P. Bolley
J. Camus
G. Métivier

Estimations de Schauder et régularité höldérienne pour une classe de problèmes aux limites elliptiques singuliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 15, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

ESTIMATIONS DE SCHAUDER ET REGULARITE HOLDERIENNE POUR UNE CLASSE DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES SINGULIERS.

par P. BOLLEY J. CAMUS G. METIVIER

Exposé n°XV

26 Mars 1985

I. INTRODUCTION :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{\Omega}$ soit une variété à bord compacte de classe C^∞. Il est bien connu [1] que si $L(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$ est un opérateur, à coefficients $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$, proprement elliptique sur $\bar{\Omega}$ et si $B = (B_j)_{0\leq j\leq m-1}$ est un système d'opérateurs frontière à coefficients C^∞ sur le bord Γ de Ω et recouvrant L on a les estimations (de Schauder) suivantes :

$$(1.1)\quad \|u\|_{C^{2m+\mu}(\bar{\Omega})} \leq C_\mu \{\|Lu\|_{C^\mu(\bar{\Omega})} + \|Bu\|_{\prod_{j=o}^{m-1} C^{2m+\mu-m_j}(\Gamma)} + \|u\|_{C^{2m+\mu-1}(\bar{\Omega})}\}$$

pour $\mu > 0$ non entier, la constante C_μ étant indépendante de $u \in C^{2m+\mu}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^o(\bar{\Omega}),\ D^\alpha u \in C^\mu(\bar{\Omega})\ ;\ |\alpha|\leq 2m\}$ où, pour $0 < \mu < 1$, l'espace $C^\mu(\bar{\Omega})$ désigne l'espace de Hölder usuel des $u \in C^o(\bar{\Omega})$ tels qu'il existe $C > 0$ avec $|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^\mu$, $x,y \in \bar{\Omega}$.

Diverses extensions de ces inégalités ont été obtenues récemment [6][7][8][9][11][12][15] ... En particulier, C. Goulaouic - N. Shimakura considèrent des opérateurs elliptiques singuliers du type :

$$L = \varphi \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} D_j D_k + \sum_{j=1}^{n} a_j D_j + a_o$$

où φ est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ avec $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\varphi(x) > 0\}$, $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \varphi(x) = 0\}$ et $d\varphi \neq 0$ sur Γ.

Sous certaines hypothèses supplémentaires, ils démontrent l'inégalité suivante :

$$(1.2)\qquad \|u\|_{C_1^{\mu+1}(\bar{\Omega})} \leq C\ \{\|Lu\|_{C^\mu(\bar{\Omega})} + \|u\|_{C_1^\mu(\bar{\Omega})}\}$$

où, pour $\mu > 0$ non entier, $C_1^\mu(\bar{\Omega}) = \{u \in C^\mu(\bar{\Omega})\ ;\ \varphi\, u \in C^{\mu+1}(\bar{\Omega})\}$ (attention à l'indexation différente de celle de [8]).

Utilisant par ailleurs les résultats connus pour ces opérateurs dans le cadre hilbertien et des inégalités du type "principe du maximum" ils obtiennent des résultats d'existence et d'unicité pour les problèmes (aux limites) associés à ces opérateurs et donnent des applications à des problèmes elliptiques singuliers non linéaires.

On se propose, tout d'abord, de généraliser ces derniers résultats à la classe des opérateurs elliptiques singuliers considérés par N. Shimakura [17] (cf. aussi [10] [3]) :

$$L = \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,2m)} \varphi^{k-h} P^{2m-h}(x;D)$$

où $k \in \mathbb{N}$ et où $P^{2m-h}(x;D)$ est un opérateur à coefficients $C^\infty(\bar{\Omega})$ d'ordre $\leqslant 2m-h$, $P^{2m}(x;D)$ étant proprement elliptique sur $\bar{\Omega}$.

Pour $x \in \Gamma$, on introduit le polynôme indiciel $p(x;\lambda)$ associé à L :

$$p(x;\lambda) = \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,2m)} (-i)^{2m-h} P^{2m-h}_{2m-h}(x;\ \mathrm{grad}\varphi(x))\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+h+1)$$

où $P^{2m-h}_{2m-h}(x;D)$ désigne la partie principale de $P^{2m-h}(x;D)$.

On considère alors les hypothèses suivantes :

$(H_{1\mu})$ Pour $x \in \Gamma$, l'équation $p(x;\lambda) = 0$ n'admet pas de racine située sur la droite $\mathrm{Re}\ \lambda = \mu$.

On désigne par $r_\mu(x)$ le nombre de racines λ de cette équation vérifiant $\mathrm{Re}\ \lambda > \mu$ et on suppose que

$(H_{2\mu})$ $r_\mu(x)$ est constant sur Γ et égal à r_μ et $\chi_\mu = m-k + r_\mu \geqslant 0$.

$(H_{3\mu})$ Pour tout $x \in \Gamma$, pour tout $\xi \neq 0$ vecteur cotangent en $x \in \Gamma$, le problème aux limites

$$\begin{cases} L^o(x,\xi;t,D_t)u \equiv \displaystyle\sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,2m)} t^{k-h} P^{2m-h}_{2m-h}(x;\xi+\mathrm{grad}\varphi(x)D_t)u = 0 \\ B^o_\mu(x,\xi;D_t)u = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution $u = 0$ dans l'espace $C_k^{\mu+2m-k}(\mathbb{R}_+) = \{u \in C^{\mu+2m-k}(\mathbb{R}_+)$ $t^h u \in C^{\mu+2m-k+h}(\mathbb{R}_+)$, $0 \leqslant h \leqslant k\}$, et où $B^o_\mu = (B^o_{j\mu})_{0\leqslant j\leqslant\chi_\mu-1}$ (si $\chi_\mu \geqslant 1$) est la partie principale d'un système d'opérateurs frontière (B_j) sur le bord Γ de Ω avec B_j d'ordre $m_j < \mu + 2m-k$. Lorsque $\chi_\mu = 0$, le système d'opérateurs frontière B_μ est vide.

