Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac

Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non-linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 8, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A8_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

INTERACTION D'ONDES SIMPLES POUR DES EQUATIONS COMPLETEMENT NON-LINEAIRES

par S. ALINHAC

Exposé n°VIII

17 Décembre 1985

INTRODUCTION.

Cet exposé est la suite naturelle de l'exposé n°XI (84-85) "Paracomposition et application aux équations non-linéaires", développé dans les publications [1] , [2] .

Rappelons le problème étudié : $u \in H^{s+m}_{loc}(\Omega)$ est une solution donnée, réelle, d'une équation (ou système)

$$F(x,u(x),\ldots,u^{(\alpha)}(x),\ldots) = 0 \ , \ u^{(\alpha)} = \partial^{\alpha}_{x}u \ , \ |\alpha| \leqslant m \ ,$$

F étant une fonction réelle C^{∞} de ses arguments, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On suppose d'emblée $s > n/2$, ce qui permet de donner un sens à l'équation (car alors H^s est une algèbre), et implique une géométrie des caractéristiques bien déterminée par le symbole principal $p(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} \dfrac{\partial F}{\partial u(\alpha)} (x,u,\ldots)\ \xi^{\alpha}$.

Cette restriction, qui exclut en particulier l'étude des chocs pour les systèmes de lois de conservation, permet en revanche d'obtenir des théorèmes très généraux, liés à un calcul pseudo-différentiel adapté : L'outil principal que l'on utilise ici est en effet le calcul paradifférentiel de Bony [6] .

On s'intéresse à un problème d'évolution : plus précisément, Soit, pour une coordonnée t , $\Omega_{\pm} = \{\Omega \cap \pm t > 0\}$; nous supposons que Ω_+ soit un domaine d'influence de Ω_- pour p .

Notre but est alors de décrire des situations "physiques" où la solution représente, dans le passé, une ou plusieurs ondes progressives, dont l'interaction (qui a lieu dans le futur $\overline{\Omega}_+$) produit seulement un nombre fini d'ondes progressives "sortantes".

I. LE RESULTAT PRINCIPAL.

<u>Théorème</u> : Soit $u \in H^{s+m}_{loc}(\Omega)$ une solution de $F(x,u,\ldots) = 0$, $s > \frac{n}{2} + 4$.

Soit Σ une configuration de m surfaces caractéristiques $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_m$ de classe C^1 , se coupant transversalement le long d'une arête $\Gamma \subset \overline{\Omega}_+$ (de codimension 2), et telles que les courbes caractéristiques de p issues des normales aux Σ_i en des points de Γ soient transverses à Γ.

Supposons, dans Ω_-, Σ_1 et Σ_2 de classe C^∞, $u \in C^\infty$ hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, et u localement dans $H^{s+m,\infty}_{loc}(\Sigma_i)$ près de Σ_i $(i = 1,2)$.

Les singularités de u dans Ω peuvent être alors décrites de la façon suivante :

i) Γ est C^∞.

ii) Les surfaces Σ_1, Σ_2, et les surfaces "sortantes" $\Sigma_3^+,\dots,\Sigma_m^+$ sont C^∞ hors de Γ.

iii) La solution u est C^∞ hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+ \cup \dots \cup \Sigma_m^+$.

iv) Localement près de $\Sigma_i|\Gamma$, $u \in H^{s+m,\infty}_{loc}(\Sigma_i)$, $i = 1,2$.

v) Localement près de $\Sigma_i^+|\Gamma$, $u \in H^{t,\infty}_{loc}(\Sigma_i)$, $t = s+m+s-n/2-1$, $i = 3,\dots,m$.

Ce théorème est l'analogue du théorème de Bony [7] dans le cas semi-linéaire. Citons également, toujours dans le cas semi-linéaire, les travaux de M. Beals [5], Bony [6][7][8][9][10][11], B. Lascar [14], Leichtnam [15], Melrose et Ritter [16], Rauch et Reed [19][20][21], et P. Gérard [12] dans le cas analytique.

Dans le cas complètement non-linéaire, signalons, pour l'étude des singularités, P. Godin [13] et P. Gérard [12].

