Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J.-P. Demailly

Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. nº 19, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A19_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

MESURES DE MONGE-AMPÈRE ET MESURES PLURIHARMONIQUES.

par J.-P. DEMAILLY

Exposé n° XIX

25 Février 86

Abstract. Let Ω be a bounded hyperconvex open subset of a Stein manifold. Using complex Monge-Ampère operators defined by Bedford and Taylor, we introduce a "pluricomplex Green function" and pluriharmonic measures μ_z supported in $\partial\Omega$ for each z in Ω . These measures are biholomorphic invariants of Ω , and they are in general supported by the set of strictly pseudoconvex points of $\partial\Omega$. Furthermore, the singularity of the kernel $d\mu_z(\zeta)$ on the diagonal of $\partial\Omega$ can be described explicitly when Ω is strictly pseudoconvex. Through a complexification process, it is finally shown that the Monge-Ampère measures provide an explicit formula allowing us to represent every point of a convex compact subset $K \subset \mathbb{R}^n$ as a barycenter of the extremal points of K .

0. INTRODUCTION.

L'objet de cet exposé est de développer la théorie du potentiel en plusieurs variables complexes, suivant la voie inaugurée par Bedford et Taylor [1] , [2] . Nous introduisons en particulier une "fonction de Green pluricomplexe" pour tout domaine hyperconvexe borné Ω dans une variété de Stein. Cette fonction est définie comme la solution $u_z(\zeta)$ du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe avec pôle logarithmique au point $z \in \Omega$, dont les valeurs sur le bord de Ω sont nulles. Dans le cas d'un ouvert convexe Ω , l'existence de cette fonction a été démontrée par L. Lempert [10], [11] grâce à une étude approfondie des disques extrêmaux plongés dans Ω ; on obtiendra ici la solution au moyen de la méthode des enveloppes supérieures de Perron-Bremermann (cf. [1], [2] , [13] , [14] pour la construction de fonctions extrêmales analogues).

L'un des autres outils fondamentaux dont nous disposons est la formule de Lelong-Jensen démontrée dans [5] . En appliquant cette formule à la fonction u_z , on construit alors un noyau de Poisson pluricomplexe $d\mu_z(\zeta)$, invariant par biholomorphisme, qui reproduit les fonctions pluriharmoniques sur Ω à partir de leurs valeurs sur le bord. Les mesures pluriharmoniques μ_z sont toutes absolument continues les unes par rapport aux autres et, sous des hypothèses géométriques convenables, leur support est contenu dans l'ensemble des points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$. La fonction de Green de Ω permet d'autre part de définir une distance $\delta_\Omega(x,y)$ sur Ω , invariante par biholomorphisme, qui mesure la distorsion entre les mesures μ_x et μ_y ; cette distance ne semble pas être reliée en général aux distances de Carathéodory ou de Kobayashi, et il y a de fortes raisons de penser que δ_Ω est en fait toujours complète. Nous nous intéressons ensuite au comportement de μ_z lorsque z tend vers le bord ; dans le cas où Ω est strictement pseudoconvexe, la singularité de $d\mu_z(\zeta)$ sur la diagonale de $\partial\Omega$ peut être déterminée explicitement au moyen d'une osculation de $\partial\Omega$ par des boules.

Pour terminer cet article, nous présentons une application des idées précédentes à l'étude de la géométrie des ensembles convexes. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ une partie convexe compacte. Grâce à un procédé de complexification, on montre que les mesures de Monge-Ampère fournissent une formule explicite permettant de représenter les points intérieurs à K comme barycentres des points extrêmaux de K.

Le présent exposé est une version condensée de l'article [6] , où le lecteur trouvera des démonstrations complètes et détaillées de tous les résultats mentionnés ici.

1. MESURES DE MONGE-AMPÈRE.

Soit X une variété de Stein de dimension n. On suppose donnée une fonction psh continue $\varphi : X \to [-\infty,R[$ où $R \in]-\infty,+\infty]$. Pour tout $r \in [-\infty,R[$, on note respectivement

$$(1.1) \qquad B(r) = \{x \in X \ ; \ \varphi(x) < r\} \ , \ S(r) = \{x \in X \ ; \ \varphi(x) = r\}$$

les "pseudoboules" et "pseudophères" de niveau associées à φ. On suppose en outre que φ est <u>exhaustive</u>, c'est-à-dire que pour tout $r < R$ l'ouvert $B(r)$ est relativement compact dans X.

On peut alors associer de manière naturelle à φ une collection de mesures positives $\mu_{\varphi,r}$ portées par les ensembles $S(r)$ (cf.[5]) : lorsque $\varphi \in C^\infty(X)$ et lorsque r est valeur régulière de φ, on définit $\mu_{\varphi,r}$ comme la restriction à l'hypersurface $S(r) = \partial B(r)$ de la forme différentielle de degré $2n-1$ $(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi$ (avec la notation usuelle $d^c = i(\bar\partial-\partial)$). Dans le cas général où φ est continue, on peut utiliser l'opérateur de Monge-Ampère complexe $(dd^c)^n$ introduit par Bedford et Taylor [1] , [2] pour calculer la mesure positive $(dd^c \max(\varphi,r))^n$; cette mesure est nulle sur $B(r)$ et coïncide avec $(dd^c\varphi)^n$ sur $X\setminus(B(r) \cup S(r))$. On pose alors

$$(1.2) \qquad \mu_{\varphi,r} = (dd^c \max(\varphi,r))^n - \mathbb{1}_{X\setminus B(r)}(dd^c\varphi)^n \ ,$$

et on vérifie que cette définition coïncide avec la précédente si $\varphi \in C^\infty(X)$.