On établit les résultats suivants :

<u>Théorème I.1</u> : Sous les hypothèses $(H_{1\mu})(H_{2\mu})(H_{3\mu})$ avec $\mu \notin \mathbb{Z}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout élément $u \in C_k^{\mu+2m-k}(\bar{\Omega}) =$ $\{u \in C^{\mu+2m-k}(\bar{\Omega})\ ;\ \varphi^h u \in C^{\mu+2m-k+h}(\bar{\Omega}),\ 0 \leqslant h \leqslant k\}$ on ait :

$$\|u\|_{C_k^{\mu+2m-k}(\bar{\Omega})} \leqslant C.\{\|Lu\|_{C^\mu(\bar{\Omega})} + \|B_\mu u\|_{\prod_{j=0}^{\chi_\mu-1} C^{2m-k+\mu-m_j}(\Gamma)} + \|u\|_{C_k^{\mu+2m-k-1}(\bar{\Omega})}\}$$

Théorème I.2 : Soient $\mu > \mu'$ deux nombres réels > 0 non entiers. On suppose que le système $(L,B_{\mu'})$ satisfait les hypothèses $(H_{1\mu'})$ $(H_{2\mu'})$ $(H_{3\mu'})$; on suppose de plus que l'équation indicielle $p(x;\lambda) = 0$, $x \in \Gamma$, n'admet pas de racine dans la bande $\mu' \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \mu$.

Alors, si $u \in C_k^{\mu'+2m-k}(\bar{\Omega})$ et si $(Lu,B_{\mu'}u) \in C^{\mu}(\bar{\Omega}) \times \prod_{j=0}^{\chi_{\mu'}-1} C^{2m-k+\mu-m_j}(\Gamma)$ on a : $u \in C_k^{\mu+2m-k}(\bar{\Omega})$.

Remarquons que le théorème I.1 améliore en particulier le résultat (1.2) de [8] relativement aux conditions $(H_{1\mu})$ et $(H_{3\mu})$.

Les techniques utilisées pour établir de telles estimations de Schauder sont en général, basées sur le calcul explicite de noyaux de Green ou de paramétrixes, calculs dont nous ne disposons pas pour la classe générale des opérateurs L considérés.

Ici, on va revenir à la méthode classique des estimations a priori dite "de Peetre" bien connue dans le cadre hilbertien [13] qui consiste à se ramener localement au cas du demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ et, grâce à la transformation de Fourier en variables tangentielles, permet de réduire le problème à un théorème d'isomorphisme pour une équation différentielle ordinaire.

II . INEGALITE DE SCHAUDER ET REGULARITE HOLDERIENNE DANS LE DEMI-ESPACE $\mathbb{R}^n_+$:

Les théorèmes I.1 et I.2 sont en fait des cas particuliers de résultats plus généraux que nous allons présentés maintenant. Pour cela, notons $x = (t,x')$ le point générique de $\mathbb{R}^n$ et introduisons une partition de l'unité : soit $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ valant 1 sur $[-1,1]$, à support dans $[-2,2]$ et pour $p \in \mathbb{N}$, considérons :

$$S_p = \varphi(2^{-p}|D_x|) \ ; \ S'_p = \varphi(2^{-p}|D_{x'}|) \ ; \ S''_p = \varphi(2^{-p}|D_t|)$$

et, convenant $S_{-1} = S'_{-1} = S''_{-1} = 0$,

$$\Delta_p = S_p - S_{p-1} \ ; \ \Delta'_p = S'_p - S'_{p-1} \ , \ \Delta''_p = S''_p - S''_{p-1} \ .$$

Suivant J.M. Bony [4], pour des réels σ, μ, ν arbitraires, posons :

Définition II.1 : (i) $C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ tels que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $(1+|t|2^p)^\sigma \Delta_p u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} 2^{\mu p} \|(1+|t|2^p)^\sigma \Delta_p u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty \ ;$$

(ii) $C_\sigma^{\mu,\nu}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ tels que pour tous entiers $p, q \in \mathbb{N}$, $(1+|t|2^p)^\sigma \Delta_p\Delta'_q u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\sup_{p,q} 2^{\mu p+\nu q} \|(1+|t|2^p)^\sigma \Delta_p\Delta'_q u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < +\infty .$$

Pour $\sigma = 0$, $C_0^\mu(\mathbb{R}^n) = C^\mu(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder usuel lorsque $\mu \notin \mathbb{Z}$. Ces espaces ne dépendant pas de la partition dyadique choisie. On vérifie facilement les propriétés suivantes :

1. $C^\mu(\mathbb{R}^n) \subset C^{\mu,0}(\mathbb{R}^n)$; $C_\sigma^{\mu+\varepsilon,-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \subset C_\sigma^\mu(\mathbb{R}^n)$; $C_\sigma^{\mu,\nu}(\mathbb{R}^n) \subset C_\sigma^{\mu-\varepsilon,\nu+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$

2. les opérateurs de dérivations opèrent de la façon suivante :

$$D_t : C_\sigma^\mu \longrightarrow C_{\sigma-1}^{\mu-1} \quad \text{et} \quad C_\sigma^{\mu,\nu} \longrightarrow C_\sigma^{\mu-1,\nu}$$

$$D_{x'_i} : C_\sigma^\mu \longrightarrow C_{\sigma-1}^{\mu-1} \quad \text{et} \quad C_\sigma^{\mu,\nu} \longrightarrow C_\sigma^{\mu,\nu-1}$$

3. la multiplication par t opère de la façon suivante :

$$t : C_\sigma^\mu \longrightarrow C_{\sigma-1}^{\mu+1} \quad \text{et} \quad C_\sigma^{\mu,\nu} \longrightarrow C_{\sigma-1}^{\mu+1,\nu} .$$

