Y. Meyer

Minimalité de certains espaces fonctionnels et applications à la théorie des opérateurs

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 3, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

MINIMALITE DE CERTAINS ESPACES FONCTIONNELS ET APPLICATIONS A LA THEORIE DES OPERATEURS

par Y. MEYER

Exposé n°III

23 Octobre 1984

§ 1 INTRODUCTION.

Le premier espace fonctionnel que nous allons décrire n'est pas le plus important pour ce qui suit mais est sans doute le plus amusant. Considérons l'ensemble (que nous noterons S) de toutes les gaussiennes $g(x) = \exp(-\alpha|x-a|^2)$, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$. Nous désirons savoir ce que l'on obtient par combinaisons linéaires convexes des fonctions $\pm g(x)$, $g \in S$. Nous voulons décrire les résultats de ces combinaisons convexes $\Sigma \lambda_k g_k(x)$ $\Sigma|\lambda_k| \leqslant 1$, $g_k \in S$ en définissant une norme adaptée au problème. C'est à dire que les fonctions vérifiant $\|f\| \leqslant 1$ devraient pouvoir s'écrire $\Sigma\lambda_k g_k(x)$ où $\Sigma|\lambda_k| \leqslant 1$.

Jusqu'alors nous avons intentionnellement omis de préciser si les symboles Σ représentent des sommes finies ou des séries. Plaçons nous dans la première hypothèse : on appellerait E l'espace vectoriel de toutes les sommes finies $\Sigma c_i g_i(x)$ où les c_i sont des scalaires et $g_i(x) \in S$. On pose $\|\Sigma c_i g_i(x)\|_E = \Sigma|c_i|$ ce qui a un sens car l'écriture est unique. Ce premier point de vue conduirait à une situation pathologique : si $n = 1$, la suite $f_k(x) = \exp(-x^2)-\exp(-(x-1/k)^2)$ qui tend vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ne tendrait pas vers 0 dans E . Cela signifie que l'inclusion (souhaitée) de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Banach complété B de E ne saurait être continue. Donc B ne serait pas un espace fonctionnel, c'est à dire un espace de Banach B vérifiant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset B \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et tel que la norme de B rende continues ces deux injections.

Voici la découverte remarquable de Coifman et Weiss : tout s'arrange si l'on définit B comme l'espace vectoriel des fonctions $f \in C_o(\mathbb{R}^n)$ qui peuvent s'écrire $f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k g_k(x)$ où $\sum_0^\infty |\lambda_k| < +\infty$ et $g_k \in S$. Alors cette décomposition n'est plus unique et l'on pose

$$(1.1) \qquad \|f\|_B = \inf\{\sum_0^\infty |\lambda_k| \ ; \ f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k g_k(x) \text{ et } g_k \in S\} .$$

La borne inférieure est étendue à toutes les décompositions possibles de f . On a désigné par $C_o(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre de Banach de toutes les fonctions continues et nulles à l'infini. Si $g_1 \in S$ et $g_2 \in S$, alors $g_1(x)g_2(x)=C(1,2)g_3(x)$ où $0 < C(1,2) \leqslant 1$. Il en résulte que $B \subset C_o(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach. Les décompositions que l'on utilise pour calculer la norme (1.1) s'appellent (depuis les travaux de Coifman et Weiss) des décompositions atomiques ; les atomes sont ici les gaussiennes $g \in S$. Ils sont normalisés par $\|g\|_\infty = 1$. Nous verrons ensuite ce que l'on obtient avec d'autres normalisations.

Le théorème suivant, implicite chez plusieurs mathématiciens de l'Ecole de St. Louis (R. Coifman, G. Weiss et leurs collègues), a été explicité par Arazy et Fisher [1] .

Théorème 1. L'espace de Banach B défini par (1.1) est caractérisé par les propriétés suivantes

(1.2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset B \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et les deux injections sont continues

(1.3) si $f \in B$, $x_o \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, on a $f(x-x_o) \in B$, $f(tx) \in B$ et $\|f(x)\|_B = \|f(x-x_o)\|_B = \|f(tx)\|_B$

(1.4) tout espace de Banach E vérifiant (1.2) et (1.3) contient B .

