Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Yger

C. A. Berenstein

Traitement du signal et algorithmes explicites de déconvolution

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. nº 2, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

TRAITEMENT DU SIGNAL ET ALGORITHMES EXPLICITES DE DECONVOLUTION

par A. YGER - C.A. BERENSTEIN

Exposé n° II

23 Octobre 1984

§ 1 . INTRODUCTION : QU'EST CE QUE LE PROBLEME DE LA DECONVOLUTION ?

C'est à partir d'un exemple emprunté aux techniques de traitement d'image que nous allons présenter le problème mathématique dont nous nous préoccupons ici ; cet exemple est tiré de [8] .

Supposons qu'une image se déplaçant dans le plan à une vitesse v dans la direction de l'axe x'O x soit enregistrée photographiquement pendant une durée d'exposition T . Désignons par H(x,y) la distribution d'irradiance de l'image originelle dans le plan rapporté à l'origine ; le cliché photographique nous fournit la connaissance non pas de H , mais de la convolée de H avec la mesure à support compact définie par :

$$\begin{cases} \mu(x,y) = (v\,T)^{-1}\ \delta(y) & , \ -\frac{1}{2}\,v\,T \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\,v\,T \\ \mu(x,y) = 0 & , \ |x| > \frac{1}{2}\,v\,T \end{cases}$$

Voyons les choses du point de vue transformation de Fourier ; en théorie, on disposerait de la connaissance de $\hat{H}\,.\,\hat{\mu} = \hat{\Phi}$ (on suppose ici que H est une distribution à support compact) et l'on pourrait récupérer notre image originelle $\hat{H}$ en posant :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\Phi}}{\hat{\mu}} \quad .$$

Malheureusement, on ne connait pas en fait $\mu * H$, mais $\mu * H + N$ où N est une erreur expérimentale liée, dans notre exemple, aux radiations de l'environnement extérieur, au grain de l'émulsion photographique, etc... Il faudrait en fait utiliser un langage probabiliste pour rendre compte de N et nous y reviendrons. Si nous restons pour l'instant sur un terrain déterministe, contentons nous de remarquer que le quotient

$$\frac{\hat{N}}{\hat{\mu}}$$

sera source de nombreux problèmes du fait de la présence des zéros de la fonction $\hat{\mu}$.

Imaginons, toujours sur cet exemple, que l'on fasse simultanément plusieurs clichés de notre image H , toujours animée du même mouvement, avec des temps d'exposition différents T_1 , $T_2,\dots,T_n$: nous connaîtrons donc

(1) $$\tilde{H}_j = \mu_j * H + N_j \ , \ j = 1,\dots,m$$

où N_1 , $N_2,\dots,N_m$ correspondent à des erreurs expérimentales, et où $\mu_1,\dots,\mu_m$ correspondent aux divers temps d'exposition $T_1,\dots,T_m$.

Le problème mathématique de la déconvolution consiste précisément, étant données m distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$, $\mu_1,\dots,\mu_n$, à voir sous quelles conditions il existe m distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$, telles que :

(2) $$\delta = \mu_1 * \nu_1 + \dots + \mu_m * \nu_m$$

La solution théorique à ce problème est connue depuis les travaux de Hörmander [9], de Kelleher-Taylor [10]; mieux, lorsque les conditions d'existence de $\nu_1,\dots,\nu_m$ sont remplies, des formules explicites pour $\hat{\nu}_1,\dots,\hat{\nu}_m$ peuvent être déduites des formules de division dans $\mathbb{C}^n$ données par Andersson-Berndtsson dans [2] . Lorsque nous disons "explicites", nous signifions que les distributions $\nu_1,\dots,\nu_m$ doivent être données, non par leurs transformées de Fourier, mais par des formules où n'interviennent que les opérations de dérivation, d'intégration, de convolution et de sommation.

Pourquoi un tel souci ? Essentiellement pour deux raisons : la première est qu'au travers des techniques de filtrage holographique (nous pensons en particulier à la réalisation de filtres dérivateurs ou intégrateurs, [11], chapitre VII), la conception d'appareils réalisant la déconvolution, en l'occurence ici la convolution par $\nu_1,\dots,\nu_m$ apparaît raisonnablement possible ; la seconde est que la connaissance de $\nu_1,\dots,\nu_m$ sous forme explicite permet - tout au moins théoriquement - de déconvoler localement sans avoir à passer par la transformation de Fourier du signal global sur lequel on travaille ; l'une des manières de visualiser cette idée est de penser à la correction locale d'une image bidimensionnelle brouillée pour une raison où une autre, connaissant bien sûr (ce qui est tout de même un peu idéal !) la mesure attachée à la turbulence.

Lorsque l'on sort du cadre des équations aux dérivées partielles, où le problème de la déconvolution correspond, via la tranformation de Fourier, au théorème de Bezout, l'une des situations les plus intéressantes est, dans la pratique, celle où les opérateurs de convolution attachés à $\mu_1,\ldots,\mu_m$ correspondent à des prises de moyenne sur des domaines géométriques simples de $\mathbb{R}^n$. On peut penser ici aux techniques de tomographie, ne serait-ce que de manière assez indirecte : la détection ponctuelle du rayonnement émis par un organe étant une opération souvent coûteuse au niveau de l'appareillage qu'elle nécessite, on peut lui préférer une détection moins précise, "en moyenne", quitte à pouvoir corriger par la suite le résultat pour récupérer l'information que l'on cherche, c'est à dire ici la transformée de Radon de la fonction caractéristique de l'organe en question. On peut également songer aux techniques de gammagraphie par codage annulaire,[4][5] , où les convolutions avec des fonctions caractéristiques d'ensembles s'introduisent de manière naturelle. Là toutefois le phénomène n'est pas déterministe et ce que l'on capte est en fait un bruit poissonnien d'émission, sur lequel l'action des déconvoluteurs est susceptible de poser problème ; nous évoquerons ces problèmes dans la conclusion de cet exposé.