Les mesures $\mu_{\varphi,r}$ ainsi construites vérifient la formule de Lelong-Jensen fondamentale suivante (cf.[5]).

Théorème 1.3. Toute fonction psh V sur X est $\mu_{\varphi,r}$-intégrable quel que soit r, et on a la formule

$$\mu_{\varphi,r}(V) - \int_{B(r)} V(dd^c\varphi)^n = \int_{B(r)} (r-\varphi)dd^c V \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} .$$

Démonstration. On se contentera de vérifier la formule lorsque φ et V sont de classe C^∞. Dans ce cas, le théorème de Stokes entraîne

$$\mu_{\varphi,r}(V) = \int_{S(r)} V(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi = \int_{B(r)} d[V(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi]$$

$$= \int_{B(r)} dV \wedge d^c\varphi \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} + V(dd^c\varphi)^n .$$

Comme $(dV \wedge d^c\varphi)^{1,1} = i(\partial V \wedge \bar\partial\varphi + \partial\varphi\wedge\bar\partial V) = (d\varphi\wedge d^cV)^{1,1}$, il vient

$$dV \wedge d^c\varphi \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} = d\varphi \wedge d^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} =$$

$$= (r-\varphi)dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} - d[(r-\varphi)d^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1}] .$$

On applique maintenant de nouveau le théorème de Stokes pour voir que

$$\int_{B(r)} d[(r-\varphi)d^c V \wedge (dd^c\varphi)^{n-1}] = 0 ,$$

et la formule cherchée s'ensuit. ■

2. CAS D'UN OUVERT HYPERCONVEXE.

Soit $\Omega \subset\subset X$ un ouvert pseudoconvexe relativement compact dans la variété de Stein X. On suppose que Ω est hyperconvexe, c'est-à-dire par définition qu'il existe une fonction $\varphi : \Omega \to [-\infty,0[$ psh continue et exhaustive. Bien que cette hypothèse relève de la géométrie complexe du domaine, c'est en un certain sens une hypothèse de régularité sur la frontière $\partial\Omega = \bar\Omega \setminus \Omega$; Kerzman et Rosay [8] ont montré en particulier que tout domaine faiblement pseudoconvexe à bord de classe C^1 est hyperconvexe. En améliorant la démonstration donnée dans [8], on peut en fait obtenir le résultat précis suivant.

Théorème 2.1. Tout ouvert faiblement pseudoconvexe $\Omega \subset\subset X$ à bord $\partial\Omega$ lipschitzien est hyperconvexe. Dans ce cas, il existe une fonction d'exhaustion $u : \Omega \to [-1,0[$ de classe C^∞ telle que

$$-\frac{A}{\operatorname{Log} 1/\delta} \leqslant u \leqslant -\frac{B}{\operatorname{Log} 1/\delta} \quad \underline{\text{et}} \quad dd^c\, u \geqslant \frac{1}{\operatorname{Log} 1/\delta}\, dd^c|z|^2 \quad ,$$

_où_ δ _désigne la distance au bord et_ A,B,C _des constantes_ > 0 .

D'après le paragraphe 1, on peut associer à toute fonction $\varphi : \Omega \to [-\infty,0[$ psh continue et exhaustive une collection de mesures $\mu_{\varphi,r}$ portées par les pseudo-sphères $S(r)$, $r < 0$. Le théorème 1.3 appliqué avec $V \equiv 1$ donne

$$(2.2) \qquad \|\mu_{\varphi,r}\| = \mu_{\varphi,r}(1) = \int_{B(r)} (dd^c\varphi)^n \quad .$$

Théorème 2.3. On suppose que la masse de Monge-Ampère de φ _sur_ Ω _est finie, i.e._

$$\int_\Omega (dd^c\varphi)^n < +\infty \ .$$

Alors les mesures $\mu_{\varphi,r}$ _convergent faiblement quand_ r _tend vers_ 0 _vers une mesure positive_ μ_φ _portée par_ $\partial\Omega$, _de masse totale_ $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n$.

Démonstration. Grâce à (2.2), il suffit de prouver que l'expression $r \mapsto \mu_{\varphi,r}(h)$ a une limite pour toute fonction $h \in C^2(X,\mathbb{R})$. C'est le cas si h est psh $\geqslant 0$ sur Ω , car dans ce cas le théorème 1.3. montre que la fonction $r \mapsto \mu_{\varphi,r}(h)$ est croissante sur $]-\infty,0[$, et elle est bornée d'après (2.2). La conclusion résulte maintenant du fait trivial que sur une variété de Stein toute fonction de classe C^2 est différence de deux fonctions psh $\geqslant 0$ de classe C^2 . ∎

L'un des outils fondamentaux dont nous disposons pour l'étude des mesures μ_φ est le théorème de comparaison suivant.