Une variante du théorème consiste à supposer (mais c'est peu réaliste) toutes les surfaces Σ_j C^∞ dans Ω_-, et u localement conormale près de chacune d'elles : la conclusion est la même, la propriété iv) étant vraie pour toutes les surfaces, et remplaçant v). On peut également considérer le cas d'un système (par exemple quasi-linéaire), et celui où la solution u est déterminée par ses données de Cauchy sur $t = 0$ (qui sont alors supposées conormales par rapport à l'hypersurface C^∞ Γ). On renvoie à [4] pour des énoncés précis.

Remarquons qu'en général les surfaces Σ_i ne sont pas C^∞ au voisinage de Γ : leur régularité hors de Γ est une conséquence du caractère conormal de la solution u. Nous ne savons pas si des hypothèses plus fortes sur u dans le passé (par exemple conormale "classique", "piecewise smooth", cf.[18]) impliquent la régularité correspondante de u dans l'avenir, mais il nous semble que "u conormale" est l'hypothèse la plus faible qu'on puisse faire pour garantir la régularité des surfaces sortantes.

II. DISTRIBUTIONS CONORMALES (première partie).

L'énoncé du théorème n'utilise que la notion de distribution conormale par rapport à une surface C^∞ Σ, que nous rappelons :

$$H^{s,k}(\Sigma) = \{u \in H^s \;,\; Z_1 \dots Z_\ell u \in H^s \;,\; \ell \leqslant k\} \;,$$

les Z_i étant des champs C^∞ tangents à Σ .

Cette notion est classique, et sa pertinence pour l'étude des singularités des solutions d'équations non-linéaires a été discutée par de nombreux auteurs (cf. notamment Bony [7][8] , Melrose-Ritter [16] , Rauch-Reed [ ] Rauch [18] , P. Gérard [12]).

Bien entendu, dans le cas qui nous intéresse, les surfaces Σ_j sont a priori peu régulières, et il n'est pas possible de définir les espaces $H^{s,k}(\Sigma)$ d'emblée, car les coefficients des champs Z tangents à Σ (dont la collection est notée $\mathcal{V}$) sont peu réguliers .

Nous présentons ci-dessous un cadre de travail commode, en indiquant comment on peut définir des espaces $H^{s,k}_{loc}(\mathcal{V})$, $C^{\sigma,k}_{loc}(\mathcal{V})$ associés à une collection $\mathcal{V}$ de champs "définissants" .

Remarquons qu'une construction voisine a été faite indépendamment par Chemin (communication personnelle).

1. Distributions conormales définies par une famille $\mathcal{V}$.

1.1. Soit $\alpha > 1$ et $\mathcal{V}$ un C^∞ sous-module de $C^\alpha_{loc}(\Omega, T\Omega)$, le module des champs Z à coefficients $C^\alpha_{loc}(\Omega)$.

Posons $\widetilde{C}^{\varepsilon,0}_{loc}(\mathcal{V}) = C^\varepsilon_{loc}(\Omega)$, et supposons définis les espaces $\widetilde{C}^{\varepsilon,\ell}_{loc}(\mathcal{V})$ pour $\ell \leqslant k-1$. Pour définir $\widetilde{C}^{\varepsilon,k}_{loc}(\mathcal{V})$, on fait sur $\mathcal{V}$ l'hypothèse supplémentaire :

$(P_{\alpha,k-1})$: Les coefficients des champs de $\mathcal{V}$ appartiennent à $\widetilde{C}^{\alpha,k-1}_{loc}(\mathcal{V})$.

Pour $1-\alpha < \varepsilon \leqslant \alpha$, on pose alors

$$\widetilde{C}^{\varepsilon,k}_{loc}(\mathcal{V}) = \{u \in \widetilde{C}^{\varepsilon,k-1}_{loc}(\mathcal{V}),\ \forall\, Z \in \mathcal{V} \;,\; Z\,u \in \widetilde{C}^{\varepsilon,k-1}_{loc}(\mathcal{V})\} \;.$$

Les espaces $\widetilde{C}^{\varepsilon,\ell}_{loc}(\mathcal{V})$ $(\ell \leqslant k)$ sont définis par des "vrais" champs, et sont des algèbres lorsque $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha$.