Donnons maintenant le plan que nous suivrons : nous donnerons dans la partie II le résultat théorique général concernant la déconvolution et nous rappellerons les formules de division dans $\mathbb{C}^n$ données par Andersson-Berndtsson et surtout la manière dont elles sont construites (et éventuellement adaptables dans l'optique qui nous intéresse). Nous énoncerons dans la partie II un théorème nous donnant, dans le cas de n variables (pour éviter des lourdeurs d'écriture, nous nous contenterons de $n = 2$) des conditions suffisantes assurant l'existence d'une formule de déconvolution explicite ; l'intérêt ne résidera pas tant dans la formule elle-même que dans les deux exemples que nous proposons et qui sont issus d'idées relatives au traitement de l'image. Enfin la dernière partie sera là pour nous montrer que le prix à payer pour récupérer de vraies formules de déconvolution est tout de même lourd, puisqu'il faut bien que les transformées de Fourier $\hat{\nu}_1,\ldots,\hat{\nu}_m$ des distributions $\nu_1,\ldots,\nu_m$ intervenant dans (2) aient, dans $\mathbb{C}^n$, une croissance à l'infini qui compense, lorsque $\mu_1,\ldots,\mu_m$ sont par exemple des fonctions indicatrices d'ensembles convexes, la décroissance en $\|Z\|^{-n}$ des fonctions $\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_m$; les distributions $\nu_1,\dots,\nu_m$ seront des distributions d'ordre strictement positif ; leur action sur des bruits considérés comme stationnaires posera problème : revenons à l'exemple :

$$\begin{cases} \mu_1(x,y) = (v\ T_1)^{-1}\delta(y) \\ \mu_2(x,y) = (v\ T_2)^{-1}\delta(y) \end{cases}$$

qui est à notre connaissance le seul exemple étudié dans la littérature (et il l'a été complètement et même très en détail par Meirsters et Richtmyer [12] , [14]) ; l'utilisation, lorsqu'ils existent de deux déconvoluteurs ν_1 et ν_2 (forcément d'ordre 2 d'après [12]) nous permettra d'écrire, en reprenant les notations de (1) :

(3) $$H = \nu_1 * \tilde{H}_1 + \nu_2 * \tilde{H}_2 - (\nu_1 * N_1 + \nu_2 * N_2) .$$

La question qui se pose et que nous nous contenterons d'évoquer en conclusion est celle de l'action de ν_1 et ν_2 sur N_1 et N_2 .

§ II L'OUTIL MATHEMATIQUE ET LA FABRICATION DE FORMULES DE DECONVOLUTION EN TERMES DES TRANSFORMEES DE FOURIER

II.1 Notations et rappels fondamentaux

On rappelle que l'algèbre de convolution $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est isomorphe, via la transformation de Fourier, à l'algèbre multiplicative

$$A_p(\mathbb{C}^n) = \{F,\ F \text{ entière dans } \mathbb{C}^n\ ,\ \exists\ C > 0,\ \forall \zeta \in \mathbb{C}^n\ ,\ |F(\zeta)| \leq Ce^{Cp(\zeta)}\}$$

où p désigne le poids plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^n$ défini par :

(4) $$p(\zeta) = \mathrm{Log}(1+\|\zeta\|) + \|\mathrm{Im}\zeta\| = \mathrm{Log}(1+ (\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^2)^{1/2}) + (\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{Im}\zeta_j|^2)^{1/2} .$$

Par cet isomorphisme, le problème de la déconvolution se ramène à un problème du type problème de Bezout, à savoir qu'étant donnés m éléments de $A_p(\mathbb{C}^n)$, $F_1,\dots,F_m$, on cherche à déterminer m éléments $G_1,\dots,G_m$ de $A_p(\mathbb{C}^n)$ tels que :

(5) $$F_1G_1 +\dots+ F_mG_m \equiv 1$$

D'après Hormander [9], Kelleher-Taylor [10], Skoda [15], dire que ce problème admet une solution est équivalent à l'énoncé suivant :

(6) $$\exists\, \kappa > 0,\ \exists\, K > 0,\ \forall\, \zeta \in \mathbb{C}^n\ ,\ \sum_{\ell=1}^{m} |F_\ell(\zeta)| \geqslant \kappa\, e^{-K\,p(\zeta)}$$

La solution au problème, lorsqu'elle existe, est construite à l'aide des techniques classiques du résolution du $\bar{\partial}$ de Hörmander. Elle n'est pas explicite en termes de distributions ; d'ailleurs les fonctions $G_1,\dots,G_m$ dont on prouve l'existence ne sont, de part la technique employée, pas non plus explicites comme éléments de $A_p(\mathbb{C}^n)$.

II 2 Construction élémentaire de formules de déconvolution explicites dans le cas d'une variable.

