques problèmes ouverts comme, notamment, l'obtention de résultats de comparaison par symétrisation de Steiner, circulaire ou périodique ou pour d'autres équations (équations intégro-différentielles...) : nous renvoyons le lecteur à [3] pour ces applications.

Afin de décrire précisément le résultat que nous démontrons plus bas, il est nécessaire de rappeler quelques notations : si f est mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et si $\text{mes}\{|f| > t\} < \infty$ pour tout $t > 0$, on note

$$\mu_f(t) = \text{mes}\{|f| > t\},\ f^*(s) = \sup\{t > 0, \mu_f(t) > s\} \quad \text{pour } s \geq 0$$

de sorte que f^* est décroissante sur $[0,+\infty[$ et $\mu_{f^*} = \mu_f$. Rappelons que f^* est appelé le réarrangement décroissant de f. Si $c_n = |S^{n-1}|$, le réarrangement sphérique décroissant de f ou symétrisée de Schwarz de f est alors obtenu en posant

$$f^{\#}(x) = f^*(c_n|x|^n), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n,$$

et on a bien sûr $\mu_{f^{\#}} = \mu_f$. Si $f \in L^1(\Omega)$ et $\text{mes}(\Omega) < \infty$, on note encore par f^* et $f^{\#}$ respectivement le réarrangement décroissant et réarrangement sphérique décroissant du prolongement de f à $\mathbb{R}^n$ par 0. Enfin, on note par $A^{\#}$ la boule centrée en 0 de même volume que A (borélien quelconque de $\mathbb{R}^n$) de sorte que $1_{A^{\#}} = (1_A)^{\#}$.

Rappelons deux inégalités célèbres (et élémentaires) dues respectivement à Hardy-Littlewood et à Hardy-Littlewood-Polya

$$(1) \qquad \left|\int_{\mathbb{R}^n} fg\, dx\right| \leq \int_0^\infty f^* g^*\, ds = \int_{\mathbb{R}^n} f^{\#} g^{\#}\, dx$$

$$(2) \qquad \left|\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x)g(y)h(x-y)dx\, dy\right| \leq \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f^{\#}(x)g^{\#}(y)h^{\#}(x-y)dx\, dy$$

pour toutes les f, g, g mesurables sur $\mathbb{R}^n$, pourvu bien sûr que les membres de gauche de ces inégalités aient un sens.

Le résultat que nous allons rappeler et redémontrer concerne la comparaison des solutions d'équations paraboliques du second ordre du type

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x,t)\partial_j u) + a(x,t)u = f(x,t) \text{ dans } \Omega\times]0,T[$$

$$(4) \qquad u|_{\partial\Omega\times]0,T[} = 0,\ u|_{t=0} = u_o(x) \text{ dans } \Omega$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega\times]0,T[)$ $(\forall i,j)$, $a \in L^\infty(\Omega\times]0,T[)$, $f \in L^2(\Omega\times]0,T[)$, $u_o \in L^2(\Omega)$ et on suppose

$$(5) \quad \begin{cases} \exists \nu \in L^\infty(0,T),\ \underset{]0,T[}{\text{infess}}\ \nu > 0 \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \nu(t)|\xi|^2,\ \text{p.p. } (x,t) \in \Omega\times]0,T[\end{cases}$$

Sous ces hypothèses, il existe une unique solution de (3)-(4) dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

On définit ensuite le problème symétrisé comme suit

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu(t)\,\Delta v + \bar{a}\, v = g \quad \text{dans} \quad \Omega^\# \times]0,T[\tag{6}$$

$$v_{|\partial\Omega^\# \times]0,T[} = 0 \ , \quad v_{|t=0} = v_0 \quad \text{dans } \Omega^\# \tag{7}$$

où $v_0 = v_0^\# \in L^2(\Omega^\#)$, $g \in L^2(\Omega \times]0,T[)$ et $g(.,t) = g^\#(.,t)$ (p.p.t).

Enfin, si $a = a_1 - a_2$ avec $a_1, a_2 \geq 0 \in L^\infty(\Omega \times]0,T[)$, on définit $\bar{a}$ par $\bar{a} = (a_1)_\# - (a_2)^\#$ où $\varphi_\#$ désigne le réarrangement sphérique croissant de $\varphi \in L^1(\Omega)$ i.e. $\varphi_\#(x) = \varphi^\#\,(|\Omega| - c_n|x|^n)$.