En particulier, lorsque $\sigma = k \in \mathbb{N}$, l'espace $C_k^\mu(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C_k^{\mu,\nu}(\mathbb{R}^n)$) coincide avec l'espace des $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C^{\mu,\nu}(\mathbb{R}^n)$) tels que $t^h u \in C^{\mu+h}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C^{\mu+h,\nu}(\mathbb{R}^n)$) pour $0 \leqslant h \leqslant k$.
Par restriction à $\mathbb{R}_+^n$, on définit les espaces $C_\sigma^\mu(\mathbb{R}_+^n)$ et $C_\sigma^{\mu,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$.
Par ailleurs, dans une carte locale convenable, les opérateurs L s'écrivent sous la forme :

$$L(x;D_x) = \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,2m)} t^{k-h} P^{2m-h}(x;D_x)$$

où $D = -i\partial$, k et $m \in \mathbb{N}$, $P^{2m-h}(x,D_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-h} a_\alpha^{2m-h}(x)D_x^\alpha$ est un opérateur d'ordre $\leqslant 2m-h$ à coefficients $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$.
On suppose que l'opérateur $P^{2m}(x;D_x)$ est proprement elliptique sur $\overline{\mathbb{R}}_+^n$. Le polynôme indiciel $p(x';\lambda)$ associé à L est défini par :

$$p(x';\lambda) = \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,2m)} (-i)^{2m-h} a_{(2m-h,0)}^{2m-h}(0,x') \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+h+1)$$

on notera $\Omega =]0,T[\times \Omega'$ où $T > 0$ et Ω' est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Pour $\mu \in \mathbb{R}$, on considère les hypothèses $(H_{1\mu})(H_{2\mu})$ et $(H_{3\mu})$ suivantes :
$(H_{1\mu})$ Pour $x' \in \Omega'$, l'équation $p(x';\lambda) = 0$ n'admet pas de racine sur la droite $\mathrm{Re}\,\lambda = \mu$; et si $r_\mu(x')$ désigne le nombre de racines λ de cette équation

vérifiant $\mathrm{Re}\,\lambda > \mu$, on pose :

$(H_{2\mu})$ $r_\mu(x')$ est constant sur Ω' et égal à r_μ et $\chi_\mu = m-k+r_\mu \geqslant 0$.

$(H_{3\mu})$ Pour tout $x' \in \Omega'$, pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, le problème aux limites :

$$\begin{cases} L^o(x',t;\xi',D_t)u \quad \sum_{h=0}^{\mathrm{Min}(k,2m)} t^{k-h}\, P^{2m-h}_{2m-h}((0,x'),\xi' , D_t)\, u = 0 \\ B^o_\mu(x',\xi';D_t)u = 0 \end{cases}$$

n'admet que la solution $u = 0$ dans l'espace $C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+)$, où $\sigma \in \mathbb{R}$ et $B^o_\mu = (B^o_{j\mu})_{0\leqslant j\leqslant \chi_\mu -1}$ (si $\chi_\mu \geqslant 1$) est la partie principale d'un système d'opérateurs frontière $B_\mu = (B_{j\mu})_{0\leqslant j\leqslant \chi_\mu -1}$ à coefficients $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ avec B_j d'ordre $m_j \leqslant \mu + 2m-k$. Lorsque $\chi_\mu = 0$, le système B_μ est vide.

On a alors les résultats suivants :

<u>Théorème II-1</u> : Soient μ , $\sigma \in \mathbb{R}$ avec $\mu \notin \mathbb{Z}$ et $\mu + \sigma \notin \mathbb{Z}$. On suppose que l'opérateur (L,B_μ) satisfait les conditions $(H_{1\mu})$ $(H_{2\mu})$ $(H_{3\mu})$. Alors, pour tout compact $K \subset [0,T[\times \Omega'$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que pour tout $u \in C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)$ avec $\mathrm{supp}\,u \subset K$ on ait :

$$\|u\|_{C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_K\{\|Lu\|_{C^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)} + \|B_\mu u\|_{\prod_{0\leqslant j\leqslant \chi_\mu -1} C^{\mu+2m-k-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{C^{\mu+2m-k-1}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)}\}.$$

<u>Théorème II-2</u> : Soient σ , μ, μ' des nombres réels avec $\mu' \leqslant \mu$, $\mu' \notin \mathbb{Z}$ et $\mu \notin \mathbb{Z}$. On suppose que l'équation indicielle $p(x';\lambda) = 0$ pour $x' \in \Omega'$ n'admet pas de racine dans la bande $\mu' \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \mu$. Alors :

(i) si $u \in C^{\mu'+2m-k,-\infty}_{-\infty,loc}(\Omega)$ et $Lu \in C^\mu_{\sigma,loc}(\Omega)$ on a : $u \in C^{\mu+2m-k,-\infty}_{\sigma+k,loc}(\Omega)$;

(ii) de plus, si $\mu + \sigma \notin \mathbb{Z}$, si l'opérateur (L,B_μ) vérifie les conditions $(H_{2\mu})(H_{3\mu})$ et si $B_\mu u \in \prod_{0\leqslant j\leqslant \chi_\mu -1} C^{\mu+2m-k-m_j}_{loc}(\Omega')$, on a : $u \in C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k,loc}(\Omega)$.