Cette dernière condition s'appelle la propriété de minimalité. Il reste à identifier B avec un espace classique. Pour cela il convient de rappeler la définition des espaces de Besov homogènes.

Désignons par $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale dont la transformée de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ est portée par $\frac{1}{2} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{3}{2}$ et vérifie $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 1$. Désignons par Δ_j l'opérateur de convolution avec $\psi_j(x) = 2^{nj}\psi(2^j x)$. Alors une fonction f (ou une distribution modulo les polynômes en $x_1,\ldots,x_n$) appartient à $B_q^{s,p}$ si et seulement si $\|\Delta_j(f)\|_p = 2^{-sj}\varepsilon_j$ où $\varepsilon_j \in \ell^q(\mathbb{Z})$.

On a alors le complément essentiel du théorème 1 : l'espace de Banach B du théorème 1 coincide avec $B_1^{n,1}$. Il reste à analyser le rôle joué par les gaussiennes dans ce que l'on appellera maintenant la décomposition atomique (c'est à dire la décomposition (1.1)). Ce rôle est faible : on peut remplacer la fonction $e^{-|x|^2}$ par n'importe quelle fonction radiale (non identiquement nulle) $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On procède ensuite comme avec les gaussiennes en introduisant les fonctions $\theta(\alpha(x-x_o))$, $\alpha > 0$, $x_o \in \mathbb{R}^n$, et l'on a une décomposition atomique analogue à celle utilisant les gaussiennes.

En dimension 1, on peut même choisir la "fonction triangle" $\Delta(x) = (1-|x|)^+$ comme fonction de base. Si I est un intervalle(compact) de centre x_o et de longeur $2\ell > 0$, on pose $\Delta_I(x) = \left(1-\frac{|x-x_o|}{\ell}\right)^+$. Alors toute fonction $f \in B_1^{1,1}(\mathbb{R})$ s'écrit

(1.5) $$f(x) = \sum_I \lambda_I \Delta_I(x) \quad \text{où} \quad \sum_I |\lambda_I| < +\infty .$$

Par ailleurs $B_1^{1,1}(\mathbb{R})$ est caractérisé par la condition intégrale

(1.6) $$\int_0^\infty \| f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)\|_{L^1(dx)} \frac{dy}{y^2} < +\infty .$$

La situation est un peu plus compliquée dans $\mathbb{R}^n$; $\frac{dy}{y^2}$ doit être remplacé par $\frac{dy}{|y|^{2n}}$ ce qui rend l'intégrale (1.6) divergente. Il convient de remplacer $f(x) - \frac{1}{2}(f(x+y) + f(x-y))$ par $f(x) - f * \varphi_{|y|}$ où $\varphi_r = r^{-n}\varphi(x/r)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\int x^\alpha \varphi(x)dx = 0$ pour $1 \leqslant |\alpha| \leqslant n$ tandis que $\int \varphi(x)dx = 1$. Alors la condition d'appartenance à $B_1^{n,1}(\mathbb{R}^n)$ est

(1.7) $$\int_{\mathbb{R}^n} \| f(x) - f * \varphi_{|y|}(x)\|_{L^1(dx)} \frac{dy}{|y|^{2n}} < +\infty .$$

§ 2 MINIMALITE DES ESPACES DE BESOV $B_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$ LORSQUE $0 \leqslant s \leqslant n$.

Nous allons d'abord examiner le cas où $0 < s \leqslant n$. C'est à dire que nous considérons les espaces de Banach E fonctionnels ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et les deux injections sont continues) dont la norme vérifie les propriétés suivantes

(2.1) $$\| f(x-x_o)\|_E = \| f(x)\|_E \quad \text{pour tout } x_o \in \mathbb{R}^n$$

(2.2) $$\| t^{n-s} f(tx)\|_E = \| f(x)\|_E \quad \text{pour tout } t > 0 .$$

Alors un tel espace de Banach E contient automatiquement l'espace de Besov $B_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$. Plus précisément cet espace de Besov est engendré par une seule fonction $\chi \in B_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$. Il suffit de choisir χ telle que les diverses fonctions $\chi(t(x-x_o))$, $t > 0$, $x_o \in \mathbb{R}^n$, forment une partie totale dans $B_1^{s,1}$. S'il en est ainsi, la minimalité de l'espace entraîne que toute fonction $f \in B_1^{s,1}$ s'écrive

(2.3) $$f(x) = \sum \lambda_k t_k^{n-s} \chi(t_k(x-x_k))$$

où $t_k > 0$, $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Par exemple, on peut choisir pour χ la fonction ψ définissant la décomposition de Littlewood-Paley. Mais en dimension 1, on peut également choisir pour χ la fonction $\Delta(x)$ déjà décrite.