Dans le cas d'une variable, il existe un moyen très simple, sous des hypothèses un peu plus fortes que les hypothèses (6), pour construire, étant donnés deux éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, μ_1 et μ_2 , une paire de déconvoluteurs $(\nu_1^o\ ,\ \nu_2^o)$ associée ; remarquons d'ailleurs ici que, puisque $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ n'ont nécessairement aucun zéro commun, toutes les solutions dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, du problème (2), sont données par :

$$\begin{cases} \nu_1 = \nu_1^o - \mu_2 * \tau \\ \nu_2 = \nu_2^o + \mu_1 * \tau \end{cases}$$

où τ décrit $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

Nous faisons dans cette section les hypothèses (H1), (H2), (H3), (H4) sur la paire $(\mu_1,\ \mu_2)$ avec laquelle nous travaillons ; ces hypothèses sont les suivantes :

(H1) C'est la condition de Hörmander (6) sans laquelle la recherche de déconvoluteurs est impossible ;

(H2) On suppose que $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ n'ont que des zéros simples et que de plus, il existe deux constantes ε , L telles que

$$\hat{\mu}_j(\zeta) = 0 \Rightarrow |\mu_j'(\zeta)| \geqslant \frac{\varepsilon}{(1+|\zeta|)^L}\quad ,\ j = 1,2\ ;$$

(H3) Il existe une suite de nombres réels positifs $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n\to\infty}(r_n) = +\infty$, une suite de courbes de Jordan $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout n , Γ_n soit incluse dans l'intérieur de Γ_{n+1} , une constante positive

λ et un entier positif M avec

(i) sur Γ_n $|\zeta| \sim r_n$ et longueur $(\Gamma_n) = O(r_n)$

(ii) $|\zeta^M \hat{\mu}_1(\zeta)\, \hat{\mu}_2(\zeta)| \geqslant \lambda(1+|\zeta|\ )$

(H4) $\exists\ T > 0,\ \hat{\mu}_1(\zeta)\ \hat{\mu}_2(\zeta) = 0 \Rightarrow |\mathrm{Im}\zeta| \leqslant T(1+\mathrm{Log}(1+|\zeta|))$.

Remarque 1 : La condition H1 peut être affaiblie ; on peut remplacer H1 par l'hypothèse H_1' suivante :

(H'1) $\exists \varepsilon' > 0\ , \exists L' > 0\ ,\ \hat{\mu}_j(\zeta) = 0 \Rightarrow |\hat{\mu}_i(\zeta)| \geqslant \varepsilon\, e^{-Lp(\zeta)}, \text{si } i \neq j\ ,\ j = 1,2$.

Remarque 2 : La simplicité des zéros de $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\mu}_2$ n'est pas indispensable ; on peut remplacer H2 par l'hypothèse H'2 suivante :

(H'2) $\exists\ \varepsilon > 0,\ \exists\ L > 0\ ,\ \hat{\mu}_j(\zeta) = 0 \Rightarrow |\hat{\mu}_j^{(m(\zeta))}(\zeta)| \geqslant \varepsilon\, e^{-Lp(\zeta)},\ j = 1,2$

où $m(\zeta)$ désigne la multiplicité du zéro ζ considéré, comme zéro de $\hat{\mu}_1$ ou de $\hat{\mu}_2$.

Théorème 1 [1] (A) Sous les hypothèses (H'1) (H2) (H3) (H4), il existe un entier q supérieur ou égal à M , un polynôme P de degré $q-1$ et deux mesures ν_1 et ν_2 telles que :

$$\forall\ z \in \mathbb{C}\ ,\ 1 = z^q(\hat{\mu}_1(z)\ \hat{\nu}_1(z) + \hat{\mu}_2(z)\ \hat{\nu}_2(z)) + \hat{\mu}_1(z)\ \hat{\mu}_2(z)P(z)$$

avec

$$P(z) = \operatorname*{Res}_{\zeta=0} \left(\frac{z^{q-1}+\zeta z^{q-2}+\ldots+\zeta^{q-1}}{\zeta^q \hat{\mu}_1(\zeta)\hat{\mu}_2(\zeta)} \right)$$

et, pour toute fonction test φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \nu_1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \varphi(u) \sum_{F_2(\beta)=0} \frac{1}{\beta^q F_1(\beta) F_2'(\beta)}\ e^{i\beta(u-t)} du \right) d\mu_2(t)$$

$$\langle \nu_2, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \varphi(u) \sum_{F_1(\alpha)=0} \frac{1}{\alpha^q F_2(\alpha) F_1'(\alpha)}\ e^{i\alpha(u-t)} du \right) d\mu_1(t)$$

(B) <u>Sous les hypothèses</u> H'1, H'2, H3, <u>on peut également construire une solution explicite en termes des distributions au problème</u> (1).

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème des résidus ; n étant fixé, et z étant un point de l'intérieur du domaine borné D_n limité par D_n , on écrit la formule de Cauchy sous la forme suivante :

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{\omega(z)-\omega(\zeta)}{\omega(\zeta)(z-\zeta)} \, d\zeta - \frac{\omega(z)}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\omega(\zeta)(z-\zeta)}$$

où $\omega(\zeta) = \zeta^q \, \hat{\mu}_1(\zeta) \, \hat{\mu}_2(\zeta)$, avec q correctement choisi de manière à ce que les séries qui apparaîssent lorsque, par le théorème des résidus, on transforme ces intégrales soient convergentes dans $A_p(\mathbb{C})$.

<u>Remarque 3</u> : Nous n'expliciterons pas ici la solution au problème (1) lorsque (H1, H2, H3, H4) sont remplaçées par (H1, H'2, H3) ; il faut tenir compte des multiplicités et faire intervenir dans ω une fonction du type $\sin(A\zeta)$ où A est correctement choisi. Nous n'insisterons pas plus ici car nous allons envisager ces problèmes de manière plus générale dans le cadre de plusieurs variables.