Lorsque $\chi_\mu \geqslant 1$, alors $\mu + 2m-k > \sup_j m_j$ ce qui justifie l'existence de traces d'ordre $\leqslant m_j$ pour les éléments $u \in C^{\mu+2m-k}_{-\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ et $C^{\mu+2m-k,-\infty}_{-\infty}(\mathbb{R}^n_+)$. De façon précise, désignons par $\overset{\circ}{C}{}^\mu_\sigma(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ (resp. $\overset{\circ}{C}{}^{\mu,\nu}_\sigma(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$) l'ensemble des éléments de $C^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n)$) à support dans $\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Par ailleurs, introduisons une partition de l'unité : $1 = \psi_o(t) + \sum_{j=1}^{+\infty} \psi(2^j t)$, $t > 0$ où ψ_o est C^∞ à support dans $[1,+\infty[$ et ψ $C^\infty_o([1/2,2])$ et désignons par $W^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ (resp. $W^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$) l'espace des $u \in S'(\mathbb{R}^n_+)$ tels que :

(i) $u_o = \psi_o u \in C^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n)$ (resp.$C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n)$) ;

(ii) $\tilde{u}_j = \psi(t)\ u(2^{-j}x) \in C^{\mu+\sigma}(\mathbb{R}^n)$ (resp.$C^{\mu+\sigma,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n)$) pour $j \geqslant 1$ avec

$$\sup_j 2^{\mu j}\|\tilde{u}_j\|_{C^{\mu+\sigma}(\mathbb{R}^n)} < +\infty \text{ (resp. } \sup_j 2^{\mu j}\|\tilde{u}_j\|_{C^{\mu+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)} < +\infty \text{).}$$

L'espace $W^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ coincide dans le cas Höldérien avec l'espace $SP^{\mu,\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ considéré par J.M. Bony [4] . On a alors :

Proposition II.3 :
(i) Pour $\mu < 0$, $\mu \notin \mathbb{Z}$, on a : $C^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+) = W^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ (resp.$C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+) = W^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$) et il existe un opérateur de prolongement π : $C^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$(resp.$C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$) dans $\overset{\circ}{C}{}^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ (resp.$\overset{\circ}{C}{}^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$) ;

(ii) Pour $\mu > 0$, $\mu \notin \mathbb{N}$, on a : les opérateurs traces $\gamma_j = \left.\dfrac{\partial^j}{\partial t^j}\right|_{t=0}$, $0 \leqslant j < \mu$, définis sur $C^\mu_{+\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ (resp $C^{\mu,-\infty}_{+\infty}(\mathbb{R}^n_+)$), se prolongent en des opérateurs continus de $C^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ (resp.$C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$) sur $C^{\mu-j}(\mathbb{R}^{n-1})$ (resp.$C^{\mu+\nu-j}(\mathbb{R}^{n-1})$) et on a $\gamma_j(t\partial_t u) = j\gamma_j u$; le noyau de l'opérateur trace $\gamma = (\gamma_j)_{0\leqslant j<\mu}$ est l'espace $\overset{\circ}{C}{}^\mu_\sigma(\bar{\mathbb{R}}^n_+) = W^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$(resp.$\overset{\circ}{C}{}^{\mu,\nu}_\sigma(\bar{\mathbb{R}}^n_+) = W^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$). De plus, il existe un opérateur de prolongement π de $C^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$(resp.$C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$) dans $C^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n)$ (resp.$C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n)$) tel que πu soit le prolongement naturel par 0 pour $u \in W^\mu_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$.

La démonstration de cette proposition s'inspire des notions d'opérateurs d'aplatissement et de partie finie introduites par J.M. Bony [4] . La notion de trace considérée ici coincide avec celle de S. Łojasiewicz [14] (cf. aussi [5][16]).

III. DEMONSTRATION DES THEOREMES II.1 et II.2 :

En fait les théorèmes II.1 et II.2 sont des corollaires des trois résultats suivants :

Théorème III.1 : (Hypoellipticité partielle). On suppose que l'équation indicielle $p(x';\lambda) = 0$ pour $x' \in \Omega'$ n'a pas de racine dans la bande $\alpha <$ Re $\lambda < \beta$. Etant donnés μ et $\mu' \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ avec $\alpha < \mu' \leqslant \mu < \beta$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ on a : si $u \in C^{\mu'+2m-k}_{-\infty,loc}(]0,T[;\mathcal{D}'(\Omega'))$ et $Lu \in C^\mu_{\sigma,loc}(]0,T[,\mathcal{D}'(\Omega'))$ alors

$u \in C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k,loc}(]0,T[\,,\mathcal{D}'(\Omega'))$.

(Dans cet énoncé, il n'est évidemment pas nécessaire de supposer $P^{2m}(x;Dx)$ elliptique ni même d'ordre 2m pair, il suffit que le coefficient $a^{2m}_{(2m,0)}(t,x')$ soit non nul sur $\underline{\Omega} = [0,T[\times\Omega')$.

On a un résultat analogue en remplaçant l'espace $\mathcal{D}'(\Omega')$ par un espace $C^{\nu}(\Omega')$; de façon précise : sous les mêmes hypothèses, si $u \in C^{\mu'+2m-k}_{-\infty,loc}(]0,T[\,;C^{\nu}(\Omega'))$ et si $Lu \in C^{\mu}_{\sigma,loc}(]0,T[,C^{\nu}(\Omega'))$, alors $u \in C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k,loc}(]0,T[;C^{-\infty}(\Omega'))$.

Ce théorème III.1 est en fait une version améliorée du résultat obtenu dans [2] pour le cas des indices μ, μ' et σ entiers relatifs, l'équation indicielle $p(x';\lambda) = 0$ n'admettant pas de racine avec $\text{Re}\,\lambda > \mu'$.

Théorème III.2 : (Estimations à priori anisotropes). Soient $\mu, \nu, \sigma \in \mathbb{R}$ avec $\mu \notin \mathbb{Z}$ et $\mu+\sigma \notin \mathbb{Z}$. On suppose que l'opérateur (L,B_μ) satisfait les conditions $(H_{1\mu})(H_{2\mu})(H_{3\mu})$. Alors :

(i) pour tout compact $K \subset [0,T[\times\Omega'$, il existe une constante $C_k > 0$ telle que pour tout $u \in C^{\mu+2m-k,\nu}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)$ avec $\text{Supp}\, u \subset K$ on ait :

$$\|u\|_{C^{\mu+2m-k,\nu}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C_K\{\|Lu\|_{C^{\mu,\nu}_{\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} + \|B_\mu u\|_{\prod\limits_{0\leq j\leq \chi_\mu-1} C^{\mu+\nu+2m-k-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{C^{\mu+2m-k,\nu-1}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)}\}.$$

(ii) De plus, si $(L,B_\mu)u \in C^{\mu,\nu+\alpha}_{\sigma}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod\limits_j C^{\mu+\nu+\alpha+2m-k-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})$ pour un certain $\alpha > 0$, alors $u \in C^{\mu+2m-k,\nu+\alpha}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)$.