On note par v l'unique solution de (6)-(7) dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega^\#)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

La dernière notation dont nous aurons besoin concerne la relation de Hardy-Littlewood-Polya (voir [7], [8]) : si $u_1 \in L^1(\Omega_1)$, $u_2 \in L^2(\Omega_2)$ avec $\mathrm{mes}(\Omega_1) = \mathrm{mes}(\Omega_2)$, on dit que $u_1 \prec u_2$ si

$$\int_0^t u_1^*\, ds \leq \int_0^t u_2^*\, ds \ , \quad \forall 0 \leq t \leq \mathrm{mes}(\Omega_1). \tag{8}$$

Rappelons également que $u_1 \prec u_2$ si et seulement si

$$\int_{\Omega_1} F(|u_1|)\, dx \leq \int_{\Omega_2} F(|u_2|)\, dx \tag{9}$$

pour toute fonction F convexe croissante sur $[0,+\infty[$. De plus si $u_2 = u_2^\#$ une autre formulation équivalente est donnée par

$$\int_{\Omega_1} |u_1|\varphi\, dx \leq \int_{\Omega_2} u_2\, \varphi^\# dx \ , \quad \forall \varphi \in L_+^1(\Omega_1) \ . \tag{10}$$

Avec ces notations, on a le

<u>Théorème</u>. Si $u_o \prec v_o$ et si $f(.,t) \prec g(.,t)$ (p.p.t), alors on a pour tout $t \in [0,T]$

$$u(t) \prec v(t). \tag{11}$$

<u>Remarques</u>. 1) Ce résultat est une petite extension d'un résultat de C. Bandle [4], [5].

2) Il est bon de rappeler que $\varphi \prec \varphi^{\#}$, pour tout $\varphi \in L^1(\Omega)$.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME.

Nous allons démontrer le théorème dans le cas où $a \equiv 0$, $f \equiv g \equiv 0$ et $\nu(t) \equiv 1$. Le cas général s'obtient alors par des adaptations faciles. La démonstration est alors très simple et utilise les propriétés suivantes de $\prec$: si $f_1 \prec g_1 = g_1^{\#}$, $f_2 \prec g_2 = g_2^{\#}$ alors $f_1 + f_2 \prec g_1 + g_2$ (évident d'après (10)) et $f_1 * f_2 \prec g_1 * g_2$, $f_1 f_2 \prec g_1\, g_2$ (conséquences de (1), (2) et (10)). On peut décomposer la démonstration en trois étapes : la première consiste à prouver le résultat lorsque $a_{ij} \equiv \delta_{ij}$, $\Omega = \mathbb{R}^n$ et est une application directe des propriétés de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur; la deuxième étape permet de déduire le résultat dans le cas où $a_{ij} \equiv \delta_{ij}$ tandis que la dernière étape conclut la démonstration dans le cas général.

Etape 1. Il suffit d'observer que

$$u(t) = u_o * p(t) \ , \quad v(t) = v_o * p(t) \qquad (\forall t \geqslant 0) \tag{12}$$

où $p(t)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$ et donc $p(t) = p^{\#}(t)$ $(\forall t \geqslant 0)$. D'après les propriétés de $\prec$ rappelées ci-dessus, on déduit évidemment que

$$u_o \prec v_o = v_o^{\#} \Rightarrow u(t) \prec v(t) = v(t)^{\#} \ , \quad \forall t \geqslant 0 \ . \tag{13}$$

Etape 2. On utilise la formule de Trotter. On note respectivement par $S_o(t), S_1(t), \overline{S}(t)$ le semi-groupe correspondant à l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$, Ω , $\Omega^{\#}$ (avec conditions homogènes de Dirichlet). Tous les semi-groupes sont pris dans L^2 par exemple. Et on rappelle "la formule de Trotter" suivante

$$\begin{cases} \forall u_o \in L^2(\Omega), \ S_1(t)u_o = \lim\limits_{m\to\infty} [1_\Omega S_o(\frac{t}{m})]^m \ u_o \ (\text{dans } L^2(\Omega)) \\ \forall v_o \in L^2(\Omega^{\#}), \ \overline{S}(t)u_o = \lim\limits_{m\to\infty} [1_{\Omega^{\#}} S_o(\frac{t}{m})]^m \ v_o \ (\text{dans } L^2(\Omega^{\#})). \end{cases}$$

Cette formule de Trotter n'est pas une application directe des résultats classiques mais ne présente pas de difficulté particulière (voir [3] pour plus de détails).