Théorème 2.4. Soit φ _comme précédemment, avec_ $\int_\Omega (dd^c\varphi)^n < +\infty$. _Soit_ $\psi : \Omega \to [-\infty,0[$ _une autre fonction psh continue exhaustive. On suppose que pour tout_ $a \in \partial\Omega$ _la fonction_ ψ _vérifie_

$$\lambda(a) := \limsup_{\Omega \ni z \to a} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} < +\infty \ .$$

Alors on a les inégalités

$$(2.5) \qquad \int_\Omega (dd^c\psi)^n \leqslant (\max_{\partial\Omega}\lambda)^n \int_\Omega (dd^c\varphi)^n \ ,$$

$$(2.6) \qquad d\mu_\psi(\zeta) \leqslant \lambda(\zeta)^n\, d\mu_\varphi(\zeta) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \ .$$

Démonstration abrégée. Signalons d'abord que l'inégalité (2.6) est en fait purement locale : elle a lieu sur tout ouvert relatif $\omega \subset \partial\Omega$ dès que l'on suppose $\lambda(a) < +\infty$ pour $a \in \omega$. On se contentera ici de prouver le résultat lorsque Ω est de classe C^3 et lorsque φ , $\psi \in C^3(\overline{\Omega})$, car la démonstration générale repose sur des estimations assez délicates de la masse de Monge-Ampère au voisinage du bord. Sous ces hypothèses, la plurisousharmonicité de φ et ψ implique $d\varphi \neq 0$ et $d\psi \neq 0$ sur $\partial\Omega$. On peut donc écrire $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda \in C^2(\overline{\Omega})$. On obtient alors les formules

$$\begin{aligned} d^c\psi &= \lambda d^c\varphi + \varphi\, d^c\lambda \quad , \\ dd^c\psi &= \lambda dd^c\varphi + d\lambda \wedge d^c\varphi + d\varphi \wedge d^c\lambda + \varphi\, dd^c\lambda \quad , \end{aligned}$$

d'où en restriction à $\partial\Omega$:

$$d^c\psi = \lambda d^c\varphi \ , \ dd^c\psi = \lambda dd^c\varphi + d\lambda \wedge d^c\varphi \quad ,$$

$$\mu_\psi = (dd^c\psi)^{n-1} \wedge d^c\psi = \lambda^n (dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi = \lambda^n \mu_\varphi \ . \ \blacksquare$$

3. FONCTION DE GREEN PLURICOMPLEXE.

Soit $\Omega \subset\subset X$ un domaine faiblement pseudoconvexe. Dans le but de généraliser la fonction de Green habituelle en plusieurs variables complexes, on considère un problème de Dirichlet relatif à l'opérateur de Monge-Ampère complexe : soit $z \in \Omega$ un point fixé ; peut-on trouver une fonction continue $u_z : \overline{\Omega} \to [-\infty, 0]$, psh sur Ω , vérifiant les propriétés

$$(3.1) \qquad \begin{cases} u_z|\partial\Omega = 0 \\ (dd^c u_z)^n = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus \{z\} \\ u_z(\zeta) = \mathrm{Log}|\zeta - z| + O(1) \quad \text{quand } \zeta \to z \ ? \end{cases}$$

Une condition nécessaire évidente pour l'existence de u_z est que Ω soit hyperconvexe. Inversement on a le résultat suivant, qui généralise le théorème 1.6 de Klimek [9] .

<u>Théorème 3.2</u>. <u>Soit</u> $\Omega \subset\subset X$ <u>un ouvert hyperconvexe</u>. <u>Alors le problème de Dirichlet</u> (3.1) <u>admet une solution</u> u_z <u>unique</u>, <u>et on a</u> $(dd^c u_z)^n = (2\pi)^n \delta_z$. <u>De plus</u>, <u>la fonction</u> u_Ω <u>définie par</u> $u_\Omega(z,\zeta) = u_z(\zeta)$ <u>est continue sur</u> $\Omega \times \overline{\Omega}$. <u>On dira que</u> u_Ω <u>est la fonction de Green pluricomplexe du domaine</u> Ω .

Lorsque Ω est un ouvert strictement convexe de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^n$, le résultat précédent est dû à L. Lempert [10] . La méthode de Lempert consiste à étudier les disques holomorphes extrêmaux de Ω passant par le point z. On obtient alors un feuilletage de Ω par des disques (avec singularité en z), et les fonctions de Green des feuilles se raccordent en une fonction u_z qui est la solution cherchée. Dans cette situation, L. Lempert a montré que $u_z \in C^\infty(\bar{\Omega}\setminus\{z\})$, et de plus la fonction u_Ω est symétrique en ses deux arguments (il suffit d'observer que la fonction de Green du disque est symétrique !).

Dans le cas général, nous avons dû utiliser une méthode différente, inspirée de Bedford et Taylor [1], [2]. La solution u_z est alors définie comme la fonction extrêmale

$$u_z(\zeta) = \sup_v \{v(\zeta)\}, \tag{3.3}$$

où v décrit l'ensemble des fonctions psh ≤ 0 sur Ω telles que $v(\zeta) \leq \mathrm{Log}|\zeta-z| + O(1)$ quand ζ tend vers z ; l'idée initiale de cette méthode est due à Perron dans le cas $n = 1$ et à Bremermann [3] en plusieurs variables. Le fait que u_z vérifie dans ce cas l'équation $(dd^c u_z)^n = 0$ sur $\Omega\setminus\{z\}$ provient de ce que la solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur $(dd^c)^n$ est intuitivement la fonction psh qui a le moins possible de convexité. Nous ne disposons malheureusement en général d'aucun résultat de régularité pour la solution u_z, et nous ne savons pas non plus si u_Ω est symétrique ou non.