Ce théorème nous permet d'étudier également le cas où μ_1 et μ_2 sont deux distributions radiales dans $\mathbb{R}^2$; le cas où μ_1 et μ_2 sont les fonctions caractéristiques de deux disques de rayons respectifs R_1 et R_2 tels que le quotient $\frac{R_2}{R_1}$ soit un nombre entier compris entre 2 et 200 a par exemple été développé dans [1] ; on peut également envisager sous cet angle dans le plan le théorème deux rayons de Delsarte lorsque le quotient ρ des rayons est choisi tel que les fonctions $J_o(z) - 1$, $J_o(\rho z) - 1$ n'aient pas de zéros communs autres que 0 . Dans tous ces exemples, la vérification des hypothèses se fait à la main, en utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Bessel ainsi que des formules de Mac Mahon avec estimation du reste comme on en trouve par exemple dans [6]. Cependant le fait que l'on ne dispose d'aucun renseignement sur la nature des quotients de zéros de fonctions de Bessel très simples (on ignore par exemple si un quotient de deux zéros distincts de J_1 ou de J_o peut être entier !) nous oblige, comme dans [1] à avoir recours à des méthodes numériques.

II 3 <u>Les formules d'Andersson-Berndtsson</u>

Le théorème 1 que nous venons de prouver ne s'applique en fait

Que dans le cas d'une variable, le nombre d'éléments $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ étant égal à 2. Nous voudrions tenter de fabriquer une version analogue de ce théorème, dans le cas de n variables et de $n+1$ éléments μ_j ; nous verrons qu'en fait, le nombre d'éléments μ_j importe peu, pourvu qu'il dépasse n . Remarquons d'ailleurs que dans le cas de $n = 1$, $\mu_1, \dots, \mu_m$ désignant m mesures, nous ne savons pour l'instant pas trouver de déconvoluteurs explicites. C'est à ces problèmes que nous nous attaquons maintenant.

Pour généraliser à plusieurs variables le théorème 1 de la section II 2, il nous faut tout d'abord remplacer la formule de Cauchy par la formule de Koppelman : il nous faut construire, pour un domaine borné D , à frontière C^1 dans $\mathbb{C}^n$, deux noyaux K et P , formes différentielles de types respectifs $(n,n-1)$ et (n,n) en les variables $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, tels que l'on ait, pour toute fonction de classe C^1 sur $\overline{D}$, pour Z intérieur à D :

$$(7)\quad u(Z) = \frac{-1}{n!(2i\pi)^n}\left(\int_{\partial D} u(\zeta)K(Z,\zeta) - \int_D \overline{\partial}u(\zeta)\wedge K(Z,\zeta) - \int_D u(\zeta)P(Z,\zeta)\right)$$

Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la construction de Andersson - Berndtsson ; cette construction de formules avec poids s'inspire de la représentation du noyau de Bergman comme opérateur Fourier Intégral par Boutet de Monvel et Sjöstrand.

Nous utiliserons le résultat suivant :

Théorème (Andersson - Berndsson)[2] Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$ à frontière C^1 ; soit $\vec{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ une fonction de $\overline{D} \times \overline{D}$ dans $\mathbb{C}^n$, telle que pour tout ζ dans $\overline{D}$, $Q(\zeta,.)$ soit holomorphe dans D ; si l'on pose

$$Q(Z,\zeta) = \sum_1^n Q_j\, d\zeta_j$$

$$s(Z,\zeta) = \sum_1^n (\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)d\zeta_j$$

la formule (7) est valable avec :

$$(8)\qquad K_{\vec{Q}} = -\exp\langle Q,\zeta - Z\rangle \sum_{k=o}^{n-1} \frac{n!}{k!}\, \frac{s\wedge(\overline{\partial}s)^{n-1-k}\wedge(\overline{\partial}Q)^k}{\|\zeta - Z\|^{2(n-k)}}$$

$$(9)\qquad P_{\vec{Q}} = \exp\langle Q,\zeta - Z\rangle\, (\overline{\partial}Q)^n$$

<u>où</u> $$< Q , u > = \sum_1^n Q_j u_j \ , \ u \in \mathbb{C}^n \ .$$

<u>Remarque 4</u> : Dans le cas où $Q \equiv 0$, on retrouve, pour les fonctions holomorphes au voisinage de $\overline{D}$, la formule de représentation de Cauchy-Leray :

$$u(Z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\partial D} u(\zeta) \ \frac{s \wedge (\bar{\partial} s)^{n-1}}{\| \zeta - Z \|^{2n}} \ .$$

L'idée de Berndtsson-Andersson pour introduire des poids supplémentaires est ingénieuse.Ils considèrent plusieurs fonctions $\vec{Q}^{(1)}$, $\vec{Q}^{(2)},\ldots,\vec{Q}^{(N)}$ satisfaisant aux hypothèses du théorème et des distributions $g_1,\ldots,g_N$, à support compact dans $[0,\infty[$, dont les transformées de Laplace $G_1,\ldots,G_N$ satisfaisont $G_1(1) =\ldots= G_N(1) = 1$. La formule (7) reste valable avec

$$K = \int_o^\infty \ldots \int_o^\infty K_{\lambda_1 \vec{Q}^{(1)}+\ldots+\lambda_N \vec{Q}^{(N)}} \ g(\lambda_1)\ldots g(\lambda_N) d\lambda_1 \ldots d\lambda_N$$

$$P = \int_o^\infty \ldots \int_o^\infty P_{\lambda_1 \vec{Q}^{(1)}+\ldots+\lambda_N \vec{Q}^{(N)}} \ g(\lambda_1)\ldots g(\lambda_N) d\lambda_1 \ldots d\lambda_N$$

Mais en fait la formule reste valable pour des paires $(\vec{Q}^{(j)},G_j)$, $j = 1,\ldots,N$, où G_j est une fonction entière, telle que $G_j(1) = 1$ (fonction que l'on approchera par des transformées de Laplace).