Le cas $s = 0$ est tout à fait différent. En effet l'espace minimal fonctionnel E vérifiant (2.1) et (2.2) avec $s = 0$ est l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$.

On modifie le problème posé. Soit $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle. On cherche alors les espaces de Banach E tels que

(2.4) $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \subset E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, les deux injections étant continues

(2.5) si $f(x) \in E$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $t > 0$, $t^n f(tx+x_0)$ appartient à E et $\| t^n f(tx+x_0)\|_E = \| f(x)\|_E$.

On a alors

<u>Théorème</u> 2. <u>Tout espace de Banach vérifiant</u> (2.4) <u>et</u> (2.5) <u>contient</u> $B_1^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ <u>et</u> $B_1^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ <u>vérifie</u> (2.4) <u>et</u> (2.5).

Là encore, on peut engendrer $B_1^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ à l'aide d'une seule fonction χ . Il suffit de choisir $\chi \in B_1^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_0^\infty |\hat{\chi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1$. Alors toute fonction $f \in B_1^{0,1}$ s'écrit $f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k\, t_k^n\, \chi(t_k x + x_k)$, $t_k > 0$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $\sum_0^\infty |\lambda_k| < +\infty$.

On peut, par exemple, choisir pour χ la fonction ψ définissant la décomposition de Littlewood-Paley. En dimension 1 , O'Neil choisit $\chi(x) = -1$ si $-\frac{1}{2} < x < 0$, $\chi(x) = 1$ si $0 < x < 1/2$ et $\chi(x) = 0$ sinon. Cela conduit, si $I = [a,b]$ et $|I| = b-a$, à définir l'atome spécial $\chi_I(x) = -\frac{1}{|I|}$ sur la moitié gauche de I , $\frac{1}{|I|}$ sur la moitié droite et $\chi_I(x) = 0$ ailleurs. Alors toute fonction $f(x) \in B_1^{0,1}$ s'écrit $f(x) = \Sigma\, \lambda_I\, \chi_I(x)$ où $\Sigma\, |\lambda_I| < +\infty$ (et réciproquement).

Si $0 < s < 1$ l'espace de Besov $B_1^{s,1}(\mathbb{R}^n)$ est défini par la condition intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \| f(x+y)-f(x)\|_1 \frac{dy}{|y|^{n+s}} < +\infty$ et il est donc relativement simple de vérifier qu'une fonction donnée appartient à $B_1^{s,1}$. Par exemple, si $n = 1$, toute fonction caractéristique d'intervalle appartient à $B_1^{s,1}$ lorsque $0 < s < 1$.

Si $s = 0$, cette caractérisation n'existe plus : l'intégrale correspondante diverge toujours à l'infini et comme nous allons le voir, sa convergence locale n'est pas nécessairement satisfaite par $f \in B_1^{0,1}$. Voici l'énoncé qui ressemble le plus à cette caractérisation absente.

Théorème 3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction ayant les propriétés suivantes

(2.6) $\int_{\mathbb{R}^n} \log(2+|x|)|f(x)|dx \leqslant 1$ et $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 0$

(2.7) $\int_{|y|\leqslant 1} \|f(x+y)-f(x)\|_{L^1(dx)} \frac{dy}{|y|^n} \leqslant 1$.

Alors f appartient à $B_1^{o,1}$ et $\|f\|_{B_1^{o,1}} \leqslant C_n$, constante ne dépendant que de n .