La propriété (ii) se déduit facilement de (i) en utilisant la méthode des quotients différentiels tangentiels.

Théorème III.3 : Soient $\mu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et $\sigma \in \mathbb{R}$. On suppose que le polynôme indiciel $p(x';\lambda) = 0$ pour $x' \in \Omega'$ n'a pas de racine sur la droite $\text{Re}\,\lambda = \mu$. Alors, si $u \in C^{\mu+2m-k,o}_{\sigma+k,loc}(\Omega)$ et si $Lu \in C^{\mu}_{\sigma,loc}(\Omega)$ on a : $u \in C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k,loc}(\Omega)$.

On peut maintenant démontrer les théorèmes II.1 et II.2. Pour le théorème II.1, on procède de la façon suivante. On choisit $\mu' < \mu$ de sorte que l'équation indicielle n'ait pas de racine dans la bande $\mu' \leq \text{Re}\,\lambda \leq \mu$ ce qui est possible grâce à la condition $(H_{1\mu})$; les conditions $(H_{1\mu'})$ et $(H_{2\mu'})$ sont donc satisfaites ;

de plus, grâce au théorème d'hypoellipticité partielle (à valeurs scalaires) la condition $(H_{3\mu})$ implique la condition $(H_{3\mu'})$ si μ' est assez voisin de μ. Choisissant $\mu-1 < \mu' < \mu$ assez près de μ pour que l'on ait aussi $\mu' \notin \mathbb{Z}$, $\mu' + \sigma \notin \mathbb{Z}$ on peut appliquer le théorème III.2 (i) avec $\nu = \mu - \mu'$ en remarquant que $C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+) \subset C^{\mu'+2m-k,\mu-\mu'}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)$ ce qui donne :

$$\|u\|_{C^{\mu'+2m-k,\mu-\mu'}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C.\{\|Lu\|_{C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} + \|B_\mu u\|_{\prod_j C^{\mu+2m-k-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{C^{\mu'+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)}\}$$

puisque $C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}^n_+) \subset C^{\mu',\mu-\mu'}_{\sigma}(\mathbb{R}^n_+)$ et $C^{\mu'+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+) \subset C^{\mu'+2m-k,\mu-\mu'-1}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)$.

Utilisant alors l'inclusion $C^{\mu'+2m-k,\mu-\mu'}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+) \subset C^{\mu'+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+ ; C^{\nu}(\mathbb{R}^{n-1}))$ pour un certain $\nu \in \mathbb{R}$ on déduit du théorème d'hypoellipticité partielle III.1 qu'il existe $\nu' \in \mathbb{R}$ tel que $u \in C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+ ; C^{\nu'}(\mathbb{R}^{n-1}))$ avec :

$$\|u\|_{C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+ ; C^{\nu'}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leqslant C.\ \{\|Lu\|_{C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{C^{\mu'+2m-k,\mu-\mu'}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)}\}.$$

Par ailleurs, il existe $\nu'' \in \mathbb{R}$ tel que $C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+ ; C^{\nu'}(\mathbb{R}^{n-1})) \subset C^{\mu+2m-k,\nu''}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)$ et grâce aux hypothèses $(H_{1\mu})$ $(H_{2\mu})$ $(H_{3\mu})$ et le théorème III.2 (ii), on obtient que $u \in C^{\mu+2m-k,o}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)$ avec

$$\|u\|_{C^{\mu+2m-k,o}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C.\{\|Lu\|_{C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} + \|B_\mu u\|_{\prod_j C^{\mu+2m-k-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u\|_{C^{\mu+2m-k,\nu''}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)}\}.$$

Enfin, grâce au théorème III.3, on déduit que $u \in C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)$ avec :

$$\|u\|_{C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C.\{\|Lu\|_{C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{C^{\mu+2m-k,o}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)}\}.$$

ce qui achève la démonstration du théorème II.1.

Le théorème II.2 se démontre de manière analogue en démontrant tout d'abord, grâce au théorème d'hypoellipticité partielle III.1, que si $u \in C^{\mu'+2m-k,-\infty}_{-\infty,loc}(\Omega)$ et $Lu \in C^{\mu}_{\sigma,loc}(\Omega)$ alors $u \in C^{\mu'+2m-k,-\infty}_{\sigma+k,loc}(\Omega)$.

IV . ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION DES THEOREMES III.1 et III.2.

Pour le théorème III.1, on remarque d'abord qu'il suffit de faire la démonstration pour μ' et μ tels que $\mu-1 \leqslant \mu' < \mu$ et que l'on peut prolonger les coefficients $a_\alpha(o,x')$ de manière C^∞ sur $\mathbb{R}^{n-1}$, constants en dehors d'un compact et de sorte que le polynôme indiciel n'ait pas de racine dans la bande $\alpha < \mathrm{Re}\,\lambda < \beta$ pour $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Par ailleurs, on se ramène facilement au cas $k = 2m$.