Dans toute la suite, on suppose que $\mathcal{V}$ est de type fini au sens suivant :

(TF) Il existe une famille finie $Z_j (1 \leqslant j \leqslant N)$, $Zj \in \mathcal{V}$, telle que, pour tout $Z \in \mathcal{V}$, il existe des $\alpha_j \in \widetilde{C}^{\alpha-1,k-1}_{loc}(\mathcal{V})$, avec $\alpha_j Z_j \in \mathcal{V}$ et $Z = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j Z_j$.

1.2. Pour une famille $\mathcal{V}$ vérifiant $P_{\alpha,k-1}$ et (TF), on peut définir les espaces $H^{s,\ell}_{loc}(\mathcal{V})$, $C^{\sigma,\ell}_{loc}(\mathcal{V})$ $(s \in \mathbb{R}\;,\; \sigma \neq 0\;,\; 0 \leqslant \ell \leqslant k)$, qui jouissent des propriétés suivantes :

i) $H^{s,0}_{loc}(V) = H^{s}_{loc}(\Omega)$, $C^{\sigma,o}_{loc}(V) = C^{\sigma}_{loc}(\Omega)$.

ii) Pour $a \in C^{\varepsilon,\ell}_{loc}(V)$, $\varepsilon > 0$, on peut définir un paraproduit T_a (comme dans Bony [6]). Si $u \in H^{s,\ell}_{loc}(V)$, $T_a u \in H^{s,\ell}_{loc}(V)$ et $T_a u$ est bien défini modulo $H^{s+\varepsilon,\ell}_{loc}(V)$ (et de même si $u \in C^{\sigma,\ell}_{loc}(V)$).

iii) Pour $1-\alpha < \varepsilon \leqslant \alpha$, $\tilde{C}^{\varepsilon,\ell}_{loc}(V) = C^{\varepsilon,\ell}_{loc}(V)$.

iv) Si A est un pseudo-différentiel classique d'ordre m,

$$A : H^{s,\ell}_{loc}(V) \to H^{s-m,\ell}_{loc}(V) .$$

v) $H^{s,\ell}_{loc}(V) = \{u \in H^{s,\ell-1}_{loc}(V),\ \forall Z \in V,\ T_z u \in H^{s,\ell-1}_{loc}(V)\}$,

où $z = \Sigma\, a_j \xi_j$ est le symbole de Z, $T_z = \Sigma\, T_{a_j} D_j$.

On voit donc que les espaces "exotiques" $H^{s,\ell}_{loc}(V)$, $C^{\sigma,\ell}_{loc}(V)$ sont définis à l'aide de "parachamps" T_z au lieu des "vrais" champs Z, et $C^{\sigma,\ell}$ coincide avec l'espace "classique" $\tilde{C}^{\sigma,\ell}_{loc}(V)$ pour les petites valeurs de σ (cf. iii)). Compte tenu de iv), on peut se faire une idée de ces espaces sans utiliser le calcul paradifférentiel.

Bien entendu, ces espaces sont des algèbres pour $s > n/2$ et $\sigma \geqslant 0$.

2. Quelques exemples.

2.1 Soit Σ une hypersurface de classe $C^{\rho+1+k}_{loc}$, $\rho > 0$, $k \geqslant 1$.
La collection V des champs à coefficients $C^{\rho+k}_{loc}$ tangent à Σ vérifie $P_{\rho+1,k-1}$ et (TF) : les espaces $H^{s,\ell}_{loc}(v)$ et $C^{\sigma,\ell}_{loc}(v)$ ne dépendent que de Σ et non de ρ,k, et on les note $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$, $C^{\sigma,\ell}_{loc}(\Sigma)$ $(0 \leqslant \ell \leqslant k)$.

Si χ est un difféomorphisme de classe $C^{\rho+1+k}$, $\Sigma' = \chi(\Sigma)$, la paracomposition χ (cf.[1]) est un isomorphisme de $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma')$ sur $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$: c'est cette propriété que l'on a utilisé dans [2] pour "redresser" Σ en la surface $\{x_1 = 0\}$, pour laquelle tous les espaces conormaux sont "classiques".

2.2 Si Σ consiste en deux hypersurfaces se coupant transversalement en Γ, la collection V des champs à coefficients $C^{\rho+k}_{loc}$ tangents à Σ_1 et à Σ_2 satisfait $P_{\rho+1,k-1}$ et (TF), et l'on obtient comme en a) les espaces $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$, $C^{\sigma,\ell}_{loc}(\Sigma)$.