Ce résultat est optimal. Pour le voir, on part (si $n = 1$) de $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, d'intégrale égale à 1 et l'on pose $f_k(x) = \varphi(x-k)-\varphi(x+k)$. Un calcul très simple montre que $\|f_k\|_{B_1^{o,1}} \sim c \log k$ pour une constante $c > 0$.

Cependant $\|f_k(x+y)-f_k(x)\|_1 \leqslant 2\|\varphi(x+y)-\varphi(x)\|_1$ et la condition (2.7) est satisfaite (quitte à remplacer 1 par une constante numérique). Cela montre que (2.6) est optimale. Pour vérifier que (2.7) est optimale, on pose, avec les mêmes notations, $g_k(x) = k\varphi(k(x-1))-k\varphi(k(x+1)) = kf_k(kx)$. Alors $\|g_k\|_{B_1^{o,1}} = \|f_k\|_{B_1^{o,1}}$. Cette fois (2.6) est vérifiée de façon évidente tandis que $\|g_k(x+y)-g_k(x)\|_1 \leqslant C \inf(1,k|y|)$. Le fait que $\|g_k\|_{B_1^{o,1}} \sim c \log k$ vient donc de $\int_{1/k}^1 \frac{dy}{y} = \log k$.

Pour terminer cette présentation de l'espace $B_1^{o,1}$, il convient d'indiquer le lien avec les espaces de Bergman. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ le demi-espace supérieur défini par $t > 0$ et soit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ le laplacien complet. Considérons les fonctions $u(x,t)$ harmoniques dans Ω ($\Delta u = 0$), vérifiant $u(x,+\infty) = 0$ et telles que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1(\Omega;dx\otimes dt)$. Alors ces fonctions admettent des traces sur $t = 0$ et ces traces constituent l'espace $B_1^{o,1}(\mathbb{R}^n)$. Nous renvoyons à [2] pour une démonstration de la décomposition atomique dans ce cadre.

La théorie des opérateurs qui suit nous permettra de vérifier, de façon immédiate, que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1(\Omega;dx\otimes dt)$ pour $1\leqslant j \leqslant n$. Les transformations de Riesz $R_j : L^2(\mathbb{R}^n;dx) \to L^2(\mathbb{R}^n;dx)$ sont précisément définies par la propriété de transformer $\frac{\partial u}{\partial t}(x,o)$ en $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,o)$ et nous disposerons, dans le prochain paragraphe, d'un théorème beaucoup plus général de continuité sur $B_1^{o,1}$ des opérateurs d'intégrales singulières.

Pour terminer cette présentation, il importe de décrire l'espace dual $B_\infty^{o,\infty}(\mathbb{R}^n)$ de $B_1^{o,1}(\mathbb{R}^n)$. Il s'agit d'un espace quotient composé de distributions modulo les fonctions constantes ; en effet $B_1^{o,1}$ contient seulement les fonctions de test d'intégrale nulle. Une distribution $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (modulo les constantes) appartient à $B_\infty^{o,\infty}$ si et seulement si $\sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\Delta_j(S)\|_\infty < +\infty$. Enfin $B_\infty^{o,\infty}$ est caractérisé, parmi les espaces de Banach $E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathbb{R}$ (avec inclusion continue) par la propriété de maximalité suivante. Tout espace de Banach $E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathbb{R}$ dont la norme est invariante par translation et dilatation est inclus dans $B_\infty^{o,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et l'inclusion est continue.

§ 3 LA THEORIE DES OPERATEURS.

Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu. Le noyau-distribution $K(x,y)$ de T est la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ définie par $< Tf,g > = < K,f\otimes g >$ lorsque f et g appartiennent à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et lorsque $< .,. >$ sert à désigner la dualité entre fonctions de test et distributions en n ou $2n$ variables.

Soit G le groupe que l'on note usuellement "ax+b" . C'est à dire que $g \in G$ agit sur $x \in \mathbb{R}^n$ par $g(x) = tx + x_o$, $t > 0$, $x_o \in \mathbb{R}^n$. Appelons $U_g : L^2(\mathbb{R}^n;dx) \to L^2(\mathbb{R}^n;dx)$ l'isométrie définie par $(U_g f)(x) = t^{-n/2} f(\frac{x-x_o}{t})$.