Soit $u \in C^{\mu'}_{-\infty,loc}(]0,T[;\mathcal{D}'(\Omega'))$ tel que $Lu \in C^{\mu}_{\sigma,loc}(]0,T[,\mathcal{D}'(\Omega'))$ et soit $\phi \in C^\infty_o(\mathbb{R}^n_+)$ avec $\mathrm{Supp}\,\phi \subset \underline{\Omega} = [0,T[\times\Omega'$. Alors $v = \phi\, u \in C^{\mu'}_{\sigma'+k}(\mathbb{R}_+ ;\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}))$ est à support compact dans $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ et $Lv \in C^{\mu'}_{\mathrm{Min}(\sigma'+1,\sigma)}(\mathbb{R}_+ ;\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}))$. Ecrivant que $t^k D^k_t = Lv - \sum\limits_{h=o}^{k} t^{k-h} \sum\limits_{\substack{|\alpha|\leq k-h\\ \alpha_n \neq k}} a_\alpha D^\alpha$, on obtient que $t^k D^k_t v \in C^{\mu'}_{\mathrm{Min}(\sigma'+1,\sigma)}$ $(\mathbb{R}_+ ;\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}))$ et, finalement, que $v \in C^{\mu'}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+ ;\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}))$. Puisque $\mu' + 1 \geqslant \mu$, en revenant à l'expression de Lv , on obtient que $Lv \in C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}))$. Par ailleurs, v étant à support compact dans $\overline{\mathbb{R}}^n_+$, il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $v \in C^{\mu'}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+ ;C^\nu(\mathbb{R}^{n-1}))$ et $Lv \in C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ; C^\nu(\mathbb{R}^{n-1}))$.

On introduit maintenant l'opérateur $L_o = \sum\limits_{h=o}^{k} a_{(k-h,o)}(o,x')t^{k-h}D^{k-h}_t$. On vérifie que, quitte à changer ν , $L_o v \in C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^\nu(\mathbb{R}^{n-1}))$.
Pour $t > 0$ et $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, on définit :

$$H(t;x') = \int_{\mathrm{Re}z = \lambda} t^z \frac{dz}{p(x';z)}$$

pour $\alpha < \lambda < \beta$. Cette intégrale est absolument convergente et puisque $p(x';z) = 0$ n'a pas de racine dans la bande $\alpha < \mathrm{Re}\,z < \beta$, $H(t;x')$ est indépendante de λ et on vérifie que $H(t;x')$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+\setminus\{1\}\times\mathbb{R}^{n-1}$, constante en x' pour $|x'|$ grand et vérifie pour $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, $k \in \mathbb{N}$, $N' \in \mathbb{N}^{n-1}$:

(i) $|(t\partial_t)^k \partial^{N'}_{x'} H(t;x')| = O(t^{\alpha'})$ pour $t \to +\infty$,

(ii) $|(t\partial_t)^k \partial^{N'}_{x'} H(t;x')| = O(t^{\beta'})$ pour $t \to 0$;

(iii) $|\partial^k_t \partial^{N'}_{x'} H(t;x')| = O(|t-1|^{-k-\varepsilon})$ pour $t \to 1$.

Pour $t > 0$, l'application $x' \to H(t;x')$ est $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, constante en dehors d'un compact et définit ainsi un opérateur de multiplication $H(t)$ linéaire continu de $C^\nu(\mathbb{R}^{n-1})$ dans $C^\nu(\mathbb{R}^{n-1})$; on peut donc définir pour $w \in \varepsilon'(\mathbb{R}_+ ; C^\nu(\mathbb{R}^{n-1}))$ la convolution $H_* w = \int_o^{+\infty} H(t/s)w(s)\frac{ds}{s}$. On a alors :

<u>Proposition IV.1</u> : Sous les hypothèses précédentes, H est une solution élémentaire de L_o et pour toute distribution $w \in \varepsilon'(\mathbb{R}_+ ; C^\nu(\mathbb{R}^{n-1}))$ on a :

$w = H*L_o w$; de plus la convolution $w \longrightarrow H*w$ se prolonge en un opérateur continu de $\overset{\circ}{W}{}^{\mu}_{\sigma}(]0,T];C^{\nu}(\mathbb{R}^{n-1}))$ dans $W^{\mu}_{\sigma}(]0,T]\ ;\ C^{\nu}(\mathbb{R}^{n-1}))$ pour tout $T > 0$ et $\alpha < \mu < \beta$ et où $\overset{\circ}{W}{}^{\mu}_{\sigma}(]0,T];C^{\nu}(\mathbb{R}^{n-1}))$ désigne l'espace des $w \in W^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu}(\mathbb{R}^{n-1}))$ à support dans $[0,T]$.

Pour cela, on commence par établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $w \in W^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu}) \cap \varepsilon'(\mathbb{R}_+ ;\ C^{\nu})$ on ait :
$\| H*w\|_{W^{\mu}_{\sigma}(]0,T[;C^{\nu})} \leqslant C.\| w\|_{W^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})}$. Cette inégalité résulte des estimations (i) (ii) (iii) précédentes et (en conservant les notations du paragraphe II) le fait que : $\widetilde{(H*w)}_j(t) = \sum\limits_k \int \psi(t)H(2^{k-j}t/s)\tilde{u}_k(s)\ \frac{ds}{s}$. On utilise ensuite la densité "faible" des éléments à support compact dans $\mathbb{R}_+$ de $W^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$ dans $\overset{\circ}{W}{}^{\mu}_{\sigma}(]0,T];C^{\nu})$.

Ceci étant, puisque $\mu' \in \mathbb{Z}$,on écrit $v \in C^{\mu'}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu}(\mathbb{R}^{n-1}\ ))$ sous la forme : $v = v_o + v_1$ où $v_o \in C^{+\infty}_{+\infty}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$ et $v_1 \in W^{\mu'}_{\sigma+k}\ (\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$ (cf. proposition II.3), v_o et v_1 étant à support compact dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ avec $v_o = (\sum\limits_{0\leqslant j<\mu'} \gamma_j v\ \frac{t^j}{j!})\varphi(t)$,