La formule (7) reste donc valable avec :

$$(10) \quad K = - \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_o,\ldots,\alpha_N) \\ \alpha_o+\ldots+\alpha_N = n-1}} \frac{n!}{\alpha_1!\ldots\alpha_N!} \ G_1^{(\alpha_1)} \ldots G_N^{(\alpha_N)} \ \frac{s \wedge (\bar{\partial} s)^{\alpha_o} \wedge (\bar{\partial} Q)^{\alpha'}}{\| \zeta - Z \|^{2(\alpha_o+1)}}$$

$$(11) \quad P = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_N = n}} \frac{n!}{\alpha_1!\ldots\alpha_N!} \ G_1^{(\alpha_1)} \ldots G_N^{(\alpha_N)} \ (\bar{\partial} Q)^{\alpha}$$

où $(\bar{\partial} Q)^\alpha = (\bar{\partial} Q^{(1)})^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge (\bar{\partial} Q^{(N)})^{\alpha_N}$

$$\alpha' = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \ \text{si} \ \alpha = (\alpha_o,\ldots,\alpha_N)$$

$$G_j^{(\alpha)} = \frac{d^\alpha}{dt} \ G_j \Big|_{t = < Q^{(j)} \ , Z - \zeta > + 1}$$

Pour plus de commodités on notera, étant donnée une paire $(\vec{Q},G)$

(11bis) $$\phi(Z,\zeta) = < Q, Z-\zeta > + 1$$

II 4 <u>Une formule de déconvolution explicite en termes de transformées de Fourier</u>

Nous nous plaçons dans $A_p(\mathbb{C}^n)$ et nous considérons dans A_p m fonctions $F_1,\dots,F_m$ satisfaisant aux conditions de Hörmander (6).

Il est immédiat de construire mn fonctions g_k^j , $j = 1,\dots,m;k=1,\dots,n$ holomorphes dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, de manière à ce que

(12) $$F_j(Z)-F_j(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} g_k^j(Z,\zeta)(Z_k-\zeta_k),\ j = 1,\dots,m\ ;Z \in \mathbb{C}^n\ ,\ \zeta \in \mathbb{C}^n$$

et que d'autre part

(13) $$\exists\, C\ ,\quad |g_k^j(Z,\zeta)| \leqslant ce^{C(p(Z)+p(\zeta))}\ ,\ j = 1,\dots,m;\ k = 1,\dots,n\ .$$

(On peut utiliser pour ce faire la formule de Taylor avec reste intégral)

On considère l'application $\vec{Q}^{(1)} = (Q_1^{(1)},\dots,Q_n^{(1)})$ définie par :

$$Q_k^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \overline{F}_j(\zeta)g_k^j}{\sum_{j=1}^{m} |F_j(\zeta)|^2}$$

de manière à ce que :

$$\phi^{(1)}(Z,\zeta) = \frac{\Sigma\overline{F}_j(\zeta)F_j(Z)}{\sum_{j=1}^{n} |F_j(\zeta)|^2}$$

On désigne par φ la fonction C^∞ convexe sur $\mathbb{C}^n$ définie par

$$\varphi(\zeta) = (1 + \sum_{j=1}^{m} |\mathrm{Im}\zeta_j|^2)^{1/2}$$

et l'on considère les deux applications $\vec{Q}^{(2)}$ et $\vec{Q}^{(3)}$ définies par

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k^{(2)}d\zeta_k = A\ \partial\varphi \qquad\qquad \sum_{k=1}^{n} Q_k^{(3)}d\zeta_k = \partial\ [\mathrm{Log}(1+\|\zeta\|)^2]$$

où A est une constante dont le choix sera précisé par la suite.

On écrit la formule (7) sur la boule de rayon R avec les paires $(\vec{Q}^{(1)},G_1)$, $(\vec{Q}^{(2)},G_2)$, $(\vec{Q}^{(3)},G_3)$ où

$$G_1(\alpha) = \alpha^{\inf(m,n+1)}$$

$$G_2(\alpha) = e^{\alpha}$$

$$G_3(\alpha) = \alpha^{B}$$

où B est pour l'instant une constante positive.

En écrivant la formule du Koppelman avec les noyaux (10), (11) associés à ce triplet de systèmes $(\vec{Q}^{(1)},G_1)$, $(\vec{Q}^{(2)},G_2)$, $(\vec{Q}^{(3)},G_3)$, on voit que si A et B sont correctement choisis, en fonction des constantes κ et K intervenant dans (6), on peut faire tendre le rayon R vers $+\infty$ et obtenir ainsi la formule de déconvolution

$$1 = \frac{1}{(2i\pi)^n n!} \int_{\mathbb{C}^n} P(z,\zeta) \ . \tag{14}$$

Du fait de la présence de $\bar{\partial}Q^{(1)}$, les coefficients de $F_1,\dots,F_m$ dans la formule (14) ne sont vraiment explicites que dans le cas où $z_1,\dots,z_n$ peuvent être extirpés des intégrales, ce qui est par exemple le cas dans la situation du théorème de Bezout algébrique classique ; dans ce cas, l'utilisation de $\vec{Q}^{(2)}$ est inutile et la formule (14) donne les tranformés inverses des déconvoluteurs sous forme explicite.