2.3 Si Σ est une configuration de plus de deux surfaces se coupant sur Γ de codimension 2, Bony [7] a montré que le "bon" espace $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$ n'est pas défini à l'aide de champs ou de parachamps, objets trop "rigides", mais à l'aide d'opérateurs pseudo-différentiels convenables. Nous reviendrons sur ce point au § IV.3.

III. REGULARITE DES SURFACES CARACTERISTIQUES (première partie).

Dans le cas semi-linéaire, ces surfaces sont a priori C^∞ . Dans le cas complètement non-linéaire au contraire, ces surfaces dépendent de la solution u : si l'on décrit, comme dans [2] , l'évolution d'une seule onde, on trouve finalement que Σ est C^∞ . Ce n'est pas le cas en général pour une interaction. En effet, soit $u \in H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$, où Σ consiste en deux surfaces comme dans l'exemple 2.2 : la trace $u_{|\Sigma_1}$ est en général conormale à l'arête Γ (plus précisément $H^{s-1/2,\ell}_{loc}(\Gamma)$), et non dans $H^{s-1/2+\ell}_{loc}$. Comme l'équation exprimant que Σ_j est caractéristique dépend de $u_{|\Sigma_j}$, on ne peut guère espérer que Σ_j soit meilleure que "conormale par rapport à Γ " : on dira, plus précisément, que Σ_j est de classe $C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma)$ si elle peut être définie par une équation $F_j = 0$, où $F_j \in C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma)$ (Γ étant supposée, conformément à l'exemple 2.1, de classe $C^{\rho+1+k}$) .

Ceci conduit à modifier les constructions des exemples 2.2, 2.3 pour les adopter à des situations où les surfaces Σ_j sont seulement de grande régularité conormale par rapport à leur intersection Γ .

IV. DISTRIBUTIONS CONORMALES (deuxième partie).

1. Soit Γ de codimension 2, de classe $C^{\rho+1+k}$ ($\rho > 1, k \geqslant 0$), et Σ une hypersurface contenant Γ , de classe $C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma)$ (situation que l'on note $G_{\rho,k}$). La collection V des champs Z à coefficients $C^{\rho,k}_{loc}(\Gamma)$, tangents à Γ et à Σ , vérifie $P_{\rho,k}$ et (TF) (mais ce n'est pas évident,cette fois !), et les espaces $H^{s,\ell}_{loc}(V)$ correspondants ne dépendent que de Σ et Γ , et non de ρ,k : on les note $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma,\Gamma)$ ($0 \leqslant \ell \leqslant k+1$).

2. Soient Σ_1 , Σ_2 de classe $C^{\rho+1,k}_{loc}(\Gamma)$, se coupant transversalement en Γ de classe $C^{\rho+1+k}_{loc}$($\rho > 1, k \geqslant 0$).

La collection V des champs Z à coefficients $C^{\rho,k}_{loc}(\Gamma)$, tangents à

Σ_1 et Σ_2 , vérifie $P_{\rho,k}$ et (TF), et l'on note $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma_1,\Sigma_2)$ les espaces correspondants, qui ne dépendent pas de ρ,k .

On peut montrer qu'en fait, si $\rho > 2$, $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma_1,\Sigma_2) = H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma_1,\Gamma)+H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma_2,\Gamma)$.

3. Si Σ désigne une configuration de m surfaces ($m \geqslant 2$) se coupant le long de Γ (de codimension 2) et vérifiant $G(\rho,k)$ (cf.IV.1.), on pose

$$H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma) = \sum_{j=1}^{m} H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma_j,\Gamma).$$

Compte tenu de l'exemple 2 ci-dessus, cette définition s'accorde avec la définition naturelle. On a également la propriété suivante :

$$H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma) = \{u \in H^{s,\ell-1}_{loc}(\Sigma), \quad \forall a \in \mathcal{V} , \; T_a u \in H^{s,\ell-1}_{loc}(\Sigma)\} ,$$

où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des symboles a, homogènes en ξ de degré 1, à coefficients $C^{\rho,k}_{loc}(\Gamma)$, tels que $a = 0$ sur $N^*\Gamma \cup N^*\Sigma_1 \cup \ldots \cup N^*\Sigma_m$. Bien entendu, on anticipe ici sur le § III.2, en supposant les opérateurs paradifférentiels T_a bien défini.