Une propriété fondamentale de la fonction u_Ω est son invariance par biholomorphisme. Plus généralement, on a le

<u>Théorème 3.4</u>. <u>Soit</u> $\Omega' \subset\subset X'$ <u>un ouvert hyperconvexe dans une variété de Stein</u> X', $n' = \dim_{\mathbb{C}} X'$, <u>et</u> $F : \Omega \to \Omega'$ <u>une application holomorphe</u>. <u>Alors pour tout</u> z, $\zeta \in \Omega$ <u>on a</u>

$$u_\Omega(z,\zeta) \geq u_{\Omega'}(F(z), F(\zeta)).$$

<u>Démonstration</u>. Soit $v(\zeta) = u_{\Omega'}(F(z),F(\zeta))$. Alors v est psh ≤ 0 sur Ω et

$$v(\zeta) = \mathrm{Log}|F(\zeta)-F(z)| + O(1) \leq \mathrm{Log}|\zeta-z| + O(1).$$

Par suite v est l'une des fonctions de l'enveloppe supérieure (3.3), d'où $u_\Omega(z,\zeta) \geq v(\zeta)$. ∎

4. MESURES PLURIHARMONIQUES ET NOYAU DE GREEN PLURICOMPLEXE.

Soit Ω un ouvert hyperconvexe connexe. Nous pouvons appliquer la construction des mesures $\mu_{\varphi,r}$ à la fonction $\varphi = \frac{1}{2\pi} u_z$. Le théorème 2.3 fournit alors sur $\partial\Omega$ une mesure $\mu_z = (2\pi)^{-n}\mu_{u_z}$, et comme $(dd^c\varphi)^n = \delta_z$, la masse totale de μ_z est égale à 1. En passant à la limite quand r tend vers 0, le théorème 1.3 implique la formule suivante : pour toute fonction psh $V \in C^0(\bar{\Omega})$, on a

$$(4.1) \qquad \mu_z(V) = V(z) + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\zeta\in\Omega} |u_z(\zeta)|\, dd^c V \wedge (dd^c u_z)^{n-1} .$$

Ceci entraîne en particulier $\mu_z(V) \geqslant V(z)$. Si V est pluriharmonique (i.e. si $dd^c V = 0$) on a de plus $\mu_z(V) = V(z)$. On voit donc que les mesures μ_z reproduisent les fonctions pluriharmoniques à partir de leurs valeurs sur $\partial\Omega$.

<u>Définition 4.2. On dira que</u> μ_z <u>est la mesure pluriharmonique du point</u> z <u>et que</u> $|u_z|\,(dd^c u_z)^{n-1}$ <u>est le noyau de Green du domaine</u> Ω.

Il est clair que ces objets sont invariants par toute application biholomorphe $F : \Omega \to \Omega'$ bicontinue jusqu'au bord. Les mesures μ_z vérifient d'autre part l'inégalité de Harnack suivante.

<u>Théorème 4.3. Pour tous</u> $x, y \in \Omega$, <u>on pose</u>

$$\delta_\Omega(x,y) = \limsup_{\zeta\to\partial\Omega} |\mathrm{Log}(u_x(\zeta)/u_y(\zeta))| .$$

<u>Alors</u> δ_Ω <u>est une distance compatible avec la topologie standard de</u> Ω <u>et invariante par les automorphismes analytiques de</u> Ω. <u>De plus, pour tous</u> x, $y \in \Omega$, <u>on a</u> :

$$e^{-n\delta_\Omega(x,y)}\mu_x \leqslant \mu_y \leqslant e^{n\delta_\Omega(x,y)}\mu_x .$$

<u>Démonstration</u>. Il est clair que $\delta_\Omega(x,y) = \delta_\Omega(y,x)$ et que δ_Ω satisfait l'inégalité triangulaire. Nous admettrons que δ_Ω est finie et continue sur $\Omega \times \Omega$ (ceci se démontre à partir de la formule (3.3) en vérifiant que u_z dépend continûment de z). Par définition de δ_Ω, on a

$$\limsup_{\zeta\to\partial\Omega} \frac{u_y(\zeta)}{u_x(\zeta)} = e^{\delta_\Omega(x,y)} .$$

Le théorème 2.4 entraîne alors l'inégalité $\mu_y \leqslant e^{n\delta_\Omega(x,y)}\mu_x$, et de même $\mu_x \leqslant e^{n\delta_\Omega(x,y)}\mu_y$. Il reste à vérifier que δ_Ω est séparée ; or $\delta_\Omega(x,y) = 0$ implique $\mu_x = \mu_y$, par suite $x = y$ puisque les fonctions pluriharmoniques séparent les points de X (la variété X est supposée de Stein). ∎

Exemple 4.4. Dans le cas où Ω est la boule unité $\mathbb{B}$ de $\mathbb{C}^n$, on vérifie aisément les formules suivantes :

$$u_{\mathbb{B}}(z,\zeta) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(1 - \frac{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2}{|1-\zeta.\bar{z}|^2}\right) ,$$

$$d\mu_z(\zeta) = \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\zeta.\bar{z}|^{2n}} \, d\sigma(\zeta) ,$$

où σ est la mesure d'aire normalisée sur la sphère $\partial\mathbb{B}$. Le noyau $d\mu_z(\zeta)$ est donc précisément le noyau de Poisson relatif au laplacien invariant de la boule. On vérifie également dans ce cas que la distance $\delta_{\mathbb{B}}$ coïncide (au facteur 2 près) avec les distances de Carathéodory et de Kobayashi $c_{\mathbb{B}}$ et $k_{\mathbb{B}}$. De façon précise, on a $\frac{1}{2}\delta_{\mathbb{B}} = c_{\mathbb{B}} = k_{\mathbb{B}}$, où

$$c_{\mathbb{B}}(x,y) = k_{\mathbb{B}}(x,y) = \operatorname{Arg\,tanh} \left(1 - \frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|1-x.\bar{y}|^2}\right)^{1/2} .$$