$\varphi \in C^{\infty}_o(\overline{\mathbb{R}}_+)$ égale à 1 sur un voisinage de 0 . Utilisant la proposition IV.1 , on a : $v_1 = H*L_o v_1$ puisque $L_o v_1 \in W^{\mu'}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$ à support compact dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Par ailleurs $L_o v_1 = L_o v - L_o v_o \in C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$; on peut donc écrire aussi puisque $\mu \notin \mathbb{Z}$ (proposition II.3) : $L_o v_1 = f_o + f_1$ avec $f_o \in C^{+\infty}_{+\infty}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$ et $f_1 \in W^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$, f_o et f_1 étant à support compact dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Par ailleurs $L_o v_1 \in W^{\mu'}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$, donc f_o se réduit à : $f_o = (\sum\limits_{\mu'<j<\mu} \gamma_j \frac{t^j}{j!})\ \varphi(t)$. Considérant l'élément $v_2 = (\sum\limits_{\mu'<j<\mu} \gamma_j f_j\ \frac{t^j}{j!p(x';j)})\ \varphi(t)$; on a : $v_2 \in C^{+\infty}_{+\infty}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu}) \cap W^{\mu'}_{+\infty}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$, est à support compact dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et $L_o v_2 = f_o + f_2$ avec $f_2 \in C^{+\infty}_o(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$.
Appliquant de nouveau la proposition IV.1, il vient : $v = v_o + H*L_o v_1 = v_o + v_2 - H*f_2 + H*f_1 \in C^{\mu}_{\sigma}(]0,T[;C^{\nu})$. Revenant à l'équation $Lv \in C^{\mu}_{\sigma}(\mathbb{R}_+ ;C^{\nu})$, on obtient que $v \in C^{\mu}_{\sigma+k}(]0,T[;C^{\nu'})$ pour un certain ν' .

Pour le théorème III.2, on se limite à établir de telles estimations au voisinage de l'origine. On utilise la technique de Korn en décomposant l'opérateur (L,B_{μ}) sous la forme $(L^o + L^1 + L^2\ ,\ B^o_{\mu} + B^1_{\mu} + B^2_{\mu})$ avec :

$$L^o = L^o(t;D_{x'},D_t) = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} t^{k-h} \sum_{|\alpha|=2m-h} a^{2m-h}_{\alpha}(0,0)D^{\alpha}\ ,$$

$$L^1 = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} t^{k-h} \sum_{|\alpha|=2m-h} (a^{2m-h}_{\alpha}(t,x') - a^{2m-h}_{\alpha}(0,0))D^{\alpha}\ ,$$

$$L^2 = \sum_{h=o}^{\mathrm{Min}(k,2m)} t^{k-h} \sum_{|\alpha|\leqslant 2m-h-1} a^{2m-h}_{\alpha}(t,x')D^{\alpha}\ .$$

B_μ^o , B_μ^1 et B_μ^2 étant définis de manière analogue, et on commence par établir le théorème III.2 pour l'opérateur (L^o, B_μ^o).

Sous les hypothèses $(H_{1\mu})(H_{2\mu})(H_{3\mu})$ l'opérateur $(L^o(t;\xi';D_t)$, $B_\mu^o(\xi';D_t))$, pour $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, est un isomorphisme de $C_{\sigma+k}^{\mu+2m-k}(\mathbb{R}_+)$ sur $C_\sigma^\mu(\mathbb{R}_+)$ d'inverse $K_{\xi'}$ et l'application $\xi' \to K_{\xi'}$ est C^∞ de $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ dans $\mathcal{L}(C_\sigma^\mu(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{\chi_\mu}$; $C_{\sigma+k}^{\mu+2m-k}(\mathbb{R}_+))$; de plus il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\frac{1}{2} \leqslant |\xi'| \leqslant 2$ et $(f,g) \in C_\sigma^\mu(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{\chi_\mu}$ on ait :

$$(4.1) \qquad \| K_{\xi'}(f,g) \|_{C_{\sigma+k}^{\mu+2m-k}(\mathbb{R}_+)} \leqslant C \ \|(f,g)\|_{C_\sigma^\mu(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{\chi_\mu}} .$$

Par dérivation du système :

$$\begin{cases} L^o(t;\xi';D_t)K_{\xi'}(f,g) = f \\ B_\mu^o(\xi';D_t)K_{\xi'}(f,g) = g \end{cases}$$

et compte tenu de l'inégalité (4.1), on obtient que pour tout $\beta' \in \mathbb{N}^{n-1}$, il existe une constante $C_{\beta'} > 0$ telle que pour $\frac{1}{2} \leqslant |\xi'| \leqslant 2$ et $(f,g) \in C_\sigma^\mu(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{\chi_\mu}$ on ait :

$$(4.2) \qquad \| D_{\xi'}^{\beta'} K_{\xi'}(f,g) \|_{C_{\sigma+k}^{\mu+2m-k}(\mathbb{R}_+)} \leqslant C. \ \| (f,g) \|_{C_\sigma^\mu(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}^{\chi_\mu}} .$$

Soit maintenant $u \in L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}$; $C_{\sigma+k}^{\mu+2m-k}(\mathbb{R}_+))$ à spectre tangentiel dans la couronne $\frac{1}{2} \leqslant |\xi'| \leqslant 2$, on montre qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de u telle que :

$$(4.3) \quad \sup_{x'} \| u(.,x') \|_{C_{\sigma+k}^{\mu+2m-k}(\mathbb{R}_+)} \leqslant C\{ \sup_{y'} \| L^o u(.,y') \|_{C_\sigma^\mu(\mathbb{R}_+)} + \sup_{y'} \| B^o u(y') \|_{\mathbb{C}^{\chi_\mu}} \}.$$

En effet, en appliquant l'opérateur $(L^o(t;\xi',D_t)$, $B_\mu^o(\xi',D_t))$ à la relation

$$\hat{u}(.,\xi') = \int e^{-iy'.\xi'} u(.y')dy'$$

on déduit les égalités

$$\begin{cases} L^o(t;\xi',D_t)\hat{u}(.,\xi') = \widehat{L^o u}(.\xi') = \int e^{-iy'.\xi'}(L^o u)(.,y')dy' \\ B_\mu^o(\xi';D_t)\ \hat{u}(.,\xi') = \widehat{B_\mu^o u}(\xi') = \int e^{-iy'.\xi'}(B_\mu^o u)(y')dy' . \end{cases}$$