<u>Définition</u> 1 . <u>Un amas d'opérateurs est une partie</u> $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ <u>possédant les deux propriétés suivantes</u> : <u>si</u> $T \in \mathcal{A}$, <u>l'adjoint de</u> T <u>appartient à</u> $\mathcal{A}$ <u>et, pour tout</u> $g \in G$, $U_g T U_g^{-1} \in \mathcal{A}$.

Par exemple, l'algèbre de tous les opérateurs linéaires continus sur $L^2(\mathbb{R}^n; dx)$ est un amas d'opérateurs.

Si l'on considère les noyaux $K(x,y)$ des opérateurs $T \in \mathcal{A}$, alors $t^n K(tx+x_o,ty+x_o)$, $t > 0$ et $x_o \in \mathbb{R}^n$ ainsi que $\overline{K}(y,x) = L(x,y)$ sont les deux transformations permises.

<u>Théorème</u> 4 . <u>Soit</u> $\psi \in \mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n)$ <u>une fonction radiale</u>, <u>d'intégrale nulle</u>, <u>non identiquement nulle et soit</u> $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ <u>un amas d'opérateurs</u>. <u>S'il existe</u>

<u>une constante</u> C <u>telle que pour tout</u> $T \in \mathcal{A}$, $T(\psi) \in B_1^{o,1}(\mathbb{R}^n)$ <u>avec</u> $\|T(\psi)\|_{B_1^{o,1}} \leqslant C$, <u>alors</u> $\mathcal{A}$ <u>est composé d'opérateurs continus sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Cet énoncé permet de réaliser le rêve de tout analyste : démontrer la continuité d'un opérateur en se limitant au calcul de l'action de cet opérateur sur une seule fonction (très régulière et très oscillante) ψ .
Le prix à payer est le calcul de la norme de $T(\psi)$ dans $B_1^{o,1}$. Mais c'est là que le théorème 3 intervient : plutôt que de calculer cette norme, on se contente de vérifier les conditions suffisantes données par le théorème 3.
Cette démarche a été inventée par G. Weiss (et R. Coifman). Ces auteurs remarquent que la théorie des opérateurs est particulièrement simple dès que l'on dispose de deux familles d'objets élémentaires pour engendrer un espace de Banach, par combinaisons convexes infinies. Ces deux familles s'appellent, dans les travaux de G. Weiss, des atomes et des molécules.
Tout opérateur transformant atomes en molécules est automatiquement borné sur l'espace. Dans le cas de $B_1^{o,1}$, les atomes sont les fonctions $t^n\ \psi(t(x-x_o))$ où $t > 0$ et $x_o \in \mathbb{R}^n$ tandis que les molécules sont les fonctions $t^n f(t(x-x_o))$ où f vérifie (2.6) et (2.7). La différence apparente entre les atomes et les molécules s'efface entièrement par combinaisons convexes infinies et la théorie des opérateurs bénéficie précisément de cette différence.

Le théorème 4 reste vrai si l'on remplace $B_1^{o,1}$ par $B_1^{s,1}$ avec $s > 0$. On peut même supposer que les différentes fonctions $T(\psi)$ forment, lorsque T décrit $\mathcal{A}$, une partie bornée de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors on montre sans peine que les noyaux-distributions $K(x,y)$ des opérateurs $T \in \mathcal{A}$ vérifient les estimations familières $|\partial_x^\alpha\ \partial_y^\beta\ K(x,y)| \leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$ lorsque $x \in \mathbb{R}^n$, $y \neq x$,$\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}^n$. En étant moins exigeant, on peut demander que les fonctions $T(\psi)$ parcourent un ensemble borné dans $B_1^{s,1}$ parce qu'elles vérifient les estimations uniformes $|g(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-n-\varepsilon}$ et $|g(x+y)-g(x)| \leqslant C|y|^{\varepsilon}(1+|x|)^{-n-\varepsilon}$ si $|y| \leqslant 1/2$. Pour $0< s< \varepsilon < 1$ ces conditions (vérifiées par $g = T(\psi)$) suffisent à assurer la continuité L^2 de tous les opérateurs $T \in \mathcal{A}$ et impliquent, pour les noyaux $K(x,y)$ des $T \in \mathcal{A}$, les célèbres conditions de Calderón-Zygmund

(3.1) $|K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n}$, $|K(x',y) - K(x,y)| \leqslant C|x'-x|^{\varepsilon}\ |x-y|^{-n-\varepsilon}$ si $|x'-x| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$ et $|K(x,y')-K(x,y)| \leqslant C|y'-y|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon}$ si $|y'-y| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$.