5. SUPPORT DES MESURES PLURIHARMONIQUES.

On suppose ici que $\Omega \subset\subset X$ est un ouvert faiblement pseudoconvexe de classe C^k , $k \geq 2$. D'après Diederich-Fornaess [7] , on sait qu'il existe un réel $\alpha \in \,]0,1]$ et une fonction $\rho \in C^k(\bar{\Omega})$ telle que $\rho = 0$ et $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$, $\rho < 0$ et $-|\rho|^\alpha$ psh sur Ω . La forme de Levi $dd^c\rho$ est ≥ 0 sur l'espace holomorphe tangent $HT(\partial\Omega)$, par conséquent $(dd^c\rho)^{n-1} \wedge d^c\rho$ est une $(2n-1)$ forme ≥ 0 sur $\partial\Omega$, nulle en dehors des points strictement pseudoconvexes. Il est donc naturel de se demander si les mesures pluriharmoniques μ_z sont portées par les points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$. C'est le cas sous des hypothèses convenables sur la fonction de définition ρ du domaine.

Théorème 5.1. *On suppose Ω de classe C^2 et ρ psh sur Ω . Alors pour tout $z \in \Omega$, il existe des constantes C_1 , $C_2 > 0$ telles que*

$$C_1(dd^c\rho)^{n-1} \wedge d^c\rho \leq \mu_z \leq C_2(dd^c\rho)^{n-1} \wedge d^c\rho$$

En particulier, μ_z est portée par l'ouvert de $\partial\Omega$ formé des points strictement pseudoconvexes.

Démonstration. D'après le théorème 2.4, il suffit de montrer l'existence de constantes C_3 , $C_4 > 0$ telles que $C_3\rho \leq u_z \leq C_4\rho$ au voisinage de $\partial\Omega$.

La majoration $u_z \leqslant C_4\,\rho$ résulte classiquement de l'inégalité de moyenne appliquée à u_z sur des disques tangents à $\partial\Omega$, de rayon fixé assez petit. Démontrons donc la minoration $u_z \geqslant C_3\rho$; cette inégalité suffit d'ailleurs pour obtenir la conclusion recherchée sur le support de μ_z . La variété X étant supposée plongée dans $\mathbb{C}^N$, notons $R = \sup_{\zeta\in\Omega}|\zeta - z|$, et soit $r < R$ assez petit pour que la boule $\{|\zeta-z|\leqslant r\}$ soit relativement compacte dans Ω . On pose alors

$$\begin{cases} v(\zeta) = \max(C\rho(\zeta),\ \mathrm{Log}|\zeta-z|/R) & \text{si} \quad |\zeta-z| > r \\ v(\zeta) = \mathrm{Log}|\zeta-z|/R & \text{si} \quad |\zeta-z| \leqslant r \end{cases},$$

où la constante $C > 0$ est choisie assez grande pour que $C\rho(\zeta) < \mathrm{Log}(r/R)$ sur $\{|\zeta-z| = r\}$. Alors v est psh $\leqslant 0$ sur Ω avec un pôle logarithmique au point z , donc $v \leqslant u_z$ d'après (3.3). En particulier, on a $u_z \geqslant C\rho$ au voisinage de $\partial\Omega$. ■

On peut peut également obtenir des renseignements sur le support de μ_z sous des hypothèses moins restrictives n'interdisant pas que α soit < 1 .

Théorème 5.2. *On suppose* Ω *de classe* C^3 *et* $-|\rho|^\alpha$ psh *sur* Ω . *Si* q *est un entier, on note* $U(q) \subset \partial\Omega$ *l'ouvert des points où la forme de Levi est de rang* $\geqslant q$. *Alors pour tout* $z \in \Omega$ *on a*

$$\mathrm{Supp}\ \mu_z \subset \overline{U(q)} ,$$

où q *est le plus grand entier* $< n\,\alpha$.

6. COMPORTEMENT DES MESURES μ_z LORSQUE z TEND VERS LE BORD.

Nous étudions ici la convergence des mesures μ_z lorsque z tend vers un point $a \in \partial\Omega$. Dans le cas des mesures harmoniques usuelles, on sait que μ_z converge vers la mesure de Dirac au point a . L'exemple d'un domaine Ω ayant un ouvert $\subset \partial\Omega$ où la forme de Levi est nulle montre que ce n'est pas toujours le cas dans la présente situation.
Rappelons d'abord quelques définitions classiques.

Définition 6.1. *On dira qu'un compact* $K \subset \partial\Omega$ *est pic (relativement aux fonctions psh continues) s'il existe* $V \in C^\circ(\overline{\Omega})$ *psh sur* Ω , *telle que* $V = 0$ *sur* K *et* $V < 0$ *sur* $\overline{\Omega}\setminus K$.

Il est facile de voir que toute intersection d'ensembles pics est pic ; la définition suivante est donc légitime.