On applique ensuite l'opérateur $K_{\xi'}$ à ce système :

$$\hat{u}(.,\xi') = K_{\xi'}(L^o(t;\xi',D_t)\hat{u}(.,\xi'),\ B^o_\mu(\xi',D_t)\hat{u}(.,\xi'))$$
$$= \int e^{-iy'.\xi'}\ K_{\xi'}(L^o u(.,y'),\ B^o_\mu u(y'))dy' .$$

Puis en écrivant que

$$u(.,x') = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int e^{ix'.\xi'}\ \phi(\xi')\ \hat{u}(.,\xi')\ d\xi'$$

où $\phi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ à support dans une couronne et valant 1 sur $\frac{1}{2} \leqslant |\xi'| \leqslant 2$, et en intégrant par parties par rapport à ξ', on obtient :

$$u(.,x') = \iint \frac{e^{i<x'-y',\xi'>}}{(1+|x'-y'|^2)^N} (1-\Delta_{\xi'})^N \{\phi(\xi')K_{\xi'}(L^o u(.,y'),B^o_\mu u(y'))\}dy'\ d\xi'$$

choisissant N assez grand, on déduit de (4.2) l'inégalité (4.3).

On considère maintenant $u \in C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+)$. Pour $q \geqslant 0$, on pose : $u_q(t,x') = \Delta'_q u(2^{-q}x)$. La quasi-homogénéité de (L^o,B^o_μ) donne les relations :

$$(L^o u)_q = 2^{q(2m-k)} L^o u_q \quad ; \quad (B^o_\mu u)_q = (2^{qm_j} B^o_{j\mu} u_q)_j .$$

On utilise l'inégalité (4.3) et la remarque suivante : $v \in C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ si et seulement si $\sup_q \sup_{x'} 2^{(\mu+\nu)q} \| v_q(.,x')\|_{C^\mu_\sigma(\mathbb{R}_+)} < +\infty$, on obtient pour $q \geqslant 1$:

$$2^{q(\mu+2m-k+\nu)}\| u_q(.,x')\|_{C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+)} \leqslant C\{2^{q(\mu+\nu)} \sup_{y'} \| (L^o u)_q(.,y')\|_{C^\mu_\sigma(\mathbb{R}_+)}$$

$$+\sum_j 2^{q(\mu+2m-k+\nu-m_j)} \operatorname{Sup}_{y'}\| (B^o_\mu u)_q(y')\|_{\mathbb{C}^{\chi_\mu}} \} \leqslant C\{\| L^o u\|_{C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_j \| B^o_\mu u\|_{C^{\mu+2m-k+\nu-m_j}(\mathbb{R}^{n-1})}\}$$

et pour $q = 0$, on remarque que :

$$\| u_o(.,x')\|_{C^{\mu+2m-k}_{\sigma+k}(\mathbb{R}_+)} \leqslant C. \| u\|_{C^{\mu+2m-k,\nu-1}_{\sigma+k}(\mathbb{R}^n_+)}$$

d'où le théorème III.2 pour l'opérateur (L^o,B^o_μ).

On passe ensuite de l'opérateur (L^o,B^o_μ) à l'opérateur $(L^o+L^1,B^o_\mu+B^1_\mu)$ grâce au lemme suivant :

<u>Lemme 4.2</u> : Soient $\varphi \in S(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ et $u \in C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$. On a $\varphi u \in C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)$ et

$$\| \varphi u\|_{C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_o \operatorname{Sup}|\varphi|\ \| u\|_{C^{\mu,\nu}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)} + C_1\| u\|_{C^{\mu,\nu-1}_\sigma(\mathbb{R}^n_+)}$$

où C_o ne dépend pas de φ ni de u et C_1 ne dépend pas de u.

Enfin, on passe de l'opérateur $(L^o+L^1, B_\mu^o + B_\mu^1)$ à l'opérateur (L,B_μ) en utilisant des inégalités du type "compacité" pour les espaces $C_\sigma^{\mu,\nu_\mu}(\mathbb{R}_+^n)$.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg : Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions ; C.P.A.M. 12 (1959), p.623-727.

[2] M.S. Baouendi - C. Goulaouic : Cauchy problems with multiple characteristics in spaces of regular distributions, Uspehi, vol.29, n°2 (176), 1974, p.70-76.

[3] P. Bolley - J. Camus : sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables ; Bull. Soc. Math. France, mémoire 34, 1973, p.55-140.

[4] J.M. Bony : Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non linéaires. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-84 exposé n°X.

[5] L. Boutet de Monvel - G. Geymonat : Solutions irrégulières d'un problème aux limites elliptique. Symposia Mathematica 7 (1971) p.381-402.

[6] M. Damlakhi : Thèse d'Etat, Orsay 1983.

[7] O. Debbaj : Régularité hilbertienne et Höldérienne de certains problèmes aux limites singuliers. Thèse d'Etat, Rennes 1983.

[8] C. Goulaouic - N. Shimakura : régularité Höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés. Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, Série IV, vol X, n°1 (1983).

[9] C.R. Graham : The Dirichlet problem for the Bergman Laplacien (Preprint 1983).

[10] V.V. Grusin - M.I. Visik : Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain, Mat. Sbornik, vol. 80 (122), 1969, pp.455-491.

[11] T. Horiuchi : Existence and uniqueness of classical solutions for certain degenerated elliptic equations of second order. Ibaraki University, Japon (Preprint 1983).

[12] M. Langlais : On the bounded solutions of some degenerate elliptic problems Purdue University.

[13] J.L. Lions - E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes, tome 1, Dunod, Paris 1968.

[14] S. Łojasiewicz : Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point. Studia Math. 16 (1957) p.1-36.

[15] B. Lucquin - Desreux : Thèse 3ème cycle, Orsay (1984).

[16] J. Sebastiao e Silva : Sur la définition et la structure des distributions vectorielles. Portugaliae Mathematica, 19, 1960.

[17] N. Shimakura : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. J. Math. Kyoto University, vol.9, n°2, 1969, p.275-335.

***