Pour démontrer l'assertion

$$(14) \qquad u_o \prec v_o = v_o^{\#} \Rightarrow S_1(t)\, u_o \prec \overline{S}(t)\, v_o = (\overline{S}(t)v_o)^{\#} \quad , \forall t \geqslant 0$$

il suffit alors de remarquer que d'après l'Etape 1, si $\varphi \prec \psi = \psi^{\#}$ alors $S_o(\frac{t}{m})\varphi \prec S_o(\frac{t}{m})\psi = (S_o(\frac{t}{m})\psi)^{\#}$ et comme $1_\Omega \prec (1_\Omega)^{\#} = 1_{\Omega^{\#}}$, on a aussi pour tout $t \geqslant 0$

$$\{1_\Omega\, S_o(\tfrac{t}{m})\}\varphi \prec \{1_{\Omega^{\#}}\, S_o(\tfrac{t}{m})\}\psi = (\{1_{\Omega^{\#}}\, S_o(\tfrac{t}{m})\}\psi)^{\#} .$$

Et (14) s'en déduit aisément.

Etape 3. A nouveau, on utilise la formule de Trotter. On note alors par $S'(t)$ le semi-groupe (dans L^2) engendré par l'opérateur $B = - \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j) + \Delta$ avec conditions homogènes de Dirichlet sur $\partial\Omega$. Le fait que B dégénère éventuellement ne présente aucune difficulté : on peut par exemple remplacer B par $B_\delta = B - \delta\Delta$ dans la démonstration qui suit puis faire tendre δ vers 0_+.

Avec ces notations on a

$$\forall u_o \in L^2(\Omega),\ S(t)u_o = \lim_{m\to\infty}[S'(\tfrac{t}{m})S_1(\tfrac{t}{m})]^m u_o \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme qui suit pour conclure au vu de (14).

Lemme. Pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$, $S'(t)\varphi \prec \varphi$ pour tout $t \geqslant 0$.

Remarque. Ce lemme est uniquement basé sur le fait que

$$B = - \sum_{i,j} \partial_i(b_{ij}\partial_j)$$

et $(b_{ij}) \geqslant 0$.

Une démonstration formelle du lemme (que l'on peut par exemple justifier en utilisant B_δ...) consiste à observer que $\tilde{\varphi}(x,t) = (S'(t)\varphi)(x)$ est la solution de

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} + B\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0,T[, \tilde{\varphi} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0,T[$$

et $\tilde{\varphi}_{|t=0} = \varphi$ dans Ω. D'où en multipliant l'équation par $F'(|\tilde{\varphi}|)\operatorname{sign}\tilde{\varphi}$ pour toute fonction F paire C^2 et en intégrant par parties sur Ω

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} F(|\tilde{\varphi}|)dx + \int_{\Omega} F''(|\tilde{\varphi}|) \sum_{i,j} b_{ij}\partial_i \tilde{\varphi}\partial_j \tilde{\varphi}dx = 0 \ ;$$

Et si F est convexe (et donc croissante car paire), la positivité du second terme permet de conclure au vu de la caractérisation (9). ■

Les Etapes 2 et 3 sont de simples applications de la méthode de Trotter; l'Etape 1 est donc le point essentiel de la démonstration qui repose ainsi que nous l'avions annoncé sur le fait que la solution fondamentale de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$ est à symétrie sphérique, positive et décroissante.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. ALVINO et G. TROMBETTI : Rend. Acc. Naz. Lincei, 66 (1979), p.1.7.

[2] A. ALVINO, P.L. LIONS et G. TROMBETTI : C.R. Acad. Sci. Paris, 303 (1986), p.947-950.

[3] A. ALVINO, P.L. LIONS et G. TROMBETTI : C.R. Acad. Sci. Paris, 303 (1986), p.975-978.

[4] C. BANDLE : J. Anal. Math., 30 (1976), p.98-112.

[5] C. BANDLE : Isoperimetric inequalities and applications, Pitman, Londres, 1980.

[6] G. CHITI : Bull.U.M.I., 16 (1979), p.178-185.

[7] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD et G. POLYA : Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1964.

[8] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD et G. POLYA : Mess.Math, 58 (1929), p.145-152.

[9] E.H. LIEB : Stud. Appl. Math., 57 (1977), p.93-105.

[10] P.L. LIONS : In Non linear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Séminar, Vol.I, Pitman, Londres, 1980.

[11] J. MOSSINO et J.M. RAKOTOSSON : Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13 (1986) p.51.

[12] J.L. VASQUEZ : C.R. Acad. Sci. Paris, 295 (1982), p.71-74.

[13] G. TALENTI : Bull. U.M.I., 1986.

[14] H.F. WEINBERGER : In Studies Math. Anal., Stanford Univ. Press, 1962.

****