II 5 Formules de déconvolution explicites en termes de distributions

Considérons m fonctions $F_1,\dots,F_m$ dans $A_p(\mathbb{C}^n)$, avec $m \geqslant n$. Supposons, ce qui est une hypothèse assez restrictive mais dont nous ne pouvons nous passer (nous verrons dans un instant pourquoi) que :

$$F_1(\zeta) = \dots = F_n(\zeta) = 0 \ \Rightarrow J(F_1,\dots,F_n)\ (\zeta) \neq 0 \tag{15}$$

où J désigne le Jacobien de $F_1,\dots,F_n$. Il existe alors une famille de paires de noyaux $(K_\varepsilon,P_\varepsilon)$ nous permettant d'écrire (7) directement liée au problème de division attaché à $F_1,\dots,F_n$. Elles sont associées par le théorème d' Andersson-Berndsson aux applications

$$\vec{Q}^{(\varepsilon)} : \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}^n \quad \text{où}$$

$$(16) \qquad Q_k^{(\varepsilon)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{F}_j \, g_k^j}{\sum_{j=1}^{n} |F_j|^2 + \varepsilon}$$

On vérifie aisément [3] que la famille $(\bar\partial Q^{(\varepsilon)})^n$ (on rappelle la confusion de notation $Q^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} Q_k^{(\varepsilon)} \, d\zeta_k$) converge, au sens des courants, Z étant fixé, vers une mesure portée par la variété V des zéros communs de $F_1,\dots,F_n$ mesure correspondant à ce qu'on appelle le noyau d'interpolation de Jacobi :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\bar\partial Q^{(\varepsilon)})^n = \sum_{\alpha \in V} \frac{\det[g_k^j(Z,\alpha)]}{J(\alpha)} \, \delta_{\{\alpha\}} .$$

On peut évidemment se poser le problème de savoir ce qui se passe lorsque l'on supprime sur la variété V l'hypothèse de régularité (15).

Si nous supposons d'autre part que $F_1,\dots,F_m$ satisfont à la condition d'Hörmander (6) nous pouvons fabriquer une application $\vec{Q}^{[2]}$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, à partir des $(2n+1)m$ fonctions $H_1,\dots,H_{(2n+1)m}$, obtenues en multipliant $F_1,\dots,F_m$ par l'une des fonctions 1, $\zeta_1^A,\dots,\zeta_n^A$, $\sin(B\zeta_1),\dots,\sin(B\zeta_2)$ (A et B étant des constantes entières convenablement choisies) de la manière suivante :

$$(17) \qquad Q^{[2]}(Z,\zeta) = \frac{\sum_{j=1}^{(2n+1)m} \overline{H}_j(\zeta) g_k^{H_j}(Z,\zeta)}{\|F(\zeta)\|^2 [1 + \sum_{j=1}^{n} (|\zeta_j|^{2A} + |\sin(B\zeta_j)|^2)]}$$

En partant de la formule de Koppelman (7) écrite à partir des noyaux $K^{(\varepsilon)}$ et $P^{(\varepsilon)}$ associés par (10), (11) aux paires $(\vec{Q}^{(\varepsilon)}, \alpha \to \alpha^n)$ $(\vec{Q}^{[2]}, \alpha \to \alpha)$, on peut représenter une fonction holomorphe u dans un domaine D sous la forme :

$$(18) \quad u(Z) = -\frac{1}{n!(2i\pi)^n} \left[\int_{\partial D_n} u(\zeta) K(Z,\zeta) - \int_{D_n} u(\zeta) P^{(\varepsilon)}(Z,\zeta) \right], \quad Z \in D,$$

où : $\quad P^{(\varepsilon)}(Z,\zeta) = n! \left[\phi^{[2]} (\bar\partial Q^{(\varepsilon)})^n + n\, \phi^{(\varepsilon)} (\bar\partial Q^{(\varepsilon)})^{n-1} \wedge \bar\partial Q^{[2]} \right]$

avec $\phi^{(\varepsilon)}$ et $\phi^{[2]}$ associées par (11bis) aux paires utilisées.

On peut transformer (18) en utilisant une fois de plus la formule de Stokes et écrire :

$$(19)\quad u(Z) = -\frac{1}{n!(2i\pi)^n}\left[\int_{\partial D_n} u(\zeta)\widetilde{K}(Z,\zeta) - \int_{D_n} u(\zeta)\,\widetilde{P}(Z,\zeta)\right]$$

où :

$$\widetilde{K}(Z,\zeta) = K(Z,\zeta) - n\,n!\,(\bar\partial Q^{(\varepsilon)})^{n-1} \wedge Q^{[2]}$$

$$\widetilde{P}^{(\varepsilon)}(Z,\zeta) = n!\left[\phi^{[2]}(\bar\partial Q^{(\varepsilon)})^n - n\bar\partial\phi^{(\varepsilon)} \wedge \bar\partial Q^{(\varepsilon)} \wedge Q^{[2]}\right]$$

On peut également vérifier que la famille de courants $\bar\partial\phi^{(\varepsilon)} \wedge \bar\partial Q^{(\varepsilon)} \wedge Q^{[2]}$ converge, au sens des courants, à Z fixé, vers une mesure portée par la variété V des zéros communs de $F_1,\ldots,F_n$.

Cette mesure s'écrit :

$$\frac{2\pi^n}{n!}\left[\sum_{j=1}^{n} F_j(z)\,\bar\partial F_j \wedge \left(\bigwedge_{\ell\neq j} (\bar\partial F_\ell \wedge g^\ell)\right)\right] \frac{dV}{|J|^2}$$

où dV désigne la mesure associée au courant d'intégration θ_V sur la variété V et J toujours le déterminant jacobien des fonctions $F_1,\ldots,F_n$.