Notre utilisation du théorème 4 n'est pas très économique. Nous allons abaisser s et ε à être (pratiquement) nuls et appliquer le théorème 4 à un amas d'opérateurs $\mathcal{A}$ dont les noyaux-distributions $K(x,y)$ vérifient les conditions suivantes

(3.2) $\displaystyle\int_{R\leqslant|x-y|\leqslant 2R} |K(x,y)|\,dy \leqslant C$ et $\displaystyle\int_{R\leqslant|x-y|\leqslant 2R} |K(x,y)|\,dx \leqslant C$

pour une certaine constante $C \geqslant 0$ et tout $R > 0$

(3.3) $\displaystyle\int_{2^k|x'-x|\leqslant|x-y|\leqslant 2^{k+1}|x'-x|} |K(x',y)-K(x,y)|\,dy \leqslant \varepsilon(k)$ si $k \geqslant 1$

(3.4) $\displaystyle\int_{2^k|y'-y|\leqslant|x-y|\leqslant 2^{k+1}|y'-y|} |K(x,y')-K(x,y)|\,dx \leqslant \varepsilon(k)$ si $k \geqslant 1$

et $\displaystyle\sum_1^\infty k\,\varepsilon(k) < +\infty$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale, d'intégrale nulle, non identiquement nulle, dont le support est la boule $|x| \leqslant 1$. Appelons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ une seconde fonction radiale, égale à 1 sur la boule $|x| \leqslant 2$.

<u>Définition</u> 2. <u>Nous dirons qu'un opérateur</u> $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ <u>est faiblement d'ordre</u> 0 <u>s'il existe une constante</u> $C \geqslant 0$ <u>telle que</u>

(3.5) $\displaystyle\sup_{g\in G} |< U_g\ T\ U_g^{-1}(\psi),\ \varphi >| \leqslant C$ <u>et</u>

(3.6) $\displaystyle\sup_{g\in G} |< U_g\ T\ U_g^{-1}(\varphi),\ \psi >| \leqslant C$.

La définition essentielle est celle de "l'application symbole" .

<u>Définition</u> 3. <u>Soit</u> $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ <u>l'amas des opérateurs vérifiant</u> (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) <u>lorsque</u> $C \geqslant 0$ <u>est arbitraire et</u> $\varepsilon(k) \geqslant 0$ <u>est sujette à la seule condition que</u> $\displaystyle\sum_1^\infty \varepsilon(k) < +\infty$.

<u>Alors</u> <u>"l'application symbole"</u> <u>qui à</u> T <u>associe le couple</u> $(T(1), T^*(1))$ <u>est surjective de</u> $\mathcal{A}$ <u>sur</u> $B_\infty^{o,\infty} \times B_\infty^{o,\infty}$.

Cet énoncé suggère que $T(1)$ est défini comme une forme linéaire continue sur $B_1^{o,1}$. Puisque T décrit un amas $\mathcal{A}$, il suffit, en fait, de savoir définir $< T(1),\psi >$. La décomposition atomique de $B_1^{o,1}$ fera le reste. On pose $< T(1),\psi > = < 1,\ T^*(\psi) >$ et il convient de donner un sens à

l'intégrale de la distribution $T^*(\psi)$. Mais la restriction de cette distribution à $|x|>2$ coïncide avec celle d'une fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$ grâce à (3.3). Par ailleurs la décomposition $1 = \varphi(x) + r(x)$ où $r(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est effectivement portée par $|x|>2$ donne $< 1, T^*(\psi) > = < T(\varphi), \psi > +$ $\int_{\mathbb{R}^n} r(x) T^*(\psi)(x) dx$. Nous venons de donner un sens à $< 1, T^*(\psi) >$ et, en se servant de (3.6), on montre aisément que $T(1) \in B_\infty^{0,\infty}$. De même $T^*(1) \in B_\infty^{0,\infty}$.
Pour montrer que l' "application symbole" est surjective, on part de deux distributions arbitraires $u(x) \in B_\infty^{0,\infty}$ et $v(x) \in B_\infty^{0,\infty}$. Alors il existe un opérateur $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ dont le noyau-distribution vérifie

$$(3.7) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leqslant C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$$

qui est faiblement d'ordre 0 et tel que $T(1) = u(x)$, $T^*(1) = v(x)$.