V. REGULARITE DES SURFACES CARACTERISTIQUES (deuxième partie).

Nous sommes maintenant en mesure de préciser le lien entre la régularité de la solution u et celle des surfaces caractéristiques qui en dépendent.

Lemme : Soit Σ une configuration de m surfaces vérifiant $G(\rho,k)$, avec $\Gamma \subset \overline{\Omega}_+$ (cf.IV.3.). Soit $p = p(x,v(x),\xi)$ un symbole réel différentiel homogène d'ordre m sur Ω , dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de (x,v), avec $v = (v_1,\ldots,v_N)$ une fonction réelle donnée sur Ω , $v \in C^{\rho+1}_{loc}(\Omega)$.

On suppose que les surfaces Σ_j ($1 \leqslant j \leqslant m$) sont caractéristiques pour p , et que les courbes caractéristiques pour p issues des normales aux Σ_j en des points de Γ sont transverses à Γ .

Si $v \in C^{\rho+1,k+1}_{loc}(\Sigma)$, et si Σ_1 et Σ_2 sont de classe $C^{\rho+k+2}_{loc}$ dans Ω_- , alors Γ est de classe $C^{\rho+k+2}_{loc}$, Σ_1 et Σ_2 sont de classe $C^{\rho+1,k+1}_{loc}(\Gamma)$, et les Σ_j ($j = 3,\ldots,m$) également, dans le domaine d'influence de Γ ∎

On remarquera que la régularité des configurations est établie dans les classes de fonctions Höldériennes : la propagation de cette régularité de Ω_- vers Ω_+ est due au fait que les équations traduisant " Σ_j est caractéristique" sont du premier ordre.

VI. PRINCIPE DE LA PREUVE DU THEOREME.

La méthode employée pour prouver le théorème est celle introduite par Bony [6] : à l'aide d'une formule de paralinéarisation, on substitue à l'équation de départ une équation paradifférentielle convenable. On montre la régularité des solutions u de cette dernière par le procédé de commutation-propagation (cf. Bony [7]), et la régularité de la configuration caractéristique à l'aide du lemme de la partie V. L'ensemble de la preuve se fait par récurrence sur l'indice k de conormalité.

Nous donnons ici brièvement les énoncés précis correspondants à chaque étape.

1. Formule de paralinéarisation.

Soit Σ une configuration vérifiant $G(\rho,k)$ $(\rho > 2)$, et $s > n/2$:

i) L'espace $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$ est une algèbre.

ii) Si $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, et $u \in H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$, on a

$$F(u) = T_{F'(u)}u + R(u), \text{ avec } R(u) \in H^{2s-n/2-0,\ell}_{loc}(\Sigma)$$

(i.e., $\forall\varepsilon > 0$, $R(u) \in H^{2s-n/2-\varepsilon,\ell}_{loc}(\Sigma)$).

Là encore, nous anticipons sur le § III.2 pour la définition du paraproduit $T_{F'(u)}$.

Notons que i) est une conséquence naturelle de IV,2 . Nous ne savons pas si la petite perte dans la régularité de R(u) (par rapport à la formule classique lorsque $\ell = 0$, cf. Bony [6] , Meyer [17]) est seulement "technique", mais peu nous importe ici.

2. Calcul symbolique à coefficients $C^{\varepsilon,\ell}_{loc}(\Sigma)$.

Le point fondamental de notre approche est, bien entendu, l'établissement d'un calcul symbolique paradifférentiel, analogue à celui de Bony [6], mais adapté aux singularités de u . Les résultats de la construction sont résumés ci-dessous.

Soit Σ une configuration de m surfaces satisfaisant $G(\rho,k)$ $(\rho > 2,\ k \geqslant 0$; cf.IV.1.) :

i) Pour $a \in C^{\varepsilon,\ell}_{loc}(\Sigma)$, $\varepsilon > 0$, et $u \in H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$, le paraproduit $T_a u$ est bien défini modulo $H^{s+\varepsilon,\ell}_{loc}(\Sigma)$, et $T_a u \in H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$.