Définition 6.2. *Si* K *est une partie compacte de* $\partial\Omega$, *on appelle enveloppe* pic de K le compact $\hat{K}$, intersection des ensembles pics contenant K.

Théorème 6.3. Lorsque z tend vers $a \in \partial\Omega$, la mesure μ_z converge faiblement vers 0 sur $\partial\Omega \setminus \widehat{\{a\}}$. Par conséquent μ_z converge vers δ_a dès que $\widehat{\{a\}} = \{a\}$, en particulier dès que a est un point strictement pseudoconvexe de $\partial\Omega$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une fonction psh V égale à 0 sur $\widehat{\{a\}}$ et < 0 sur $\overline{\Omega} \setminus \widehat{\{a\}}$. On a

$$V(z) \leqslant \mu_z(V) \leqslant 0$$

et $V(z)$ tend vers $V(a) = 0$ quand z tend vers a. Ceci entraîne bien que μ_z converge faiblement vers 0 sur $\partial\Omega \setminus \widehat{\{a\}}$. ∎

Corollaire 6.4. On suppose que pour tout point $a \in \partial\Omega$ il existe un point $b \in \partial\Omega$ tel que $\widehat{\{a\}} \cap \widehat{\{b\}} = \emptyset$. Alors la distance invariante δ_Ω est complète.

On observera que le corollaire 6.4 s'applique en particulier à tout ouvert Ω convexe ou de classe C^2 (dans ce dernier cas $\partial\Omega$ a des points strictement pseudoconvexes, et il suffit de prendre pour b l'un de ces points.)

Démonstration. Il suffit de prouver que les δ_Ω-boules sont relativement compactes dans Ω. Soit $x \in \Omega$ un point fixé ; supposons par l'absurde qu'il existe une suite y_k convergeant vers un point $a \in \partial\Omega$, telle que $\delta_\Omega(x,y_k) \leqslant R < +\infty$. Alors l'inégalité de Harnack donne $\mu_x \leqslant e^{nR}\mu_{y_k}$, et d'après le théorème 6.3 ceci implique que μ_x est à support dans $\widehat{\{a\}}$. Si on fait tendre z vers un point $b \in \partial\Omega$ tel que $\widehat{\{a\}} \cap \widehat{\{b\}} = \emptyset$, alors μ_z converge vers 0 sur $\partial\Omega \setminus \widehat{\{b\}}$, donc aussi sur $\widehat{\{a\}}$, ce qui est contradictoire. ∎

Dans le cas où Ω est strictement pseudoconvexe, le comportement asymptotique de $d\mu_z(\zeta)$ au voisinage de la diagonale dans $\Omega \times \partial\Omega$ peut être décrit de manière beaucoup plus précise.

Théorème 6.5. On suppose que Ω est strictement pseudoconvexe de classe C^2. Soit $\rho \in C^2(\overline{\Omega})$ une fonction d'exhaustion strictement psh < 0 sur Ω. Pour tout $z \in \Omega$, on définit une mesure positive ν_z sur $\partial\Omega$ en posant

$$d\nu_z(\zeta) = \frac{1}{(4\pi)^n} \frac{|\rho(z)|^n}{|J_\zeta^{2,0}\rho(z)|^{2n}} (dd^c\rho_\zeta)^{n-1} \wedge d^c\rho_\zeta , \quad \zeta \in \partial\Omega ,$$

où $J_\zeta^{2,0}\,\rho(z)$ désigne la partie holomorphe du jet d'ordre 2 de $\rho(z)$ au point $z=\zeta$:

$$J_\zeta^{2,0}\rho(z) = \sum_j \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j}(z_j-\zeta_j) + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_j\partial\zeta_k}(z_j-\zeta_j)(z_k-\zeta_k) .$$

Alors pour tout $\varepsilon>0$ et tout $A \geqslant 1$, il existe un réel $\eta = \eta(\varepsilon,A) > 0$ tel que pour $|\rho(z)|<\eta$ et $|\zeta-z| < A|\rho(z)|^{1/2}$ on ait

$$(1-\varepsilon)d\nu_z(\zeta) \leqslant d\mu_z(\zeta) \leqslant (1+\varepsilon)d\nu_z(\zeta) .$$

Dans le cas de la boule, on peut choisir $\rho_{\mathbb{B}}(z) = |z|^2-1$, de sorte que

$$J_\zeta^{2,0}\,\rho_{\mathbb{B}}(z) = \bar\zeta.(z-\zeta) = \bar\zeta.z - 1 , \qquad \forall\,\zeta\in\partial\mathbb{B} ;$$

d'après l'exemple 4.4, on a donc exactement $\mu_z = \nu_z$. Le cas d'un domaine Ω quelconque s'obtient à l'aide d'un encadrement de Ω par des boules osculatrices intérieures et extérieures ; l'estimation finale se démontre alors par un usage combiné des théorèmes 2.4 et 3.4.

7. MESURES CANONIQUES SUR LES POINTS EXTRÊMAUX D'UNE PARTIE CONVEXE COMPACTE DE $\mathbb{R}^n$.

Soit $K\subset\mathbb{R}^n$ une partie convexe compacte d'intérieur $\overset{\circ}{K}\neq\emptyset$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les mesures de Monge-Ampère fournissent une formule explicite permettant de représenter tout point de $\overset{\circ}{K}$ comme barycentre d'une mesure positive portée par l'ensemble des points extrêmaux de K (cf. le théorème de Choquet [4] , [12]).