Pour le voir, on suit J.M. Bony et l'on introduit S_j , $j \in \mathbb{Z}$, tel que $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$ puis l'on pose

$$L_u(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Delta_j(u)\, S_{j-3}(f), \quad f \in \mathcal{D}.$$

Il s'agit du célèbre para-produit de Bony. On vérifie immédiatement que le symbole de L_u est $(u,0)$ et que le noyau-distribution de L_u vérifie (3.7). On forme enfin $L_u + (L_v)^*$ dont le symbole est (u,v).

<u>Théorème</u> 5. <u>Soit</u> $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ <u>un opérateur dont le noyau-distribution vérifie</u> (3.2), (3.3) <u>et</u> (3.4) <u>avec</u> $\sum_1^\infty k\,\varepsilon(k) < +\infty$. <u>Alors une condition nécessaire et suffisante pour que</u> T <u>soit continu sur</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$ <u>est que</u> T <u>soit faiblement d'ordre</u> 0 <u>et que le symbole de</u> T <u>appartienne à</u> $BMO(\mathbb{R}^n) \times BMO(\mathbb{R}^n)$.

Montrons d'abord la partie directe. Si T est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors T est faiblement d'ordre 0 . Si, de plus, le noyau-distribution de T vérifie (3.2), (3.3) et (3.4) alors T et T^* transforment $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$; ce résultat est dû à J. Peetre. En particulier $T(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ et $T^*(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

En sens inverse, on utilise la surjectivité de l'application symbole. On part de $u \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Alors l'opérateur L_u de paraproduit est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ grâce à la caractérisation de BMO par les mesures de Carleson. Il en est de même de L_v et donc de $L_u + (L_v)^*$.
Finalement on examine $R = T - L_u - L_v^*$. Son noyau-distribution vérifie

(3.2), (3.3) et (3.4) et l'on a $R(1) = R^*(1) = 0$. L'ensemble $\mathcal{H}$ des opérateurs qui vérifient ces conditions est un amas et pour vérifier que tous les opérateurs $T \in \mathcal{H}$ sont continus sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, on calcule $T(\psi)$ (théorème 4) et l'on vérifie que $T(\psi)$ satisfait les conditions du théorème 3 . C'est alors (seulement) qu'intervient la "condition logarithmique" $\sum_1^\infty k\, \varepsilon(k) < +\infty$ et elle intervient précisément à cause du logarithme figurant dans le théorème 3 .

L'application du théorème 4 remplace l'usage du lemme de Cotlar (dont l'usage nécessitait $\sum_1^\infty \sqrt{\sum_{j\geq k} \varepsilon(j)} < +\infty$ alors que nous nous contentons de $\sum_1^\infty \sum_{j\geq k} \varepsilon(j) < +\infty$).

Il y a donc avantage à utiliser l'espace $B_1^{o,1}$ plutôt que le lemme de Cotlar qui "consomme plus de régularité" sur le noyau-distribution.

Dans une toute autre direction, plaçons nous dans les conditions plus traditionnelles suivantes $|K(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n}$, $|\frac{\partial}{\partial x_j} K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1}$ et $|\frac{\partial}{\partial y_j} K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1}$ pour $1 \leq j \leq n$. On se propose d'étudier la continuité sur divers espaces fonctionnels des opérateurs $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ dont les noyaux vérifient de telles estimations ; cette continuité est équivalente à l'appartenance du symbole de T à certaines classes de symboles.
Le théorème 5 est un premier exemple d'un tel programme. P.G. Lemarié a étudié la continuité des opérateurs $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ qui sont faiblement d'ordre 0 , dont les noyaux-distributions vérifient $|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}$ et $|\frac{\partial}{\partial x_j} K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1}$ et tels que $T(1) = 0$.