ii) A un symbole $\ell \in \Sigma^m(C^{\varepsilon,\ell}_{loc}(\Sigma))$ (c'est à dire, comme dans Bony [6], $\ell = \ell_m + \ldots + \ell_{m-[\varepsilon]}$, ℓ_j homogène de degré j en ξ , C^∞ en ξ et $C^{\varepsilon-(m-j),\ell}_{loc}(\Sigma)$ en x) on peut associer un opérateur paradifférentiel L , noté par abus T_ℓ , qui applique $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$ dans $H^{s-m,\ell}_{loc}(\Sigma)$.

iii) Si $a \in \Sigma^{m_1}(C^{\varepsilon,\ell}_{loc}(\Sigma))$, $b \in \Sigma^{m_2}(C^{\varepsilon,\ell}_{loc}(\Sigma))$, $0 < \varepsilon \leqslant \rho$, $T_a T_b - T_{a\#b}$ applique $H^{s,\ell}_{loc}(\Sigma)$ dans $H^{s-m_1-m_2+\varepsilon-0,\ell}_{loc}(\Sigma)$.

$$\text{Ici, } a \# b = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant[\varepsilon]} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^\alpha_\xi a \, D^\alpha_x b \ .$$

Remarquons que, dans le cadre des espaces $H^{s,\ell}_{loc}(V)$ et $C^{\sigma,\ell}_{loc}(V)$ discuté en I.1., on dispose aussi d'un calcul symbolique avec les propriétés i), ii), iii), et d'une formule de paralinéarisation (les deux sans perte de + 0 dans la régularité des restes). Pour ne pas alourdir le texte, nous n'avons donné les énoncés que dans la situation spéciale dont on a besoin ici.

3. Propriété de propagation.

Le lemme suivant est une conséquence directe du théorème de propagation des singularités de Bony [6] et du calcul symbolique expliqué en 2.

<u>Lemme</u> : Soit Σ une configuration de m surfaces satisfaisant $G(\rho,k)$ ($\rho > 2$, $k \geqslant 0$), et p un symbole réel différentiel homogène d'ordre m , à coefficients $C^{\rho,k}_{loc}(\Sigma)$. On suppose que les Σ_j sont caractéristiques pour p , et que Ω_+ est d'influence de Ω_- .

Supposons $\rho > 3$, et soit $u \in H^{s+m,k}_{loc}(\Sigma)$, vérifiant les conditions suivantes :

i) Localement dans Ω_- , $u \in H^{s+m,k+1}_{loc}(\Sigma)$.

ii) $T_{p+p_{m-1}} u \in H^{s+1,k+1}_{loc}(\Sigma)$, avec p_{m-1} un symbole pseudodifférentiel homogène d'ordre m-1, à coefficients $C^{\rho-2,k}_{loc}(\Sigma)$.

Alors $u \in H^{s+m,k+1}_{loc}(\Sigma)$ ∎

La condition assez forte $\rho > 3$, et le décalage bizarre entre la régularité des coefficients de p et celle des coefficients de p_{m-1} , semblent nécessités par certaines divisions au niveau symbolique.

VII. PREUVE DU THEOREME.

Soit $u \in H^{s+m}_{loc}(\Omega)$, $s > n/2 + 4$. Posons $s - n/2 = \rho + 1$, $\rho > 3$: le symbole principal p de l'équation linéarisée est à coefficients $C^{\rho+1}_{loc}$, donc Σ_1 et Σ_2 sont aussi $C^{\rho+1}_{loc}$, ainsi que Γ et les surfaces $\Sigma_j (j = 3,\dots,m)$ dans le domaine d'influence de Γ. Soit Σ une configuration de m surfaces caractéristiques s'appuyant sur Γ, de classe $C^{\rho+1}_{loc}$, prolongeant (le cas échéant) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+ \cup \dots \cup \Sigma_m^+$.

1. Supposons que Σ satisfasse $G(\rho,k)$, $u \in H^{s+m,k}_{loc}(\Sigma)$, et $u \in H^{s+m+k}_{loc}$ hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+ \cup \dots \cup \Sigma_m^+$ (l'hypothèse du théorème implique que celle-ci pour $k = 0$).

D'après VI.1. et VI.3, $u \in H^{s+m,k+1}_{loc}(\Sigma)$.

2. Le lemme de régularité V. pour Σ montre qu'alors Γ est $C^{\rho+k+2}_{loc}$, et les Σ_j sont de classe $C^{\rho+1,k+1}_{loc}(\Gamma)$ dans le domaine d'influence de Γ.

Hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+ \cup \dots \cup \Sigma_m^+$, $u \in H^{s+m+k+1}_{loc}$, sauf peut-être microlocalement sur les conormaux aux $\Sigma_j^- (j \geqslant 3)$: le théorème 6.2. de Bony [6] montre alors qu'en fait $u \in H^{s+m+k+1}_{loc}$ partout hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+ \cup \dots \cup \Sigma_m^+$ (car u n'a de singularités dans le passé que sur Σ_1 et Σ_2).

3. Il ne reste plus qu'à prolonger (le cas échéant) arbitrairement à Ω la configuration Σ hors du domaine d'influence de Γ en une configuration caractéristique satisfaisant $G(\rho,k+1)$ (ce qui est possible car, la où le prolongement a lieu, $u \in C^{m+\rho+k+2}_{loc}$) : on est alors ramené à la situation de 1. avec $k+1$ au lieu de k, d'où le théorème. L'amélioration décrite au point v) du théorème s'obtient de façon standard en utilisant le théorème 6.2 de Bony [6].

On observe que l'on a prouvé en fait un énoncé beaucoup plus précis que le théorème, de deux points de vue :

i) on n'a pas besoin de supposer une régularité d'ordre infini de u dans le passé : une régularité limitée implique la régularité limitée correspondante dans l'avenir.

ii) Les algèbres $H^{s+m,k}_{loc}(\Sigma)$ et la condition $G(\rho,k)$ décrivent très précisément ce qui se passe près de Γ.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Alinhac, Paracomposition et opérateurs paradifférentiels à paraître dans Comm. in PDE (1985).

[2] S. Alinhac, Evolution d'une onde simple pour des équations non-linéaires générales, à paraître in Current Topics in Partial Diff. Equations Kinekuniya Co. 1985 (Japon).

[3] S. Alinhac, Paracomposition et application aux équations non-linéaires, Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer, (exposé XI), Ecole Polytechnique, Paris, 1984-85.

[4] S. Alinhac, Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non-linéaires, article à paraître.

[5] M. Beals, Self-spreading and strength of singularities for solutions to semi-linear wave equations, Ann. of Maths, 118 (1983), 187-214.

[6] J.M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4ième série, 14, 1981, 209-246.

[7] J.M. Bony, Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1979-80, n°22 et 81-82, n°2, Ecole Polytechnique, Paris.

[8] J.M. Bony, Propagation et interaction des singularités pour les solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires, Proc. Int. Conf. Math., Warszawa, 1983, 1133-1147.

[9] J.M. Bony, Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non-linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1983-84, n°10, Ecole Polytechnique, Paris.

[10] J.M. Bony, Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equation, à paraître.

[11] J.M. Bony, Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non-linéaires, à paraître.

[12] P. Gérard, Interaction de singularités analytiques pour des équations non-linéaires, Thèse de 3ième cycle, Orsay, 1985, et article à paraître.

[13] P. Godin, Propagation of C^{∞} regularity for fully non-linear second order strictly hyperbolic equations in two variables, à paraître aux Trans. of A.M.S.

[14] B. Lascar, Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, C.R.A.S. Paris, t.287, serie A, 1978, 527-529.

[15] E. Leichtnam, Interaction de singularités pour une classe d'équations à caractéristiques doubles, à paraître aux Ann. de l'Inst. Fourier (1985).

[16] R. Melrose, N. Ritter, Interaction of non-linear progressing waves I, II, à paraître.

[17] Y. Meyer, Remarque sur un théorème de J.M. Bony, Suppl. Rend. Mat. Palermo, n°1 , 1981, 1-20 .

[18] J. Rauch, Exposé au Séminaire Bony-Meyer-Sjöstrand, 1985-86, Ecole Polytechnique, Paris.

[19] J. Rauch, M. Reed, Propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations in one space variable, Ann. of Maths 111 (1980), 531-552.

[20] J. Rauch, M. Reed, Non-linear microlocal analysis of semi-linear hyperbolic systems in one space dimension, Duke Math. J, 49 (1982), 397-475.

[21] J. Rauch, M. Reed, Jump discontinuities of semi-linear strictly hyperbolic systems in two variables : creation and propagation. Comm. Math. Phys. 81 (1984), 203-227.

***