Ce mécanisme nous permet de construire, à partir des formules d'Andersson-Berndtsson, des formules explicites de déconvlution, à titre d'exemple, nous énoncerons le résultat suivant, dans le cas où n = 2 [1]:

<u>Théorème 2</u> : <u>Soient</u> $F_1,\ldots,F_m$, u, <u>m+1 éléments de</u> $A_p(\mathbb{C}^2)$ <u>remplissant les quatre conditions suivantes</u> :

(C1) $\exists\, \kappa > 0,\ \exists\, K > 0,\ \forall \zeta \in \mathbb{C}^n\ ,\ \sum_{\ell=1}^{m} |F_\ell(\zeta)| \geq \kappa e^{-Kp(\zeta)}$

(C2) $\exists\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, L > 0$, tels que :

$$F_1(\zeta) = F_2(\zeta) = 0 \Rightarrow |J(F_1,F_2)\,(\zeta)| \geq \varepsilon\, e^{-Lp(\zeta)}$$

(C3) <u>il existe une suite exhaustive</u> $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>de domaines emboîtés</u> <u>à frontière</u> C^1 <u>telle que l'on ait, pour</u> Z <u>fixé dans</u> $\mathbb{C}$,

(i) $\exists\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, C' > 0,\ |F_1(\zeta)| + |F_2(\zeta)| > \varepsilon'\, e^{-C'p(\zeta)}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_{\partial D_n} \frac{|u(\zeta)|}{\|\zeta\|\,(|F_1|^2+|F_2|^2)^{3/2}}\,(|F_1'| + |F_2'|)\,(\|g^1(Z,\zeta)\|+\|g^2(Z,\zeta)\|) = 0\right.$

$$\text{(iii)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\partial D_n} \frac{|u(\zeta)|}{\|\zeta\|\,(|F_1|^2+|F_2|^2)}\quad \left(1+\frac{(\sum_1^m |F_j'|^2)^{1/2}}{(\sum_1^m |F_j|^2)^{1/2}}\right)\right) = 0$$

(C4) la série définie par

$$\sum_{\alpha\in V} |u(\alpha)|\ \frac{\|g^1(Z,\alpha)\|+\|g^2(Z,\alpha)\|}{|J(F_1,F_2)(\alpha)|}$$

<u>est normalement convergente sur tout compact de</u> $\mathbb{C}^2$, <u>de somme majorée en</u> $C\, e^{Dp(Z)}$ <u>où</u> C <u>et</u> D <u>désignent deux constantes positives</u>.

<u>Il existe alors des fonctions</u> $G_1,\ldots,G_m$ <u>dans</u> $A_p(\mathbb{C}^2)$ <u>s'écrivant comme des séries d'interpolation du type Jacobi sur</u> V , <u>telles que</u>

$$u(Z) = \sum_{\ell=1}^{m} G_\ell(Z)F_\ell(Z) \quad .$$

<u>Les transformées de Fourier inverses de</u> $G_1,\ldots,G_m$ <u>sont des distributions explicites</u>.

<u>Remarque 5</u> : Un tel résultat ne peut être appliqué directement ; si nous avons m distributions $\mu_1, \mu_2,\ldots,\mu_m$, il nous faut trouver des éléments φ_1 , φ_2 de $A_p(\mathbb{C}^2)$ tels que les conditions du théorème soient satisfaites pour $F_1 = \varphi_1\, \hat{\mu}_1$, $F_2 = \varphi_2\, \hat{\mu}_2$, $F_3 = \hat{\mu}_3,\ldots,$ $F_m = \hat{\mu}_m$; dans la pratique, φ_1 et φ_2 seront en général des polynômes. Reste toutefois que la condition C3 est une condition techniquement difficile à vérifier sur des exemples.

<u>Remarque 6</u> : En principe, pour une formule de déconvolution, on prend u = 1 ; mais il peut être intéressant, pour alléger les formules et assouplir les contraintes venant de C4, de travailler avec une suite de fonctions u_n associée, par Fourier, à une approximation de $\delta(0,\ldots,0)$.

Nous pouvons donner les trois exemples suivants :

<u>Exemple 1</u> [1] Les mesures μ_1 , μ_2 , μ_3 correspondent à des prises de moyenne sur des carrés C_1, C_2, C_3 obtenus à partir de C_1 par des rotations d'angles respectifs (0, θ, θ'), où sin θ, sin θ' sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, où (1, sin θ, cos θ) sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, et où les 8 triplets (f(θ), f(θ'), f(θ-θ')) (f(α) désignant pour un réel α indifféremment sin α ou cos α) sont constitués de nombres $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

On peut par exemple prendre $\theta = \frac{\pi}{5}$, $\theta' = \frac{\pi}{4}$.

Exemple 2 [1] Les mesures μ_1 , μ_2 , μ_3 correspondent à des prises de moyenne sur des carrés C_1 , C_2 , C_3 obtenus à partir de C_1 par des homothéties de rapports 1, a, a', où a , a' sont 2 irrationnels algébriques de [0,1], $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants avec 1 .

Exemple 3 : Ce dernier exemple me paraît présenter un intérêt du fait de son analogie avec le problème connu en tomographie sous le nom de problème de Hammer [7]. Il s'agit de l'exemple suivant : $\mu_1,\ldots,\mu_n$, μ_{n+1} désignent les n + 1 mesures dans $\mathbb{R}^n$ de transformées de Fourier

$$\begin{cases} \hat{\mu}_j(Z) = \dfrac{\sin(Tz_j)}{Tz_j} , \quad j = 1,\ldots,n \\ \hat{\mu}_{n+1}(Z) = \dfrac{\sin(T\langle\alpha,Z\rangle)}{T\langle\alpha,Z\rangle} \end{cases}$$

où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ désigne un m-uplet de $(\overline{\mathbb{Q}})^n$ constitué de nombres $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants avec 1. Dans ce cas, on peut construire explicitement une solution au problème de la déconvolution en utilisant les techniques évoquées dans cette section.

§ III CONCLUSION ; ET LES PROBLEMES DE BRUIT ?

Tout d'abord, une première remarque : les distributions intervenant dans les formules dont nous disposons étant données sous forme de séries, il est indispensable, pour n'avoir à manier que des séries tronquées, lorsque l'on désire récupérer une information $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ sur le domaine $\|x\| \leq R$, de connaître une borne de φ et de toutes ses dérivées jusqu'à un certain ordre sur l'ensemble $\|x\| \leq R'$, où

$$R' = R + 2 \text{ diamètre } \widehat{(\operatorname{Supp}\mu_1 \cup \operatorname{Supp}\mu_2)}$$

où $\widehat{\ }$ désigne la prise d'enveloppe convexe.