Ces opérateurs sont alors continus sur les espaces de Besov $B_q^{s,p}$ lorsque $0 < s < 1$, $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$. Cela signifie qu'il existe un espace $BMO(s;p,q)$ tel que $T(1) \in BMO(s;p,q)$ et la continuité de $T : B_q^{s,p} \to B_q^{s,p}$ soient équivalentes (modulo les hypothèses déjà mentionnées sur le noyau et la propriété d'être faiblement d'ordre 0) Martin Meyer étudie ces espaces.
La situation où $s = 0$ est plus compliquée : on a alors besoin du symbole complet $(T(1), T^*(1))$ de T et Martin Meyer étudie les espaces fonctionnels qui apparaissent.
Pour terminer donnons une application très utile du théorème 5 . Soit $K(x,y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ privé de la diagonale $y = x$ et qui satisfait les estimations suivantes

$|K(x,y)| \leqslant |x-y|^{-n}$, $|\frac{\partial}{\partial x_j} K(x,y)| \leqslant M|x-y|^{-n-1}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $M \geqslant 2$ et

$K(y,x) = - K(x,y)$ pour tout $x \neq y$.

La distribution $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{1}_{\{|x-y| \geqslant \varepsilon\}} K(x,y) = \text{v.p. } K(x,y)$ a un sens et définit un opérateur T .

<u>Théorème</u> 6 . <u>Avec les notations ci-dessus, il existe une constante</u> $C(n)$ <u>ne dépendant que de la dimension</u> n <u>telle que</u>

$$\|T\|_{L^2,L^2} \leqslant C(n) \{\|T(1)\|_{BMO} + (\log M)^2 \}.$$

En effet, avec les notations du théorème 5 , $\sum_1^\infty k\ \varepsilon(k) \leqslant C(\log M)^2$ comme le montre un simple calcul.

Nous ne savons pas si $(\log M)^2$ est optimal ; sans doute $\log M$ est l'estimation correcte.

Remarquons que dans les applications du théorème 6, le terme $\|T(1)\|_{BMO}$ est le plus important.

Considérons par exemple le cas où $n = 1$ et où $K(x,y)=\{x-y+i(\phi(x)-\phi(y))\}^{-1}$ avec $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne et $-M \leqslant \phi'(x) \leqslant M$. Alors Ph. Tchamitchian vient de montrer (en améliorant des techniques dues à G. David et T. Murai) que $\|K\|_{L^2,L^2} \leqslant CM$ (si $M \geqslant 2$) .

REFFERENCES :

[1] J. Arazy and S. Fisher, Some aspects of the minimal Möbius-invariant space of analytic functions on the unit disc. Lecture Notes 1070. Edited by M. Cwikel and J. Peetre. Springer-Verlag (1984).

[2] R. Coifman, R. Rochberg, M. Taibleson and G. Weiss. Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p . Astérisque 77. Société Mathématique de France (1980)

[3] G. David and J.L. Journé, A boundedness Criterion for generalized Calderón-Zygmund operators. A paraître aux Annals of Mathematics.

[4] M. Frazier and B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces.Preprint (Washington-University, St Louis, MO 63130).

[5] S. Janson and J. Peetre, Higher order commutators of singular integral operators. Lecture Notes 1070.

[6] Y. Meyer, Le lemme de Cotlar et Stein et la continuité L^2 des opérateurs définis par des intégrales singulières. Coll. L. Schwartz. Astérisque. Société Mathématique de France. A paraître (≃ Jan. 1985).

[7] Y. Meyer, Les nouveaux opérateurs de Calderón-Zygmund, Coll. L. Schwartz. Astérisque.

[8] R.O' Neil, Spaces formed with special atoms. Supplemento ai Rendiconti del Circulo Matematico di Palermo. Serie II Numero 1 (1981).

[9] J. Peetre, New thoughts on Besov spaces. Duke Univ. Math. Series I , Dept. Math. Duke U , Durham, N.C. (1976)

***