Soit $x\in\overset{\circ}{K}$ un point fixé. On associe à x la fonction jauge p_x définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$p_x(\xi) = \inf\{\lambda>0 \ ;\ x+\frac{1}{\lambda}(\xi-x)\in K\} \quad , \ \xi\in\mathbb{R}^n .$$

La fonction p_x est convexe sur $\mathbb{R}^n$, positivement homogène de degré 1 relativement au pôle x , et on a $p_{x|\partial K}=1$. On introduit maintenant l'espace de Stein

$$X = (\mathbb{C}/i\mathbb{Z})^n \simeq \mathbb{R}^n + i\mathbb{T}^n$$

où $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qu'on considère comme une complexification de $\mathbb{R}^n$. On introduit également l'ouvert

$$\Omega = \overset{\circ}{K} + i\mathbb{T}^n \ ;$$

Ω est un ouvert pseudoconvexe relativement compact dans X (on notera que Ω n'aurait pas été relativement compact si on avait pris $X = \mathbb{C}^n$ et $\Omega = \overset{\circ}{K} + i\mathbb{R}^n$).
On définit maintenant une fonction psh continue $\tilde{p}_x$ sur X en posant

$$\tilde{p}_x(\zeta) = p_x(\xi) \ , \ \zeta = \xi + i\eta \ , \ \xi \in \mathbb{R}^n \ , \ \eta \in \mathbb{T}^n \ ,$$

de sorte que $\Omega = \{\zeta \in X \ ; \ \tilde{p}_x(\zeta) < 1\}$.

<u>Proposition 7.1.</u> <u>On a</u> $(dd^c\tilde{p}_x)^n = 0$ <u>sur</u> $X \setminus (x + i\mathbb{T}^n)$.

<u>Démonstration</u>. Il suffit, après régularisation, de vérifier le résultat lorsque K est de classe C^2 . Dans ce cas $p_x \in C^2(X \setminus (x + i\mathbb{T}^n))$, et on a les formules

$$(7.2) \qquad \begin{cases} d^c\tilde{p}_x = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\partial p_x}{\partial \xi_k}\, d\eta_k \\[2ex] dd^c\tilde{p}_x = \displaystyle\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\, d\xi_j \wedge d\eta_k \ , \end{cases}$$

$$(7.3) \qquad (dd^c\tilde{p}_x)^n = n!\ \det\left(\frac{\partial^2 p_x}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\right) d\xi_1 \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n \wedge d\eta_n \ .$$

Or p_x est linéaire sur la demi-droite affine $x + \mathbb{R}_+ . (\xi - x)$, donc $\xi - x$ est dans le noyau de la matrice $(\partial^2 p_x/\partial\xi_j\partial\xi_k)$; par suite $\det(\partial^2 p_x/\partial\xi_j\partial\xi_k) = 0$ pour $\xi \neq x$. ∎

Comme $\tilde{p}_x$ est invariante par les translations de $\mathbb{T}^n$, il en est de même pour $(dd^c\tilde{p}_x)^n$. On voit donc qu'il existe une constante $C = C(x,K) > 0$ telle que

$$(7.4) \qquad (dd^c\tilde{p}_x)^n = C\ \delta_x \otimes \sigma$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x dans $\mathbb{R}^n$ et σ la mesure d'aire invariante sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. D'après le § 1, on peut associer à $\tilde{p}_x$ la mesure de Monge-Ampère

$$(7.5) \qquad \tilde{\nu}_x = \mu_{\tilde{p}_x,1} = (dd^c \max(\tilde{p}_x,1))^n \ ,$$

qui est portée par $\partial\Omega = \partial K + i\mathbb{T}^n$. D'après (2.2) on a

$$\|\tilde{\nu}_x\| = \int_\Omega (dd^c\tilde{p}_x)^n = C \quad ;$$

comme $\tilde{\nu}_x$ est elle aussi invariante par les translations de $\mathbb{T}^n$, on voit qu'il existe une mesure $\nu_x \geqslant 0$ sur ∂K telle que $\tilde{\nu}_x = \nu_x \otimes \sigma$ et $C = \nu_x(\partial K)$. Pour toute fonction psh $V(\zeta) = V(\xi + i\eta)$ sur X , la formule de Lelong-Jensen 1.3 s'écrit maintenant

$$\int_{(\xi,\eta)\in\partial K\times\mathbb{T}^n} V(\xi+i\eta)\,d\nu_x(\xi)\,d\sigma(\eta)$$

$$= \nu_x(\partial K)\int_{\eta\in\mathbb{T}^n} V(x+i\eta)\,d\sigma(\eta) + \int_\Omega (1-\tilde{p}_x(\zeta))\,dd^cV\wedge(dd^c\tilde{p}_x)^{n-1} \ .$$

Choisissons en particulier pour V une fonction affine de ξ , indépendante de η . Nous obtenons

$$\nu_x(V) = \nu_x(\partial K).V(x)$$

quelle que soit V affine, d'où :

<u>Théorème 7.6. Le point</u> x <u>est barycentre de la mesure de probabilité</u> $m_x := (\nu_x(\partial K))^{-1}\nu_x$.