De plus, la connaissance d'une telle borne est indispensable si l'on songe aux propriétés arithmétiques des nombres intervenant dans l'expression des mesures $\mu_1,\ldots,\mu_m$; dans la pratique, toutes les constantes arithmétiques doivent être remplacées par des approximations rationnelles suffisantes.

La technique utilisée le plus souvent pour pallier aux problèmes de bruit est celle du filtrage de Wiener. Revenons à notre exemple originel développé dans l'introduction. L'objet N correspond à un processus stochastique spatial, comme d'ailleurs l'image H que l'on veut capter et l'on supposera ces deux processus stationnaires dans le plan et indépendants. Lorsque l'on essaye de minimiser au sens des moindres carrés l'expression

$$E\left(\int M(Y)\phi[(x,y)-Y]\, d\sigma(Y) - H(x,y)\right)^2$$

on s'aperçoit que l'opération à effectuer sur $\hat{\phi}$ est la suivante

$$\hat{H} \approx \frac{\hat{\phi}\,\overline{\hat{\mu}(\omega)}\ \varphi_o(\omega)}{|\hat{\mu}(\omega)|^2\varphi_o(\omega)+\varphi_n(\omega)}$$

où φ_o et φ_n sont les transformées de Fourier des fonctions de $\vec{X}$ $E[(H(Y) - E(H(Y)))(H(\vec{X}+\vec{Y}) - E(H(\vec{Y}))]$ et $E[N(\vec{Y})N(\vec{X}+\vec{Y})]$.

Connaître H exige donc que l'on dispose de modèles simples pour les fonctions φ_o et φ_n ; on peut raisonnablement supposer que φ_n est une constante et φ_o une fonction constante dans une boule de rayon R et nulle en dehors de cette boule [8] . L'opération de filtrage est donc une opération de convolution avec une certaine distribution tempérée.

Lorsque nous essayons de substituer à cette opération l'opération de convolution avec les déconvoluteurs associés à un système $\mu_1,\dots,\mu_m$, nous nous trouvons confrontés aux problèmes que posent l'action de dérivations sur les bruits. Des études numériques sont conduites dans ce sens à l'Université de Maryland.

Enfin, et nous conclurons par ce point, il existe un lien entre le filtrage de Wiener et une partie des techniques que nous venons de développer ; décrivons le de manière très sommaire : nous avons vu que si $\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_n$ sont n éléments de $A_p(\mathbb{C}^n)$ définissant dans $\mathbb{C}^n$, une variété de zéros communs V régulière (au sens (15)), on a, au sens des mesures

$$\lim_{\varepsilon\to o}\left[\frac{\varepsilon}{\left(\sum_1^n|\hat{\mu}_j|^2+\varepsilon\right)^{n+1}}\,d\lambda_n\right] = \frac{\pi^n}{n!}\,\frac{dV}{|J|^2}$$

où $d\lambda_n$ désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$, J le déterminant jacobien des fonctions $\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_n$, dV la mesure associée au courant d'intégration sur la variété V . Une manière d'envisager la règle précédente est d'examiner ce que deviennent les opérations du type filtrage de Wiener (ou pseudo de Wiener comme par exemple dans [5]) lorsque le rapport bruit sur signal tend vers 0 (dans l'exemple étudié ci-avant, il s'agissait du rapport $\frac{\varphi_n}{\varphi_o}$) .

REFERENCES

[1] C.A. Berenstein, A. Yger, le problème de la déconvolution, Journal of Functional Analysis, vol 54, n°2, 1983, pp 113-159.

[2] B. Berndtsson, M. Andersson, Henkin-Ramirez formulas with weight factors, Ann. Inst. Fourier, 32, 3 (1982), pp 91-110.

[3] B. Berndtsson, A formula for interpolation and division in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 263, 399-418 (1983).

[4] J. Brunol, Y. Fontroget, S. Lowenthal, déconvolution analogique en imagerie par ouverture codée appliquée à la médecine nucléaire, optica Acta, 1978, vol 25, n°2 , pp 113-124.

[5] J. Brunol, N. de Beaucoudrey, J. Fontroget, S. Lowenthal, Imagerie tridimensionnelle en gammagraphie, Optics Communications, Volume 25, 2 (1978), p.163 et ss.

[6] L. Gatteshi, on the zeros of certain functions with application to Bessel fonctions, Indag. Math 14 (1952), pp 224-229.

[7] R.J. Gardner et P. McMullen, on Hammer's X-ray problem, J. London Math Soc. (2), 21 (1980), 171-175.

[8] C.W. Helstrom, Image restoration by the method of least squares, Journal of the optical Society of America, vol.57, 3, 1967, p.297.

[9] L. Hörmander, Generators for some rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc 73 (1967), 943-949.

[10] J.J. Kelleher, B.A. Taylor, Finitely generated ideals in rings of analytic functions, Math Ann. 193 (1971), pp 225-237.

[11] M. Laug, Traitement optique du signal et des images : bases théoriques et applications - Toulouse : cepadues éditions, 1980.

[12] G.H. Meirsters, Translation-invariant linear forms and a formula for the Dirac measure, J. functional Analysis 8 (1971), pp 173-188.

[13] A. Papoulis, Signal Analysis, Mac Graw Hill 1977.

[14] R.D. Richtmyer, On the structure of some distributions discovered by Meirsters, Journal of Functionel Analysis 9, 1972, pp 336-348.

[15] H. Skoda, Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 5 (1972), pp 545-579.

***