Lorsque K est de classe C^2 , on a $\tilde{\nu}_x = (dd^c\tilde{p}_x)^{n-1}\wedge d^c\tilde{p}_x$ et les formules (7.2) donnent $\tilde{\nu}_x = \nu_x \otimes (d\eta_1\wedge\ldots\wedge d\eta_n)$ avec

$$(7.7)\quad \begin{cases} d\nu_x(\xi) = (n-1)!\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell-1}\,\Delta_\ell(x,\xi)\,d\xi_1\wedge\ldots\widehat{d\xi_\ell}\ldots\wedge d\xi_n \\ \Delta_\ell(x,\xi) = \det\left(\dfrac{\partial^2 p_x}{\partial\xi_i\partial\xi_1},\ldots,\dfrac{\partial^2 p_x}{\partial\xi_i\partial\xi_{\ell-1}},\dfrac{\partial p_x}{\partial\xi_i},\ldots,\dfrac{\partial^2 p_x}{\partial\xi_i\partial\xi_n}\right) . \end{cases}$$

Dans ce cas, on sait que $\tilde{\nu}_x$ est portée par les points strictement pseudoconvexes de $\partial\Omega$; par conséquent ν_x est portée par les points strictement convexes de ∂K . Lorsque K est quelconque on peut utiliser des procédés de régularisation pour en déduire le théorème de support suivant.

<u>Théorème 7.8. Les mesures</u> ν_x <u>sont portées par l'ensemble</u> $E(K)$ <u>des points extrêmaux de</u> K .

Signalons pour terminer que les mesures ν_x admettent une interprétation géométrique simple. Grâce à la transformation par polaires de centre x , on associe à K le convexe dual

$$K_x^* = \{y' \in (\mathbb{R}^n)^* \ ; \ \forall x \in K \ , \ y'.(\xi-x) \leqslant 1\} \ .$$

K_x^* est une partie convexe compacte de $(\mathbb{R}^n)^*$ contenant 0 en son intérieur. Si A est une partie de ∂K , on note A_x^* l'ensemble des formes linéaires $y' \in \partial K_x^*$ telles que $H = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ y'.(y-x) = 1\}$ soit un hyperplan d'appui en un point $\xi \in A$. On définit enfin sur ∂K_x^* la mesure de volume radial θ en posant

$$\theta(A') = \mathrm{Vol}([0,1].A')$$

pour toute partie borélienne $A' \subset \partial K_x^*$, où Vol est le volume calculé relativement à la mesure de Lebesque de $(\mathbb{R}^n)^*$.

<u>Théorème 7.9.</u> <u>La mesure</u> ν_x <u>est donnée par</u>

$$\nu_x(A) = n \ ! \ \ \theta(A_x^*)$$

<u>pour toute partie borélienne</u> $A \subset \partial K$.

Lorsque K est strictement convexe de classe C^2 , la vérification est presque immédiate. L'hyperplan tangent en un point $\xi \in \partial K$ s'écrit en effet $\{y \in \mathbb{R}^n \ , \ dp_x(\xi).(y-x) = 1\}$, donc la transformation par polaires est donnée ici par l'application $\xi \to dp_x(\xi)$ de ∂K sur ∂K_x^* . Comme la mesure de volume radial sur ∂K_x^* est induite par la forme différentielle

$$\theta = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell-1} \ y'_\ell \ \ dy'_1 \wedge \ldots \widehat{dy'_\ell} \ldots \wedge dy'_n \quad ,$$

la formule (7.7) entraîne aussitôt que $\nu_x = n! \ (dp_x)^* \ \theta$. ■

BIBLIOGRAPHIE :

[1] E. Bedford and B.A. Taylor : The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère equation ; Invent. Math. 37 (1976), pp.1-44 .

[2] E. Bedford and B.A. Taylor : A new capacity for plurisubharmonic functions ; Acta Math. 149 (1982), pp.1-41 .

[3] H. Bremermann : On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains Characterization of Šilov boundaries ; Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), pp.246-276.

[4] G. Choquet : Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrêmaux dans les cônes convexes ; Sém. Bourbaki, exposé n°139, 15 p. , (Déc 1956).

[5] J.P. Demailly : Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines ; mémoire Soc. Math. France n°19 (nouvelle série), supplément au Bull. S.M.F., t.113 (1985).

[6] J.P. Demailly : Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques ; Prepub. Univ. de Grenoble I , Institut Fourier.

[7] K. Diederich and J.E. Fornaess : Pseudoconvex domains : bounded strictly plurisubharmonic functions ; Inv. Math. 39 (1977), pp. 129-141 .

[8] N. Kerzman and J.-P. Rosay : Fonctions plurisousharmoniques d'exhaustion bornées et domaines taut ; Math. Ann. 257 (1981), n°2 , pp.171-184 .

[9] M. Klimek : Extremal plurisubharmonic functions and invariant pseudo-distances ; Bull. Soc. Math. France 113 (1985), pp.123-142.

[10] L. Lempert : La matrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule ; Bull. Soc. Math. France 109 (1981), pp.427-474.

[11] L. Lempert : Solving the degenerate Monge-Ampère equation with one concentrated singularity ; Math. Ann. 263 (1983), pp. 515-532.

[12] R. Phelps : Lectures on Choquet's theorem ; Van Nostrand Math. Studies n°7 , Princeton, New-Jersey, 1966.

[13] J. Siciak : On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables ; Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), pp.322-357 .

[14] J. Siciak : Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^n$; Ann. Polon. Math. 39 (1981), pp. 175-211.

***